MOURAD CHOULLI

Analyse complexe

LICENCE 3 MATHÉMATIQUES
ÉCOLES D'INGÉNIEURS

- Cours complet
- Plus de 70 exercices
- Tous les corrigés détaillés

deboeck SUPÉRIEUR

Analyse complexe

Chez le même éditeur (extrait du catalogue)

AEBISCHER B., *Introduction à l'analyse*
AEBISCHER B., *Analyse. Fonctions à plusieurs variables et géométrie analytique*
AEBISCHER B., *Géométrie. Géométrie affine, géométrie euclidienne et introduction à la géométrie projective*
ASLANGUL C., *Des mathématiques pour les sciences. Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes*
BELHAJ S., *Mathématiques pour l'économie et la gestion*
BELHAJ S., BEN AISSA A., *Mathématiques pour l'informatique*
BRIANE M., PAGÈS G., *Analyse. Théorie de l'intégration* – 7e édition
BURG P., *Mathématiques. Les fondamentaux en Licence 1*
CANON É., *Analyse numérique*
CARASSUS L., PAGÈS G., *Finance de marché. Modèles mathématiques à temps discret*
CARTON O., *Langages formels. Calculabilité et complexité*
COMMENGES D., JACQMIN-GADDA H., *Modèles bio statistiques pour l'épidémiologie*
CORTELLA A., *Algèbre. Théorie des groupes*
COTTET-EMARD F., *36 problèmes corrigés pour le CAPES de mathématiques*
COTTET-EMARD F., *Probabilités et tests d'hypothèses*
COTTET-EMARD F., *Algèbre linéaire et bilinéaire*
COTTET-EMARD F., *Analyse*
DANTZER J.-F., *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*
DEPAUW J., *Statistiques*
GIRARDIN V., LIMNIOS N., *Probabilités et introduction à la statistique*
GIRARDIN V., LIMNIOS S N., *Probabilités. Processus stochastiques et applications*
MANSUY R., MNEIMNÉ R., *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*
PAGÈS G., *101 quizz qui banquent. Mathématiques et finances sont-elles indépendantes ?*
ROMBALDI J.-É., *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*
ROMBALDI J.-É., *Exercices et problèmes corrigés pour l'agrégation de mathématiques*
ROMBALDI J.-É., *Leçons d'oral pour l'agrégation de mathématiques. Première épreuve : les exposés*
ROMBALDI J.-É., *Leçons d'oral pour l'agrégation de mathématiques. Seconde épreuve : les exercices*
STOLTZ G., RIVOIRARD V., *Statistique mathématique en action*
WASSEF P., *Algèbre. Arithmétique pour l'informatique*

MOURAD CHOULLI

Analyse complexe

deboeck SUPÉRIEUR

Du même auteur

CHOULLI M., *Analyse fonctionnelle. Équations aux dérivées partielles*

En couverture : Coupe d'un nautile © AdrianHancu/Getty Images
Maquette intérieure : Hervé Soulard/Nexeme
Mise en pages de l'auteur
Maquette de couverture : Primo&Primo
Couverture : SCM, Toulouse

Dépôt légal :
Bibliothèque royale de Belgique : 2020/13647/003
Bibliothèque nationale, Paris : janvier 2020
ISBN : 978-2-8073-2749-8

Table des matières

Avant-propos

J'ai rassemblé dans cet ouvrage l'essentiel de l'analyse complexe couvrant le programme généralement enseigné en dernière année de Licence de mathématiques. Cet ouvrage pourra aussi être utile aux étudiants de la plupart des écoles d'ingénieurs. Les prérequis sont minimaux. Le lecteur devra uniquement connaître les propriétés élémentaires du corps des réels et de l'intégrale de Riemann, et les généralités sur les séries et les intégrales généralisées. Toutefois, j'ai inclus deux appendices à la fin de ce texte qui contiennent les connaissances requises sur les séries et les intégrales généralisées.

Le contenu de cet ouvrage correspond au cours d'analyse complexe que j'enseigne depuis plusieurs années à l'université Paul Verlaine de Metz puis à l'université de Lorraine. Mon cours s'inspire lui-même largement d'un cours polycopié, intitulé U5 et édité par l'université Paul Sabatier de Toulouse. Malheureusement ce cours polycopié ne comporte ni date, ni auteur.

