



Roger Mansuy  
& Rached Mneimné

LICENCE  
MATHÉMATIQUES  
CLASSES PRÉPARATOIRES  
SCIENTIFIQUES

2<sup>e</sup> édition

# Algèbre linéaire

Réduction des endomorphismes

- Cours complet
- Commentaires et développements
- Plus de 120 exercices corrigés

Vuibert



**Roger Mansuy**

Avec la participation de Rached Mneimné

# **Algèbre linéaire**

**Réduction des endomorphismes**

**Cours & exercices corrigés**

**2<sup>e</sup> édition**

LICENCE MATHÉMATIQUES

CLASSES PRÉPARATOIRES SCIENTIFIQUES

**Vuibert**

Marc BRIANE & Gilles PAGÈS,  
*Analyse. Théorie de l'intégration. Convolution et transformée de Fourier.*  
Cours et exercices corrigés – L3 & Master 1, 6<sup>e</sup> édition, 400 pages

Mourad CHOULLI,  
*Analyse fonctionnelle. Équations aux dérivées partielles.*  
Cours et exercices corrigés – Master, 192 pages

Éric CANON  
*Analyse numérique.*  
Cours et exercices corrigés – L2 & L3, 256 pages

Jérôme DEPAUW  
*Statistiques.*  
Cours et exercices corrigés – Master, 176 pages

Vincent RIVOIRARD & Gilles STOLTZ,  
*Statistique mathématique en action.*  
Cours, problèmes d'application corrigés et mises en action concrètes – Master & Agrégation externe,  
2<sup>e</sup> édition, 448 pages

Anne CORTELLA,  
*Algèbre. Théorie des groupes.*  
Cours et exercices corrigés – L3 & Master, 224 pages

Bruno AEBISCHER,  
*Introduction à l'analyse.*  
Cours et exercices corrigés – L1, 288 pages

Bruno AEBISCHER,  
*Analyse. Fonctions de plusieurs variables & géométrie analytique.*  
Cours et exercices corrigés – L2, 448 pages

Bruno AEBISCHER,  
*Géométrie. Géométrie affine, géométrie euclidienne & introduction à la géométrie projective.*  
Cours et exercices corrigés – L3, 288 pages

**et des dizaines d'autres livres de référence, d'étude ou de culture  
en mathématiques, informatique et autres spécialités scientifiques**

**[www.vuibert.fr](http://www.vuibert.fr)**

En couverture : Escalier en double spirale de Giuseppe Momo, Vatican.  
© Sylvain Sonnet/Corbis

Maquette intérieure, composition et mise en page de l'auteur  
Couverture : Linda Skoropad/Prescricom

ISBN 978-2-311-40405-0

*La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au Centre français d'exploitation du droit de copie : 20 rue des Grands Augustins, F-75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70*

© Vuibert – juin 2016 – 5 allée de la 2<sup>e</sup> DB, 75015 Paris

# Table des matières

## Avant-propos

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| <b>I. Polynômes d'endomorphismes</b>                           |    |
| 1. Un morphisme d'algèbre . . . . .                            | 1  |
| 2. Idéal des polynômes annulateurs . . . . .                   | 2  |
| 3. Polynôme minimal . . . . .                                  | 4  |
| 4. Utilisation pratique d'un polynôme annulateur . . . . .     | 5  |
| 5. Commentaires et développements . . . . .                    | 7  |
| 6. Exercices . . . . .                                         | 9  |
| <b>II. Sous-espaces stables</b>                                |    |
| 1. Restriction d'un endomorphisme . . . . .                    | 15 |
| 2. Sous-espace stable . . . . .                                | 17 |
| 3. Endomorphisme induit sur un sous-espace stable . . . . .    | 18 |
| 4. Exemples de sous-espaces stables . . . . .                  | 18 |
| 5. Sous-espaces cycliques . . . . .                            | 19 |
| 6. Commentaires et développements . . . . .                    | 20 |
| 7. Exercices . . . . .                                         | 22 |
| <b>III. Commutation</b>                                        |    |
| 1. Définitions . . . . .                                       | 27 |
| 2. Calculs de commutants . . . . .                             | 29 |
| 3. Endomorphisme $ad_f$ . . . . .                              | 30 |
| 4. Commentaires et développements . . . . .                    | 31 |
| 5. Exercices . . . . .                                         | 32 |
| <b>IV. Lemme des noyaux</b>                                    |    |
| 1. Étude de $\ker P(f)$ . . . . .                              | 39 |
| 2. Lemme des noyaux . . . . .                                  | 40 |
| 3. Décomposition de l'espace en sous-espaces stables . . . . . | 42 |
| 4. Commentaires et développements . . . . .                    | 43 |
| 5. Exercices . . . . .                                         | 45 |

