

L3M1M2

Algèbre II

ANNEAUX, MODULES
ET ALGÈBRE MULTILINÉAIRE

$$\Lambda(M) = \bigoplus_p \Lambda^p(M)$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ A/I & \xrightarrow{\bar{f}} & B/J \end{array}$$

$$A \longrightarrow S^{-I}A \qquad \mathfrak{b} = \prod_{\mathfrak{p} \in P} \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})}$$

Daniel Guin

ALGÈBRE

Tome 2

ANNEAUX, MODULES ET ALGÈBRE MULTILINÉAIRE

Daniel Guin



17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Illustration de couverture :

Imprimé en France

ISBN : 978-2-7598-1001-7

Tous droits d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

© 2013, **EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf,
91944 Les Ulis Cedex A

TABLE DES MATIÈRES

Avant-Propos	vii
Remerciements	xi
Avertissement	xiii
Partie I Anneaux et modules	1
I Généralités sur les anneaux	3
1 Définitions – Exemples	3
2 Idéaux – Morphismes	8
3 Idéaux maximaux, idéaux premiers	15
4 Produit d’anneaux – Théorème chinois	18
5 Caractéristique – Corps premiers	20
6 Corps des fractions d’un anneau intègre	22
Thèmes de réflexion	29
TR.I.A. Étude de $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$	29
TR.I.B. Localisation et idéaux	31
TR.I.C. Radical, nilradical	32
II Anneaux euclidiens, principaux, factoriels	35
1 Anneaux de polynômes	35
2 Division euclidienne – Anneaux euclidiens	41
3 Anneaux principaux	43
4 Anneaux factoriels	48
5 Divisibilité	52

Thèmes de réflexion	55
TR.II.A. Exemples d'anneaux euclidiens	55
TR.II.B. Un anneau principal non euclidien	56
TR.II.C. Anneaux noethériens	57
TR.II.D. Séries formelles – Séries et polynômes de Laurent	58
III Irréductibilité des polynômes – Polynômes symétriques	61
1 Irréductibilité	61
2 Fonctions polynomiales – Racines – Dérivations – Multiplicité . . .	66
3 Résultant – Discriminant	74
4 Polynômes symétriques	77
Thèmes de réflexion	83
TR.III.A. Critère d'irréductibilité par extension	83
TR.III.B. Critère d'irréductibilité par réduction	83
IV Généralités sur les modules	87
1 Modules – Morphismes	87
2 Sous-modules	90
3 Modules quotients	91
4 Morphismes et quotients	92
5 Modules monogènes	94
6 Produit et somme	95
7 Modules libres	96
Thèmes de réflexion	101
TR.IV.A. Propriétés universelles de somme directe et produit direct	101
TR.IV.B. Algèbres – Algèbres de polynômes	102
V Modules sur un anneau principal	105
1 Modules libres – Modules de type fini	105
2 Modules de torsion	107
3 Structure des modules de type fini sur un anneau principal	109
4 Autre démonstration du théorème de structure des modules de type fini sur un anneau principal	118
Thèmes de réflexion	125
TR.V.A. Réduction des endomorphismes à la forme de Jordan . . .	125
TR.V.B. Calcul des facteurs invariants	127

VI	Éléments entiers et anneaux de Dedekind	129
1	Éléments entiers	130
2	Norme et trace	134
3	Application aux corps cyclotomiques	138
4	Anneaux et modules noethériens	140
5	Idéaux fractionnaires	143
6	Anneaux de Dedekind	144
7	Norme d'un idéal	148
8	Décomposition des idéaux premiers dans une extension et action du groupe de Galois	150
9	Ramification	153
	Thèmes de réflexion	161
TR.VI.A.	Quelques propriétés des anneaux de Dedekind	161
TR.VI.B.	Ramification des nombres premiers dans un corps cyclotomique	162
TR.VI.C.	Décomposition des nombres premiers dans un corps quadratique	163
TR.VI.D.	Théorème des deux carrés	165
VII	Dualité	167
1	Modules d'applications linéaires et suites exactes	167
2	Dualité	171
3	Orthogonalité	175
	Thèmes de réflexion	177
TR.VII.A.	Modules injectifs – Modules projectifs	177
TR.VII.B.	Enveloppe injective	180
TR.VII.C.	Une autre dualité	182
Partie II	Algèbre multilinéaire	185
VIII	Produit tensoriel – Algèbre tensorielle – Algèbre symétrique	187
1	Applications bilinéaires	187
2	Produit tensoriel	189
3	Commutation du produit tensoriel aux sommes directes	193
4	Associativité du produit tensoriel	196
5	Changement d'anneau de base	198
6	Produit tensoriel d'algèbres associatives	199