Cet ouvrage est composé de neuf chapitres. Le premier chapitre est consacré à l'introduction des nombres complexes et des différentes notions topologiques qui seront utilisées dans les autres chapitres. Le second chapitre contient les résultats basiques sur les suites et les séries de fonctions. Ces résultats seront bien utiles dans le reste de ce texte. Dans le chapitre trois, je fais le lien entre la différentiabilité et la dérivabilité par rapport à la variable complexe, au moyen des conditions dites de Cauchy-Riemann. Une fonction dérivable par rapport à la variable complexe dans un ouvert est usuellement appelée fonction holomorphe dans cet ouvert. J'introduis ensuite l'intégration sur un chemin et je démontre le théorème fondamental de Cauchy-Goursat. Je débute le chapitre quatre par une étude sur les séries entières et j'établis ensuite que toute fonction holomorphe dans un ouvert coïncide localement avec une série entière. C'est l'une des principales particularités des fonctions holomorphes. Dès qu'une fonction est dérivable par rapport à la variable complexe une fois, alors elle est indéfiniment dérivable par rapport à cette variable. Elle est même analytique, ce qui signifie qu'elle coïncide localement avec une série entière. Une description de l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe est donnée au chapitre cinq. Dans ce même chapitre, je démontre le théorème du module maximum. Dans un sixième chapitre, j'étudie les suites, séries et produits infinis de fonctions holomorphes. Dans le chapitre sept, je démontre qu'une fonction holomorphe dans une couronne est développable en série de Laurent et j'utilise ce développement pour classifier les points singuliers isolés de fonctions holomorphes. Le chapitre huit est dédié au théorème des résidus, son application au calcul d'intégrales et au calcul du nombre de zéros d'une fonction holomorphe dans un domaine donné (théorème de Rouché). Dans un neuvième et dernier chapitre, je présente quelques automorphismes et isomorphismes de domaines. Chaque chapitre se termine avec une liste d'exercices corrigés.

Cet ouvrage constitue seulement une introduction concise à l'analyse complexe. Le lecteur pourra éventuellement enrichir ses connaissances par les quelques références que je donne à la fin de cet ouvrage. Bien entendu, il existe une littérature abondante pour un sujet aussi central avec de multiples applications.

Chapitre 1

Éléments de topologie

1.1 Le corps des complexes

On utilise la notation d'Euler[1] pour le nombre imaginaire unitaire :

$$i^2 = -1.$$

On définit l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ par

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

On munit cet ensemble des opérations

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad \text{si } z_1 = x_1 + iy_1 \text{ et } z_2 = x_2 + iy_2,$$
$$z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad \text{si } z_1 = x_1 + iy_1 \text{ et } z_2 = x_2 + iy_2.$$

Si $z = x + iy \neq 0$ et

$$\tilde{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

alors on vérifie sans peine que $z \times \tilde{z} = \tilde{z} \times z = 1$. Donc z admet un inverse pour le produit $\times$. On notera cet inverse par z^{-1} ou $1/z$. Aussi, pour simplifier les notations, le produit $z_1 \times z_2$ est tout simplement noté z_1z_2.

Il n'est pas difficile de démontrer que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps et que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1.

On appelle $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, un nombre complexe, $x = \Re z$ la partie réelle de z et $y = \Im z$ la partie imaginaire de z.

On associe à chaque nombre complexe $z = x + iy$ son conjugué $\overline{z} = x - iy$. Dans ce cas, on a

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Il sera parfois utile d'utiliser la représentation polaire d'un nombre complexe

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

1. Leonhard Euler, 1707-1783

Quand $z \neq 0$, les couples (x, y) et (r, θ) sont liés par les relations

$$\begin{aligned}
&(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta),\\
&r = \sqrt{x^2 + y^2},\\
&\tan\theta = y/x \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad \theta = \operatorname{sgn}(y)\pi/2 \text{ si } x = 0.
\end{aligned}$$

Ici $\operatorname{sgn}(y)$ désigne le signe de y.

La fonction tan étant 2π-périodique, θ n'est pas déterminé de manière unique, sauf si on se restreint à des valeurs dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. A cette fin, on définit la détermination principale de l'argument, notée arg, par

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0,\\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geqslant 0,\\ \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0, \end{cases}$$

et $\arg z = \operatorname{sgn}(y)\pi/2$ si $x = 0$.

On rappelle que la fonction $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ désigne la bijection réciproque de $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$.

Si $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$, on observe que $z \in \mathbb{C}_0 \to \arg z$ est une fonction continue.

On appelle $r = |z|$ le module de z et, pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Il est aisé de vérifier que l'on a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
&|z|^2 = x^2 + y^2 = z\overline{z},\\
&z = |z|e^{i\arg z + 2ik\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Pour $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, on a, d'après la définition du produit de deux nombres complexes,

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2).$$

Or, d'après les formules trigonométriques usuelles,

$$\begin{aligned}
\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 &= \cos(\theta_1 + \theta_2),\\
\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 &= \sin(\theta_1 + \theta_2).
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

et par récurrence, par rapport à $n \geqslant 1$ entier, on conclut que

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}\ldots e^{i\theta_n} = e^{i(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)}, \quad \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}.$$

En particulier,

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R},\ n \geqslant 1 \text{ entier}.$$

Maintenant, puisque $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est 2π-périodique, l'équation

$$w^n = z, \tag{1.1}$$

s'écrit

$$w^n = |z|e^{i(\arg z + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquence, (1.1) admet n solutions

$$w_k = |z|^{1/n} e^{i(\arg z + 2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1 \ldots, n-1.$$