|                                                        |     |
|--------------------------------------------------------|-----|
| <b>V. Éléments propres, caractéristiques</b>           |     |
| 1. Définitions . . . . .                               | 47  |
| 2. Polynôme caractéristique . . . . .                  | 50  |
| 3. Commentaires et développements . . . . .            | 53  |
| 4. Exercices . . . . .                                 | 54  |
| <b>VI. Endomorphismes cycliques</b>                    |     |
| 1. Définitions . . . . .                               | 63  |
| 2. Caractérisation avec le polynôme minimal . . . . .  | 64  |
| 3. Caractérisation avec le commutant . . . . .         | 65  |
| 4. Matrice compagnon . . . . .                         | 66  |
| 5. Polynôme caractéristique . . . . .                  | 68  |
| 6. Commentaires et développements . . . . .            | 70  |
| 7. Exercices . . . . .                                 | 72  |
| <b>VII. Théorème de Cayley &amp; Hamilton</b>          |     |
| 1. Énoncé et conséquences . . . . .                    | 75  |
| 2. Preuve par les sous-espaces cycliques . . . . .     | 76  |
| 3. Preuve par la formule de la comatrice . . . . .     | 76  |
| 4. Sous-espaces caractéristiques . . . . .             | 77  |
| 5. Multiplicités . . . . .                             | 77  |
| 6. Commentaires et développements . . . . .            | 78  |
| 7. Exercices . . . . .                                 | 79  |
| <b>VIII. Diagonalisation</b>                           |     |
| 1. Critères de diagonalisation . . . . .               | 83  |
| 2. Critère de co-diagonalisation . . . . .             | 88  |
| 3. Commentaires et développements . . . . .            | 89  |
| 4. Exercices . . . . .                                 | 90  |
| <b>IX. Trigonalisation</b>                             |     |
| 1. Critères de trigonalisation . . . . .               | 97  |
| 2. Fonctions symétriques des valeurs propres . . . . . | 99  |
| 3. Commentaires et développements . . . . .            | 103 |
| 4. Exercices . . . . .                                 | 104 |
| <b>X. Réduction de Jordan</b>                          |     |
| 1. Décomposition de Jordan & Dunford . . . . .         | 111 |
| 2. Réduction de Jordan : cas nilpotent . . . . .       | 113 |
| 3. Interlude : lire un tableau de Young . . . . .      | 119 |
| 4. Réduction de Jordan : cas général . . . . .         | 120 |
| 5. Commentaires et développements . . . . .            | 121 |
| 6. Exercices . . . . .                                 | 123 |

|                                                                     |            |
|---------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>XI. Réduction de Frobenius</b>                                   |            |
| 1. Réduction de Frobenius . . . . .                                 | 131        |
| 2. Retour sur la réduction de Jordan . . . . .                      | 135        |
| 3. Commutants et bicommutants . . . . .                             | 138        |
| 4. Commentaires et développements . . . . .                         | 141        |
| 5. Exercices . . . . .                                              | 142        |
| <b>XII. Topologie des classes de similitude</b>                     |            |
| 1. Rappels sur la relation de similitude . . . . .                  | 147        |
| 2. Classes de similitude dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . . . . . | 148        |
| 3. Adhérence d'une classe de similitude . . . . .                   | 152        |
| 4. Connexité d'une classe de similitude . . . . .                   | 154        |
| 5. Commentaires et développements . . . . .                         | 155        |
| 6. Exercices . . . . .                                              | 156        |
| <b>XIII. Localisation des valeurs propres</b>                       |            |
| 1. Théorème de Hadamard . . . . .                                   | 161        |
| 2. Disques de Gerschgorin . . . . .                                 | 162        |
| 3. Rayon spectral . . . . .                                         | 164        |
| 4. Théorème de Perron . . . . .                                     | 165        |
| 5. Théorème de Perron & Frobenius . . . . .                         | 167        |
| 6. Commentaires et développements . . . . .                         | 169        |
| 7. Exercices . . . . .                                              | 171        |
| <b>XIV. Application aux chaînes de Markov finies</b>                |            |
| 1. Chaînes de Markov . . . . .                                      | 179        |
| 2. Matrice de transition . . . . .                                  | 180        |
| 3. Probabilité invariante . . . . .                                 | 183        |
| 4. Théorème ergodique . . . . .                                     | 184        |
| 5. Commentaires et développements . . . . .                         | 186        |
| 6. Exercices . . . . .                                              | 188        |
| <b>Annexe : Parallèle avec les groupes abéliens finis</b>           |            |
| 1. $A$ -modules . . . . .                                           | 191        |
| 2. Lexique . . . . .                                                | 192        |
| 2.1. Cadre d'étude . . . . .                                        | 192        |
| 2.2. Polynôme minimal . . . . .                                     | 193        |
| 2.3. Polynôme caractéristique . . . . .                             | 193        |
| 2.4. Endomorphisme cyclique . . . . .                               | 194        |
| 2.5. Réduction de Frobenius . . . . .                               | 194        |
| <b>Notations</b>                                                    | <b>195</b> |
| <b>Index</b>                                                        | <b>197</b> |



# Avant-propos

## Qu'est-ce que la réduction ?

Dans tout cours d'algèbre linéaire, la réduction des matrices et des endomorphismes occupe une place prépondérante. Toutefois, ce terme de réduction cache de nombreuses réalités et perspectives.