7	Produit tensoriel et dualité	200
8	Algèbre tensorielle	203
9	Algèbre symétrique	206
Thèmes de réflexion		209
TR.VIII.A.	Modules plats, fidèlement plats	209
TR.VIII.B.	Passage du local au global	211
TR.VIII.C.	Propriété universelle du produit tensoriel d'algèbres commutatives	211
IX	Produit extérieur – Algèbre extérieure	213
1	Applications multilinéaires alternées	213
2	Déterminants	215
3	Produit extérieur	217
4	Commutation du produit extérieur aux sommes directes	221
5	Algèbre extérieure	223
Thèmes de réflexion		225
TR.IX.A.	Annulation de puissances extérieures	225
TR.IX.B.	Dérivations et formes différentielles	225
Appendice		229
1	Ensembles ordonnés	229
2	Cardinaux – Ensembles infinis	232
Bibliographie		239
Index terminologique		241

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage fait suite à celui intitulé « Algèbre I » (écrit en collaboration avec Thomas Hausberger) dont je reprends ici une partie de l'avant-propos.

La très longue histoire de l'étude des nombres, puis des équations, a permis de remarquer des analogies entre certaines propriétés vérifiées par des objets mathématiques de natures différentes, par exemple les nombres et les polynômes. Cela a conduit les mathématiciens, en particulier au XIX^e siècle, à tenter de dégager une axiomatique qui rende compte des raisons profondes de ces analogies. Il est alors apparu que ces objets, de natures différentes, possédaient les mêmes *structures algébriques*, par exemple groupe, espace vectoriel, anneau, etc.

Il devint évident qu'il était plus efficace d'étudier ces structures pour elles-mêmes, indépendamment de leurs réalisations concrètes, puis d'appliquer les résultats obtenus dans les divers domaines que l'on considérerait antérieurement.

L'algèbre abstraite était née.

C'est l'étude des équations algébriques qui est à l'origine de la création et du développement de l'algèbre, dont le nom provient du titre d'un traité d'Al-Khowarizmi. D'abord exclusivement dévolue au calcul, à l'introduction des outils (nombres négatifs, extraction de racines, nombres complexes) et à l'élaboration des règles d'utilisation de ces objets, l'algèbre a évolué vers ce qu'elle est maintenant, l'étude des structures.

L'étude des nombres entiers remonte à la plus Haute Antiquité, mais c'est l'étude des *nombres algébriques*, au XIX^e siècle, qui a conduit aux notions d'*anneau* et de *corps*.

L'étude de la divisibilité dans les nombres entiers est basée sur la propriété fondamentale suivante : tout nombre entier s'écrit, de manière unique, comme produit de nombres premiers. Comme pour toutes les structures algébriques importantes, la structure d'anneau apparaît dans de nombreuses situations dans lesquelles les éléments ne sont plus des nombres entiers. C'est en particulier le

cas des polynômes. Il est donc utile, en étudiant la notion de divisibilité dans des anneaux généraux, de voir si l'analogue de la décomposition en produit de nombres premiers existe : on l'appelle alors décomposition en produit d'éléments irréductibles. Cela conduit à la notion d'anneau **factoriel** qui généralise les notions d'anneau **euclidien** ou **principal** (chapitre II). On étudie ensuite cette décomposition dans le cas des anneaux de polynômes (chapitre III).