▷ D'une part, réduire un endomorphisme  $f$  d'un espace de dimension finie, c'est trouver une base dans laquelle l'endomorphisme  $f$  est « bien compris » et « facilement manipulable ». En pratique, cela revient à pouvoir déterminer une matrice de l'endomorphisme avec une forme particulière : diagonale (dans le meilleur des cas), diagonale par blocs, triangulaire...

Pour une matrice carrée  $M$ , l'équivalent de cette démarche consiste à chercher une matrice d'une forme particulière semblable à  $M$  : en effet, la formule de changement de bases pour la matrice d'un endomorphisme n'est autre que la traduction de la similitude de deux matrices.

▷ D'autre part, réduire un endomorphisme (respectivement une matrice) c'est comprendre l'ensemble de toutes les matrices qui lui sont associées (respectivement sa classe de similitude) ; pour ce faire, on cherche une matrice réduite qui décrit simplement, qui caractérise cet ensemble. En avançant dans cette direction, on retrouve à la fois les invariants de similitude (pour la réduite de Frobenius) et les tableaux de Young (pour la réduite de Jordan).

En théorie, un cours complet comporte les deux aspects imbriqués avec quelques applications endogènes de l'algèbre linéaire mais aussi exogènes en provenance de l'algèbre bilinéaire, de la topologie, des probabilités, des sciences physiques...

## Qu'est-ce que ce livre ?

Il existe de nombreux livres pour les étudiants de premiers cycles qui traitent certains des aspects de la réduction mais aucun ne semble avoir

pris la mesure de la richesse du sujet dans les cours des premiers cycles (et dans les préparations aux concours de recrutement de l'Éducation Nationale). Nous avons donc cherché à fournir une introduction raisonnée à l'ensemble de la réduction. Le livre se découpe grossièrement en cinq parties.

▷ Tout d'abord, les sept premiers chapitres présentent dans un ordre assez classique les outils de la suite du livre. L'algèbre des polynômes en un endomorphisme (respectivement une matrice carrée) joue évidemment un rôle essentiel. Nous avons pris le parti de privilégier l'aspect élémentaire donc de cacher, au moins en apparences, la structure de  $\mathbb{K}[X]$ -module. En revanche, nous avons insisté sur l'étude des sous-espaces stables de la forme  $\ker P(f)$  trop souvent limitée au lemme des noyaux et aux sous-espaces propres et caractéristiques. Par exemple, le lemme 2.2 établit l'existence d'un sous-espace cyclique maximal de dimension le degré du polynôme minimal : ce résultat simple est riche pour la suite.

De même, nous avons choisi de mettre en exergue les endomorphismes cycliques (chapitre VI) à la fois pour fournir une démonstration simple du théorème de Cayley & Hamilton mais aussi pour le lemme VI-3.3 qui établit l'existence du supplémentaire stable d'un sous-espace cyclique maximal. L'idée est bien évidemment de préparer le terrain aux réductions de Jordan et Frobenius en se familiarisant avec l'argument des preuves par récurrence.

▷ Une fois tous ces outils mis en place, deux petits chapitres décrivent les critères simples de diagonalisation, de trigonalisation, de réduction simultanée... Il s'agit simplement de combiner tout ce qui a été détaillé précédemment. Cela constitue un objectif de nombreux cours de premiers cycles mais ce n'est ici qu'un jalon dans notre parcours.

▷ Les chapitres X et XIV-6 présentent les deux formes réduites normalisées : celle de Jordan et celle de Frobenius ; nous ne nous arrêtons bien évidemment pas à l'existence de ces réductions mais nous cherchons à en montrer l'utilité pratique avec de nombreux exercices sur les tableaux de Young ou les algorithmes pour passer d'une forme réduite à l'autre. Il apparaît que ces aspects sont souvent mal compris et qu'une lecture attentive de ces chapitres serait bienvenue pour de nombreux étudiants.

▷ Le chapitre XII exploite les différentes caractérisations de la similitude obtenue jusqu'à présent pour donner dans le cadre réel ou complexe des descriptions géométriques et topologiques des classes de similitude.

▷ La dernière séquence du livre répond à un problème différent : il s'agit de chercher approximativement où se trouvent les valeurs propres pour une matrice complexe. Ce sujet est souvent une introduction à des problèmes d'algorithmique pour le calcul matriciel numérique ; nous avons

choisi d'en détailler une autre application classique avec les chaînes de Markov homogènes finies. L'application du théorème de Perron & Frobenius est alors assez élémentaire et pourtant très parlante sur l'importance de ce résultat.

Voilà pour le contenu du livre. Passons maintenant à la forme. Il reste plusieurs rédactions dans ce livre qui correspondent à différents usages. Le contenu des chapitres est présenté de manière didactique dans une démarche très conventionnelle parsemant de nombreux exemples (certains étant très élémentaires) l'enchaînement des propositions et leurs preuves détaillées. Certaines preuves sont délicates et il peut être astucieux de les sauter lors d'une première lecture afin de comprendre correctement les énoncés puis d'y revenir plus tard à tête reposée.

Toutefois, à la fin de chaque chapitre, une section intitulée « Commentaires et développements » détonne : il s'agit de remarques moins détaillées mais néanmoins profondes, d'ouvertures pour permettre d'aller plus loin, il ne s'agit plus pour nous de faire cours mais de suggérer un travail personnel. La dernière partie de chaque chapitre est bien évidemment constituée d'exercices ; les corrections sont détaillées pour pouvoir être lues facilement même si nous préconisons plutôt de ne pas les lire trop vite. Certains exercices sont relativement classiques, d'autres plus originaux : nous avons choisi de ne pas indiquer la difficulté pour ne pas biaiser le lecteur dans son effort de recherche.

## Notations

Précisons quelques notations ou conventions (l'ensemble des notations est détaillé dans l'index en fin d'ouvrage).

Dans tout l'ouvrage,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie où  $\mathbb{K}$  est un corps quelconque (sauf précisions contraires).

Nous pratiquons abusivement l'identification d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  à l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé ; cela nous amène par exemple quelquefois à dire qu'une matrice est injective ou qu'elle laisse stable un sous-espace.

Lorsque que nous manipulerons des matrices par blocs, seuls les blocs non nuls seront représentés : les espaces « vides » sont à compléter avec des coefficients nuls.

## Remerciements

Un grand remerciement va aux relecteurs (anciens élèves, collègues et amis) qui ont sacrifié une partie de leurs vacances estivales pour débusquer nos coquilles et autres imprécisions : Yixin SHEN, Pierre BAYLE, Anne-Laure BIOLLEY, Marc Yuma CHAPUIS, Mohammed HAWARI, Ulysse MIZRAHI.

## Deuxième édition

Le succès des ventes des premiers tirages a permis une deuxième édition avec quelques améliorations du texte original : des compléments épars répondent aux questions les plus fréquemment posées, une annexe indique succinctement l'a priori étonnant parallèle entre le contenu de cet ouvrage et celui d'un cours sur les groupes abéliens finis, des exercices élémentaires ont été ajoutés. Par ailleurs, nous avons corrigé les erreurs signalées par les lecteurs attentifs, collègues et amis. Que tous nos interlocuteurs soient remerciés de leur concours à l'amélioration de ce livre.

# Chapitre I

## Polynômes d'endomorphismes

### Objectifs du chapitre

- Comprendre l'importance de l'algèbre  $\mathbb{K}[f]$  associée à l'endomorphisme  $f$ .
- Calculer sur des exemples simples le polynôme minimal d'un endomorphisme.
- Utiliser les polynômes annulateurs pour calculer puissances ou inverse (s'il existe).

### 1. Un morphisme d'algèbre

**1.1. Définition.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  de la forme  $P(X) = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k$ , l'endomorphisme  $P(f)$  est défini par

$$P(f) = \sum_{k=0}^N \alpha_k f^k.$$

**1.2. Exemple.** Par exemple, pour le polynôme  $P = X^3 + 2X - 1$  et un endomorphisme  $f$ , l'endomorphisme  $P(f)$  vaut  $f^3 + 2f^1 - f^0 = f^3 + 2f - \text{Id}$ .

**1.3. Remarque.** Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$ , on définit de même la matrice  $P(A)$ . Il est important de remarquer que si  $A$  est la matrice d'un endomorphisme  $f$  dans une base  $\mathcal{B}$ , alors  $P(A)$  est la matrice de l'endomorphisme  $P(f)$  dans cette même base  $\mathcal{B}$ .

**1.4. Remarque.** Attention aux erreurs de notation entre polynômes et polynômes en  $f$ . Par exemple, on veille bien à ne pas mélanger les écritures suivantes pour  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $x \in E$  :

- $P(f)(x)$ , qui est un vecteur, et  $P(f(x))$  qui n'est pas défini ;
- $(P \cdot Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$ , qui est un endomorphisme, et  $(P \circ Q)(f)$  qui est un autre endomorphisme.

**1.5. Proposition.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . L'application qui à un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  associe l'endomorphisme  $P(f) \in \mathcal{L}(E)$  est un morphisme d'algèbres.

L'image de ce morphisme, notée  $\mathbb{K}[f]$ , est une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{L}(E)$ .