L'idée essentielle a été l'introduction de la notion d'idéal : celle-ci permet de généraliser des énoncés portant sur les propriétés usuelles de la divisibilité des nombres entiers. En particulier, la généralisation aux idéaux de la propriété de décomposition en produit d'irréductibles, associée à la notion d'extension de corps, a permis de faire de très grands progrès en arithmétique, notamment avec l'étude des anneaux de **Dedekind** (chapitre VI).

La structure d'espace vectoriel (sur un corps), qui est l'une des plus fécondes des mathématiques, a des applications très nombreuses, non seulement en mathématique, mais également en physique, chimie, biologie et sciences humaines. C'est la raison pour laquelle l'**algèbre linéaire** est un domaine fondamental et son étude cruciale.

Si l'on remplace le corps de base par un anneau, la définition de la structure d'espace vectoriel garde tout son sens et, pour la différencier de la notion précédente, on parle de structure de **module** (sur un anneau) (chapitre IV). Cette structure de module possède beaucoup de propriétés des espaces vectoriels, mais elle est plus subtile et certains résultats fondamentaux des espaces vectoriels ne sont plus valables : par exemple, un module ne possède pas nécessairement une base. Néanmoins, cette structure algébrique est d'une grande richesse – en particulier si l'anneau de base est principal (chapitre V) et relativement à la **dualité** (chapitre VII) – et intervient naturellement dans de nombreux contextes mathématiques ou autres.

On sait que les **applications linéaires** sont au cœur de l'algèbre linéaire, mais de nombreux problèmes font apparaître des applications de plusieurs variables, linéaires en chaque variable, les applications **multilinéaires**. Pour en simplifier l'étude, l'on se ramène à des applications linéaires en utilisant le **produit tensoriel** (chapitre VIII) ou le **produit extérieur** (chapitre IX). Cela conduit aux notions d'**algèbre tensorielle** ou **algèbre extérieure**, qui sont des outils très puissants en algèbre et géométrie.

Comme dans le cas des groupes, la structure d'anneau a donné naissance à une approche algébrique de la géométrie, en particulier des courbes et des surfaces : la géométrie algébrique. Cette démarche « algébrique » a été également appliquée, de manière très efficace, en analyse – groupes topologiques, espaces vectoriels normés, algèbres de Banach.

Par le programme couvert, ces deux ouvrages Algèbre I – Groupes, Corps et Théorie de Galois et Algèbre II – Anneaux, Modules et Algèbre Multilinéaire s'adressent aux étudiants de L3 et master et leur contenu fait partie de la culture normale d'un candidat à l'agrégation de mathématiques.

This page intentionally left blank

REMERCIEMENTS

Ce texte doit beaucoup à la relecture de Jean-Michel Oudom. Il a résolu tous les exercices et TR, ce qui a conduit, dans bien des cas, à une amélioration notable de leurs énoncés.

Qu'il trouve ici l'expression de mon amicale reconnaissance.

This page intentionally left blank

AVERTISSEMENT

Depuis plusieurs années, l'enseignement de l'algèbre en L1–L2 se limite généralement à l'algèbre linéaire. Cet ouvrage, en deux volumes, donne une présentation des thèmes d'un enseignement d'algèbre générale – groupes, anneaux, corps – et donne une introduction à l'algèbre multilinéaire, sans connaissance préalable nécessaire de ces domaines. On s'est volontairement limité à un exposé simple des concepts fondamentaux qui trouvent leurs places dans un enseignement de L3 et M1.

Chaque chapitre comporte, dans le cours du texte, des exemples et des exercices qui illustrent les notions développées, au fur et à mesure qu'elles apparaissent. Les exercices signalés par le symbole ¶ sont plus difficiles que les autres.

À la fin de chacun des chapitres, on trouvera des thèmes de réflexion (TR) (et des travaux pratiques (TP) pour « *Algèbre I* »).