**1.6. Proposition.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et deux polynômes  $P$  et  $Q$ . Alors, les endomorphismes  $P(f)$  et  $Q(f)$  commutent.

*Démonstration.* Par linéarité, il suffit de noter que, pour tous  $m$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f^m \circ f^n = f^{m+n} = f^n \circ f^m.$$

□

## 2. Idéal des polynômes annulateurs

**2.1. Définition.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Un polynôme  $P$  est annulateur de  $f$  si l'endomorphisme  $P(f)$  est l'endomorphisme nul.

**2.2. Remarque.** Comme précédemment, cette notion est définie de manière analogue pour une matrice carrée.

**2.3. Proposition.** Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un polynôme annulateur non nul.

*Démonstration.* Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . Alors, la famille  $(f^k)_{k \in \llbracket 0, n^2 \rrbracket}$  comporte  $n^2 + 1$  vecteurs de l'espace  $\mathcal{L}(E)$ , lequel est de dimension  $n^2$  : elle est alors liée. Il existe donc

une famille de  $(\alpha_k)_{k \in [0, n^2]} \in \mathbb{K}^{n^2+1}$  de scalaires non tous nuls telle que

$$\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Par conséquent, le polynôme  $\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k$  est annulateur de  $f$ . □

**2.4. Remarque.** Nous verrons plus loin (théorème de Cayley & Hamilton) qu'en dimension  $n$ , on peut déterminer un polynôme annulateur de degré  $n$  (le polynôme caractéristique).

**2.5. Exemple.** Le seul endomorphisme qui admet  $aX + b$  comme polynôme annulateur avec  $a \neq 0$  est l'homothétie de rapport  $-\frac{b}{a}$ .

En dimension infinie, il existe des endomorphismes qui n'admettent pas de polynôme annulateur non nul.

**2.6. Exemple.** La dérivation usuelle  $D : P \mapsto P'$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  qui n'admet pas de polynôme annulateur non nul.

En effet, raisonnons par l'absurde : si  $D$  admet un polynôme annulateur  $Q$ , alors, pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $Q(D)(P) = 0$ . Or, avec  $P = X^{\deg Q+1}$ ,  $Q(D)(P) \neq 0$  : contradiction.

**2.7. Définition.** Un endomorphisme est nilpotent s'il admet un monôme comme polynôme annulateur.

**2.8. Proposition.** L'ensemble  $\mathcal{I}_f$  des polynômes annulateurs de l'endomorphisme  $f$  est un idéal de l'anneau  $\mathbb{K}[X]$ .

*Démonstration.* L'ensemble  $\mathcal{I}_f$  est clairement un sous-groupe additif de  $\mathbb{K}[X]$ . Si  $P \in \mathcal{I}_f$  et  $Q \in \mathbb{K}[X]$ , alors  $QP \in \mathcal{I}_f$ , car

$$(QP)(f) = Q(f) \circ P(f) = Q(f) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

□

**2.9. Remarque.** Pour  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $x \in E$ , on peut aussi définir l'ensemble

$$\mathcal{I}_{f,x} = \{P \in \mathbb{K}[X], P(f)(x) = 0_E\}.$$

C'est encore un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  et il vérifie  $\mathcal{I}_f \subset \mathcal{I}_{f,x}$ .

### 3. Polynôme minimal

Comme l'anneau  $\mathbb{K}[X]$  est euclidien, il est en particulier principal, donc chaque idéal (non réduit à 0) de  $\mathbb{K}[X]$  peut être engendré par un unique polynôme unitaire. Ceci justifie la définition suivante (conjointement avec l'hypothèse que l'espace  $E$  est de dimension finie donc que l'idéal des polynômes annulateurs est non réduit au seul polynôme nul).

**3.1. Définition.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Le polynôme minimal de  $f$  est l'unique polynôme unitaire, noté  $\mu_f$ , qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs de  $f$ .

**3.2. Remarque.** Il est facile de voir que, pour un endomorphisme  $f$ , la dimension de l'algèbre  $\mathbb{K}[f]$  est le degré du polynôme minimal  $\mu_f$ . La proposition I-4.4 détaille cette remarque.

Déterminons l'idéal des polynômes annulateurs de quelques endomorphismes remarquables.

**3.3. Exemple.** Si  $f$  est un endomorphisme nilpotent, il admet un polynôme annulateur de la forme  $X^p$ . Par conséquent, le polynôme minimal est donc un monôme  $X^k$  avec  $k \leq p$ . Cet entier  $k$  est appelé indice de nilpotence de  $f$ . Un polynôme est alors annulateur de  $f$  si 0 en est une racine d'ordre au moins  $k$ .

**3.4. Exemple.** Si  $h$  est une homothétie de  $E$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $h = \lambda \text{Id}_E$ . Par conséquent,  $X - \lambda$  est un polynôme annulateur de degré 1, donc minimal. Un polynôme annulateur de  $h$  est donc un multiple de  $X - \lambda$ , c'est-à-dire un polynôme admettant  $\lambda$  comme racine.