Les TR se présentent sous forme de questions, dont l'énoncé contient la réponse, qui guident le lecteur dans l'étude d'un objet ou d'une notion particulière – illustration, complément ou approfondissement du cours. Ils sont de trois types :

- ceux qui sont signalés par le symbole ♥ doivent être considérés comme du cours et doivent être étudiés comme tel. Ils sont utilisés sans rappel dans les chapitres suivants ;
- ceux qui sont signalés par le symbole ♣ sont des problèmes d'application qui utilisent des notions développées dans le chapitre concerné ou dans ceux qui précèdent ;
- ceux qui sont signalés par le symbole ♠ sont des approfondissements plutôt destinés aux étudiants préparant l'agrégation.

Certains de ces TR sont repris dans plusieurs chapitres : on peut ainsi constater comment l'enrichissement de la théorie permet d'étudier, de façon de plus en plus fine, un même objet.

Les exercices et les TR de ce tome 2 représentent près de 300 questions, dont la résolution permettra au lecteur d'acquérir une bonne maîtrise des concepts de base concernant les anneaux (euclidiens, principaux, factoriels, de Dedekind), l'arithmétique (éléments entiers), les modules et l'algèbre multilinéaire.

Les démonstrations intègrent de fréquentes références à des résultats contenus dans ce livre. Celles qui commencent par un chiffre romain, renvoient à un résultat contenu dans le chapitre correspondant à ce chiffre. Les autres renvoient à un résultat contenu dans le chapitre en cours. Le symbole $\diamond$ indique la fin, ou l'absence, d'une démonstration.

Première partie

Anneaux et modules

This page intentionally left blank

I

GÉNÉRALITÉS SUR LES ANNEAUX

1. Définitions – Exemples

Rappelons qu'un groupe est la donnée d'un ensemble non vide G et d'une loi de composition interne

$$G \times G \longrightarrow G$$

$$(x, y) \longmapsto x * y$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z),$
- (ii) $\exists e \in G, \text{ tel que } \forall x \in G, x * e = e * x = x,$
- (iii) $\forall x \in G, \exists \bar{x} \in G \text{ tel que } x * \bar{x} = \bar{x} * x = e.$

Si, de plus, la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall (x, y) \in G \times G, x * y = y * x,$$

le groupe G est dit commutatif ou abélien.

Définitions 1.1.

a) Un **anneau** est la donnée d'un ensemble non vide A et de deux lois de composition interne, notées $+$ et $\cdot$ (appelées respectivement addition et multiplication), telles que :

- (i) $(A, +)$ est un groupe abélien (on notera 0 son élément neutre),
- (ii) $\forall (a, b, c) \in A \times A \times A, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$
- (iii) $\exists 1 \in A, \forall a \in A \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a,$
- (iv) $\forall (a, b, c) \in A \times A \times A, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{et} \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$

CHAPITRE I. GÉNÉRALITÉS SUR LES ANNEAUX

Si, de plus, la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall (a, b) \in A \times A, a.b = b.a,$$

l'anneau A est dit **commutatif**.

b) Un **corps** est un anneau A non réduit à $\{0\}$ tel que $(A \setminus \{0\}, .)$ soit un groupe.

La propriété (ii) est l'**associativité** de la multiplication ; l'élément 1, dont l'existence est assurée par la propriété (iii), est l'élément neutre de la multiplication et est appelé l'**unité** de l'anneau A ; la propriété (iv) est la **distributivité** de la multiplication par rapport à l'addition.

Remarques 1.2.

a) Dans un anneau A , on a les relations

$$\forall a \in A, 0.a = a.0 = 0 \quad \text{et} \quad (-1).a = -a.$$

En effet, on a

$$0.a + a = (0 + 1).a = 1.a = a, \quad \text{d'où} \quad 0.a = 0,$$

et de même pour $a.0 = 0$. De plus,

$$(-1).a + a = (-1).a + 1.a = (-1 + 1).a = 0.a = 0, \quad \text{d'où} \quad (-1).a = -a.$$

b) Si $1 = 0$, alors A est réduit à $\{0\}$, car on a alors

$$\forall a \in A, \quad a = 1.a = 0.a = 0.$$

c) De la même manière que ci-dessus, on a

$$\forall (a, b) \in A \times A, \quad -(a.b) = (-a).b = a.(-b) \quad \text{et} \quad (-a).(-b) = a.b.$$

Dans la suite, on notera la multiplication dans A par ab , en omettant le point. Bien entendu, les mots « addition » et « multiplication » sont des noms donnés aux opérations définissant la structure d'anneau et ne correspondent pas forcément aux opérations que l'on désigne usuellement par ces termes, cf. E1.2 ci-après.