**3.5. Exemple.** Si  $p$  est un projecteur, alors un polynôme annulateur de  $p$  est, par définition,  $X^2 - X$ . Ce polynôme est le polynôme minimal de  $p$  sauf si  $p$  est l'identité ou l'application nulle (en effet, s'il n'est pas minimal, alors  $p$  admet un polynôme annulateur de degré 1, donc est une homothétie).

**3.6. Exemple.** De même, le polynôme minimal d'une symétrie vectorielle qui n'est pas une homothétie (c'est-à-dire différente de  $\pm \text{Id}_E$ ) est  $X^2 - 1$ .

**3.7. Définition.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $x \in E$ . Le polynôme minimal local en  $x$  de  $f$  est l'unique polynôme unitaire, noté  $\mu_{f,x}$ , qui engendre l'idéal  $\mathcal{I}_{f,x}$  des polynômes  $P \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $x \in \ker P(f)$ .

## 4. Utilisation pratique d'un polynôme annulateur

### Calcul de l'inverse

**4.1. Proposition.** *Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  admettant un polynôme annulateur  $P$  tel que  $P(0) \neq 0$ . Alors,  $f$  est inversible. De plus, son inverse appartient à l'algèbre  $\mathbb{K}[f]$ .*

*Démonstration.* Écrivons  $P(X) = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k$  avec  $N > 0$  et  $\alpha_0 = P(0) \neq 0$ .

Posons

$$g = -\frac{1}{\alpha_0} \sum_{k=1}^N \alpha_k f^{k-1}.$$

Comme  $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , on obtient en isolant le terme en  $\text{Id}_E$ ,

$$f \circ g = g \circ f = \text{Id}_E.$$

Ainsi,  $f$  est inversible et que  $f^{-1} = g$ . □

**4.2. Exemple.** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  qui vérifie

$$(f - 2\text{Id}) \circ (f - 3\text{Id}) = 0$$

sans être une homothétie. Cherchons les réels  $\lambda$  tels que  $h_\lambda = f - \lambda\text{Id}$  soit non inversible (nous verrons plus loin que ces réels sont, par définition, les valeurs propres de  $f$ ). Comme le polynôme  $(X - 2)(X - 3)$  est annulateur de  $f$ , on en déduit que  $(X + \lambda - 2)(X + \lambda - 3)$  est annulateur de  $h_\lambda$ . Donc, si  $\lambda \notin \{2, 3\}$ , l'endomorphisme  $h_\lambda$  est inversible, car son polynôme annulateur n'admet pas 0 pour racine. En revanche, ni  $h_2$ , ni  $h_3$  ne sont inversibles, car sinon l'autre est nul (et donc  $f$  est une homothétie) puisque  $h_2 \circ h_3 = 0$ .

La réciproque du résultat précédent est bien évidemment fausse avec un polynôme annulateur quelconque : si  $P$  est un polynôme annulateur de  $f$ , alors  $XP$  est aussi annulateur et admet 0 pour racine, que  $f$  soit inversible ou non. En revanche, la situation est plus claire avec le polynôme minimal.

**4.3. Proposition.** *Un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas racine de son polynôme minimal.*

*Démonstration.* Avec la proposition précédente, il suffit d'étudier le sens direct. Supposons que  $f$  est inversible et que 0 est racine du polynôme minimal  $\mu_f$  de  $f$ , c'est-à-dire  $\mu_f = XP$ . On en déduit  $f \circ P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$  ; or,  $f$  inversible et par conséquent  $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , ce qui contredit la minimalité de  $\mu_f$ . Par conséquent, 0 n'est pas racine du polynôme minimal.  $\square$

### Calculs de puissances

**4.4. Proposition.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  admettant un polynôme annulateur de degré  $N$ . Alors, pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f^m \in \text{vect}(f^k)_{k \in [0, N-1]}$ .

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  de polynôme annulateur  $P$  de degré  $N$  et  $m \in \mathbb{N}$ . D'après la division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$ , il existe  $(Q_m, R_m) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que

$$X^m = Q_m(X)P(X) + R_m(X),$$

avec  $\deg R_m < \deg P = N$ . Alors, on trouve que  $f^m = R_m(f)$ , d'où le résultat.  $\square$

En fait, on peut aussi utiliser en pratique la démonstration de ce résultat pour obtenir l'expression explicite de  $f^m$  pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ . Il suffit pour cela de savoir obtenir le reste dans une division de polynômes. Détaillons les calculs dans quelques cas particuliers.

**4.5. Exemple.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}$  avec  $a \neq b$  et  $f$  un endomorphisme dont un polynôme annulateur est

$$P(X) = (X - a)(X - b).$$

Déterminons  $f^m$  pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ . Le reste de la division euclidienne de  $X^m$  par  $P$  est un polynôme de degré au plus 1 que nous noterons  $\alpha_m X + \beta_m$ . Reste à déterminer les valeurs des complexes  $\alpha_m$  et  $\beta_m$ . Pour cela, spécifions la relation de division euclidienne en  $a$  et en  $b$  :

$$\begin{cases} a^m &= a \cdot \alpha_m + \beta_m \\ b^m &= b \cdot \alpha_m + \beta_m \end{cases}$$

En conclusion,  $f^m = \frac{a^m - b^m}{a - b} f + \frac{b \cdot a^m - a \cdot b^m}{b - a} \text{Id}_E$ .

**4.6. Remarque.** Plus généralement, la même méthode permet de traiter le cas où  $f$  annule un polynôme scindé à racines simples  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . On a alors, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$f^m = \sum_{k=0}^p \lambda_k^m L_k(f),$$

où  $L_1, \dots, L_p$  désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ .

Lorsque le polynôme annulateur est scindé mais avec des racines multiples, le problème est à peine plus compliqué et se ramène à un problème d'interpolation.

**4.7. Exemple.** Déterminons les puissances d'un endomorphisme  $f$  de polynôme annulateur  $(X - a)^2$ .

Soit  $m$  un entier. Le reste de la division euclidienne de  $X^m$  par  $(X - a)^2$  est un polynôme de degré au plus 1 que nous noterons  $\alpha_m X + \beta_m$ . On a donc :  $X^m = Q(X)(X - a)^2 + \alpha_m X + \beta_m$ . Reste à déterminer les valeurs des complexes  $\alpha_m$  et  $\beta_m$ . Pour cela, nous spécifions cette relation en  $a$  puis dérivons cette relation avant de spécifier en  $a$  (tous les termes où apparaît  $Q$  s'annulent, car  $a$  est racine double de  $(X - a)^2$ ). Nous obtenons :

$$\begin{cases} a^m &= a \cdot \alpha_m + \beta_m \\ m \cdot a^{m-1} &= \alpha_m. \end{cases}$$

En conclusion,  $f^m = m \cdot a^{m-1} f + (1 - m) \cdot a^m \text{Id}_E$ .

## 5. Commentaires et développements

**5.1.** La donnée d'une matrice  $A$  met en évidence le morphisme d'algèbre

$$\Phi_A : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \mapsto P(A) \end{cases}$$

Son noyau, l'idéal  $\ker \Phi_A$ , est non nul, pour des raisons de dimension. Il est engendré par le polynôme minimal  $\mu_A$  ; l'image  $\text{im } \Phi_A = \mathbb{K}[A]$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , dont la dimension se déduit aisément de l'isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbres

$$\overline{\Phi_A} : \mathbb{K}[X]/(\mu_A) \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}[A].$$

Ainsi, la dimension de l'algèbre  $\mathbb{K}[A]$  est égale à celle de l'espace vectoriel quotient  $\mathbb{K}[X]/(\mu_A)$ . C'est donc le degré  $d_A$  du polynôme minimal  $\mu_A$  de la matrice  $A$ . En effet, les vecteurs  $\overline{1}, \overline{X}, \dots, \overline{X^{d_A-1}}$  forment une base de cet espace quotient. Le fait que ces vecteurs soient générateurs provient d'une simple division euclidienne par le polynôme  $\mu_A$  et le fait qu'ils soient libres provient du caractère minimal de  $\mu_A$ .

Cela se traduit au niveau de l'algèbre  $\mathbb{K}[A]$  par le fait que les matrices  $I_n, A, \dots, A^{d_A-1}$  forment une base de l'algèbre des polynômes en  $A$ .

**5.2.** La structure de l'algèbre  $\mathbb{K}[A]$  est donc celle d'un quotient d'un anneau de polynômes en une seule variable. Elle dépend uniquement du polynôme minimal de  $A$ . La structure de ces quotients-là, comme celle des anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , est bien connue et son étude se trouve grandement simplifiée par le théorème des restes chinois, qui montre que cette algèbre est produit d'algèbres locales, c'est-à-dire d'algèbres ayant chacune un idéal maximal unique (et pour une telle algèbre le treillis de leurs idéaux est alors une liane...).

**5.3.** Précisons donc que si le polynôme minimal est une puissance d'un polynôme irréductible, soit  $\mu_A = \pi^m$  avec  $\pi$  irréductible, l'algèbre quotient  $\mathbb{K}[X]/(\mu_A)$ , tout comme l'algèbre  $\mathbb{K}[A]$ , est une algèbre locale et son idéal maximal est l'idéal  $\mathfrak{m} = (\bar{\pi})$  engendré par la classe du polynôme  $\pi$ . La démonstration est calquée sur celle de la mise en évidence des idéaux de l'anneau quotient  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ , où  $p$  est premier<sup>1</sup>.