Exemples 1.3.

a) L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, muni de l'addition et de la multiplication usuelles, est un anneau commutatif.

b) Les ensembles $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, $\mathbb{R}$ des nombres réels et $\mathbb{C}$ des nombres complexes, munis des opérations usuelles, sont des corps.

c) L'ensemble $M_n(k)$ des matrices (n, n) à coefficients dans un anneau commutatif k , muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau, non commutatif pour $n \geq 2$.

d) Soit G un groupe abélien (noté additivement), alors $\text{End}(G)$ muni de l'addition et de la composition des morphismes de groupes est un anneau (en général non commutatif).

e) Pour tout entier $n > 0$, le groupe abélien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de la multiplication définie par $cl(p)cl(q) = cl(pq)$ est un anneau commutatif, dont l'unité est $cl(1)$, où $cl(x)$ désigne la classe dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de l'élément x de $\mathbb{Z}$.

f) L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication des polynômes, est un anneau commutatif.

Exercice E1.

1. Soient X un ensemble non vide et A un anneau. On note $\mathcal{F}(X, A)$ l'ensemble des applications de X dans A . Montrer que $\mathcal{F}(X, A)$ muni des opérations définies par

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{F}(X, A), \quad \forall g \in \mathcal{F}(X, A), \quad \forall x \in X, \quad (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ \forall f \in \mathcal{F}(X, A), \quad \forall g \in \mathcal{F}(X, A), \quad \forall x \in X, \quad (fg)(x) &= f(x)g(x) \end{aligned}$$

est un anneau (commutatif si et seulement si A est commutatif).

2. Soient X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X . Pour deux éléments A et B de $\mathcal{P}(X)$, on pose

$$A \Delta B = (A \cap (X \setminus B)) \cup (B \cap (X \setminus A)),$$

que l'on appelle **différence symétrique** de A et B . Montrer que $\mathcal{P}(X)$ muni des opérations

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{P}(X), \quad \forall B \in \mathcal{P}(X), \quad (A, B) &\mapsto A \Delta B \\ \forall A \in \mathcal{P}(X), \quad \forall B \in \mathcal{P}(X), \quad (A, B) &\mapsto A \cap B \end{aligned}$$

est un anneau commutatif.