**5.4.** Comme autre application, remarquons que l'algèbre  $\mathbb{K}[A]$  est réduite (au sens qu'elle n'a d'autres nilpotents que  $0_n$ ) si, et seulement si, le polynôme minimal de  $A$  est sans facteur carré. Quand  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , cela revient à dire que l'algèbre  $\mathbb{K}[A]$  est un produit de corps isomorphes à  $\mathbb{C}$ . On verra une autre démonstration de ce fait ultérieurement (chapitre X) avec la décomposition de Jordan & Dunford.

**5.5.** Nous avons vu que l'algèbre  $\mathbb{K}[A]$  contenait l'inverse de  $A$  si  $A$  est inversible. On verra plus tard que les composantes semi-simple et nilpotente dans la décomposition de Jordan & Dunford de  $A$  sont aussi dans  $\mathbb{K}[A]$ , tout d'ailleurs comme les opérateurs de projection sur les facteurs directs de la décomposition de  $E$  en somme d'espaces caractéristiques. Tout cela pour dire qu'au delà de sa structure elle-même, l'algèbre  $\mathbb{K}[A]$  contient de part ses divers éléments des renseignements précieux.

**5.6.** L'idéal des polynômes annulateurs de  $A$  en le vecteur  $x$  est le noyau de l'application  $\Phi_{A,x} : \mathbb{K}[X] \longrightarrow E$ , qui, à un polynôme  $P$ , associe le vecteur  $P(A)(x)$ . Cette application est une simple application linéaire et, pourtant, son noyau est un idéal! En fait, cette application est  $\mathbb{K}$ -linéaire, mais elle est aussi  $\mathbb{K}[X]$ -linéaire, au sens que  $\Phi_{A,x}(PQ) = P(A)(\Phi_{A,x}(Q))$ . C'est en fait un morphisme de  $\mathbb{K}[X]$ -modules et son noyau est donc un sous- $\mathbb{K}[X]$ -module de  $\mathbb{K}[X]$ , donc un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ .

---

1. Il est bon de savoir en général que les idéaux d'un quotient  $R/\mathfrak{a}$ , où  $\mathfrak{a}$  est un idéal de l'anneau commutatif (unitaire)  $R$ , sont en correspondance bijective avec les idéaux de  $R$  qui contiennent l'idéal  $\mathfrak{a}$  par lequel on a quotienté.



Roger Mansuy & Rached Mneimné

# Algèbre linéaire

## Réduction des endomorphismes

Rédigé à l'attention des étudiants en Licence de mathématiques et des classes préparatoires scientifiques, l'ouvrage est constitué d'un **cours complet**, de **commentaires et développements** et de **120 exercices corrigés**.

Afin d'aborder les différents aspects de la théorie de la réduction, les premiers chapitres détaillent avec soin les objets et concepts de l'algèbre linéaire.

Les chapitres suivants présentent aussi bien les critères pratiques que leurs utilisations théoriques, à l'appui de nombreux exemples.

Cette approche pédagogique offre également une base solide de révision pour tous les candidats qui se préparent aux concours de l'enseignement.

Cette deuxième édition complétée accueille de nouveaux exercices, des exemples plus éclairants et une annexe décrivant efficacement le parallèle entre la réduction des endomorphismes en dimension finie et l'étude des groupes abéliens finis.

### Sommaire

- |                                       |                                                    |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 1. Polynômes d'endomorphismes         | 10. Réduction de Jordan                            |
| 2. Sous-espaces stables               | 11. Réduction de Frobenius                         |
| 3. Commutation                        | 12. Topologie des classes de similitude            |
| 4. Lemme des noyaux                   | 13. Localisation des valeurs propres               |
| 5. Éléments propres, caractéristiques | 14. Application aux chaînes de Markov finies       |
| 6. Endomorphismes cycliques           | Annexe : Parallèle avec les groupes abéliens finis |
| 7. Théorème de Caley & Hamilton       | Notations                                          |
| 8. Diagonalisation                    | Index                                              |
| 9. Trigonalisation                    |                                                    |

Ancien élève de l'ENS Cachan, agrégé de mathématiques, **Roger Mansuy** est professeur de mathématiques en MPSI, et d'informatique en MP\* au lycée Louis le Grand. Membre du jury de l'Agrégation externe de 2012 à 2015, il est l'auteur de plusieurs ouvrages de référence dédiés à l'enseignement supérieur.

Ancien élève de l'ENS Saint-Cloud, agrégé de mathématiques, **Rached Mneimné** est maître de conférences à l'université Paris-7 Denis Diderot. Plusieurs fois membre du jury de l'Agrégation externe, il est également l'auteur de nombreux ouvrages universitaires.

ISBN 978-2-311-40405-0



9 782311 404050

[www.VUIBERT.fr](http://www.VUIBERT.fr)