critère d'Eisenstein III.1.5

D

Dedekind (anneau) VI.6.1

degré (d'un monôme, d'un polynôme) II.1

degré résiduel VI.9.2

degré total II.1

dénombrable (ensemble) A.2.6

dépendance intégrale (relation) VI.1.2

dérivation III.2.11, TR.IX.B

déterminant IX.2.1

différence symétrique I. exercice E1.2

discriminant III.3.6, VI.9.5, VI.9.7

distributivité I.1.1

diviseur I.2.17

diviseur élémentaire V.3.7

divisible (module) TR.VII.A

E

Eisenstein (critère) III.1.5

élément de torsion V.2.1

élément entier VI.1.2

élément maximal, minimal A.1.3

élémentaire (diviseur) V.3.7

élémentaire (matrice) V.4.1

élémentaire (polynôme symétrique)
III.4.1

éléments orthogonaux VII.3.1

endomorphisme (de modules) IV.1.4

ensemble bien ordonné A.1.13

ensemble dénombrable A.2.6

ensemble inductif A.1.10

ensemble ordonné A.1.1

ensemble totalement ordonné A.1.8

ensembles orthogonaux VII.3.1

entier (anneau) VI.1.5

entier (élément) VI.1.2

enveloppe injective TR.VII.B

équivalentes (matrices) TR.V.B

essentiel (morphisme) TR.VII.B

essentielle (extension) TR.VII.B

étrangers (éléments) II.5.6

étrangers (idéaux) I.4.4

euclidien (algorithme) II.2.2

euclidien (anneau) II.2.2

Euler (fonction) TR.I.A

exacte (suite) VII.1.1

exponentiation de cardinaux A.2.8

extension des scalaires VIII.5.2

extension essentielle TR.VII.B

extérieur (produit) IX.3

extérieure (puissance, algèbre) IX.3,
IX.5.2

F

facteur direct IV.6.3

facteur invariant V.3.7, V.4.1.4, TR.V.B

factoriel (anneau) II.4.1

fermeture intégrale VI.1.5

fidèlement plat (module) TR.VIII.A

fonction d'Euler TR.I.A

fonction polynomiale III.2.1

forme linéaire VII.2.1

formelle (série) TR.II.D

formes différentielles (module des)
TR.IX.B

formule de Taylors III.2.18

fractionnaire (idéal) VI.5.4

fractions (anneaux des) I.6.8

fractions (corps des) I.6

G

Gauss (lemme) III.1.1

générateur (système) IV.7.1

génératrice (famille) IV.7.1

H

homogène (polynôme) II.1.3

hypothèse du continu A.2.17

I

idéal (à gauche, à droite, bilatère) I.2.1

idéal fractionnaire VI.5.4

idéal maximal I.3.8

idéal premier I.3.5

idéal principal II.3.1

idéal propre I.2.8
 idéaux étrangers I.4.4
 indécidable A.2.17
 inductif (ensemble) A.1.10
 injectif (module) TR.VII.A
 injective (enveloppe) TR.VII.B
 intégrale (clôture, fermeture) VI.1.5
 intégrale (dépendance) VI.1.2
 intégralement clos VI.1.8
 intègre (anneau) I.3.1
 invariant (facteur) V.3.7, V.4.1.4,
 TR.V.B
 inverse (à gauche, à droite) I.1.4
 inversible (élément) I.1.6
 irréductible (élément) II.3.8
 isomorphisme (d'anneaux) I.2.10
 isomorphisme (de modules) IV.1.4

J

Jordan (réduite) TR.V.A
 Jordan-Hölder (suite de) TR.VII.C

L

Laurent (polynôme, série) TR.II.D
 libre (famille) IV.7.1
 libre (module) IV.7.1
 Lie (algèbre) TR.IV.A
 linéaire (forme) VII.2.1
 linéairement indépendants (éléments)
 IV.7.1
 local (anneau) TR.I.B
 localisation I.6

M

majorant A.1.7
 matrice élémentaire V.4.1
 matrices équivalentes TR.V.B
 maximal (élément) A.1.3
 maximal (idéal) I.3.8
 minimal (élément) A.1.3
 minorant A.1.7
 module (à gauche, à droite) IV.1.1
 module de torsion V.2.1

module de type fini IV.7.8
 module divisible TR.VII.A
 module dual VII.2.1
 module fidèlement plat TR.VIII.A
 module injectif TR.VII.A
 module monogène IV.5.1
 module noethérien VI.4.2
 module (p -) V.2.4
 module plat TR.VIII.A
 module projectif TR.VII.A
 module semi-simple IV. exercice E3
 module simple IV. exercice E2
 monôme II.1
 morphisme (d'anneaux) I.2.10
 morphisme (de modules) IV.1.4
 morphisme caractéristique I.5.1
 morphisme essentiel TR.VII.B
 morphisme transposé VII.2.1
 multiplicative (partie) I.6.3
 multiplicité (ordre de) III.2.22

N

nilpotent (élément) I. exercice E9.4
 nilradical TR.I.C
 noethérien (anneau, module) TR.II.C,
 VI.4.2
 norme (d'un élément) VI.2.1
 norme (d'un idéal) VI.7.2

O

opposé (anneau) IV.1.2
 ordonné (corps) I. exercice E12
 ordonné (ensemble) A.1.1
 ordonné (ensemble bien) A.1.13
 ordre (relation) A.A.1
 ordre de multiplicité III.2.22
 orthogonaux (éléments, ensembles)
 VII.3.1

P

partie multiplicative I.6.3
 pgcd II.5.1
 plat (module) TR.VIII.A