1.2 Topologie de $\mathbb{C}$

On commence par noter que l'application

$$z \in \mathbb{C} \mapsto |z| \in [0, +\infty)$$

définit une norme sur $\mathbb{C}$, considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel. En effet, on peut vérifier sans peine que cette application possède les propriétés d'une norme :

$$\begin{aligned}
&|z| = 0 \text{ si et seulement si } z = 0,\\
&|\lambda z| = |\lambda||z| \quad \text{si } z \in \mathbb{C} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \lambda \in \mathbb{C},\\
&|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad \text{si } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On définit respectivement les disques ouvert et fermé de centre z_0 et de rayon r par

$$\begin{aligned}
D(z_0, r) &= \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < r\},\\
\overline{D}(z_0, r) &= \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| \leqslant r\}.
\end{aligned}$$

Il sera commode dans le reste de ce texte de noter le disque unité ouvert (resp. fermé) $D(0,1)$ (resp. $\overline{D}(0,1)$) par $\mathbb{D}$ (resp. $\overline{\mathbb{D}}$).

Une partie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$ est dite ouverte si $\mathcal{O}$ ne peut contenir l'un de ses points sans contenir tout un disque de rayon > 0 autour de ce point : pour tout $z_0 \in \mathcal{O}$, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \mathcal{O}$.

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Si $z_1 \in D(z_0, r)$ alors $r_1 = r - |z_1 - z_0| > 0$ et, pour $w \in D(z_1, r_1)$, on a

$$|w - z_0| \leqslant |w - z_1| + |z_1 - z_0| < r_1 + |z_1 - z_0| = r.$$

D'où $D(z_1, r_1) \subset D(z_0, r_0)$. On vient donc de montrer qu'un disque ouvert est une partie ouverte.

De la même manière, on démontre que

$${}^{\mathrm{e}}D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| > r\}$$

est une partie ouverte.

L'ensemble de toutes les parties ouvertes de $\mathbb{C}$, noté $\mathscr{T}$, est appelé la topologie de $\mathbb{C}$ induite par la norme $|\cdot|$. Elle vérifie donc les propriétés habituelles d'une topologie :

- $\varnothing \in \mathscr{T}$ et $\mathbb{C} \in \mathscr{T}$,
- stabilité par réunion quelconque : si $(\mathcal{O}_j)_{j\in J}$ est une famille quelconque de $\mathscr{T}$ alors $\bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j \in \mathscr{T}$,
- stabilité par intersection finie : si $(\mathcal{O}_j)_{j\in K}$ est une famille finie de $\mathscr{T}$ alors $\bigcap_{j\in K} \mathcal{O}_j \in \mathscr{T}$.

Une partie $\mathcal{F}$ sera dite fermée, si son complémetaire $\mathcal{F}^c = \mathbb{C}\backslash\mathcal{F}$, est une partie ouverte.

D'après ce qui précède, une intersection quelconque de parties fermées est une partie fermée et une réunion finie de parties fermées est fermée. Les parties $\varnothing$ et $\mathbb{C}$ sont à fois ouvertes et fermées.

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On a vu plus haut que ${}^{\mathrm{e}}D(z_0, r)$ est une partie ouverte. Donc $\overline{D}(z_0, r) = [{}^{\mathrm{e}}D(z_0, r)]^c$ est une partie fermée. En d'autres termes, les disques fermés sont des parties fermées.

Soit A une partie de $\mathbb{C}$. L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$, est la plus grande partie ouverte contenue dans A. C'est donc la réunion de toutes les parties ouvertes contenues dans A. On définit de même la fermeture ou l'adhérence de A, qu'on note $\overline{A}$, comme étant la plus petite partie fermée contenant A. En d'autres termes, $\overline{A}$ est l'intersection de de toutes les parties fermées contenant A.

On observe que, d'après les définitions,

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A},$$

A est ouverte si et seulement si $A = \mathring{A}$ et A est fermée si et seulement si $A = \overline{A}$.

Aussi, on remarque que $\mathring{A}$ peut être vide sans que A le soit. Pour le voir, il suffit de prendre $A = \{z\}$, où z est un point quelconque de $\mathbb{C}$. Dans ce cas il est aisé de voir que $\overset{\circ}{\widehat{\{z\}}} = \varnothing$.

Partant du fait qu'une partie ouverte est contenue dans A si et seulement si son complémentaire, qui est une partie fermée, contient A^c, on conclut que

$$\mathring{A}^c = \overline{A^c}, \quad \overline{A}^c = \overset{\circ}{\widehat{A^c}}.$$

La frontière d'une partie A de $\mathbb{C}$, notée ∂A, est définie par

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

On introduit à présent la notion de suite convergente. Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$. On dit que la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ converge dans $\mathbb{C}$ vers un élément $z \in \mathbb{C}$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_0, dépendant de ϵ, tel que $z_n \in D(z, \epsilon)$ pour tout $n \geqslant n_0$. On écrit $z = \lim_{n\to+\infty} z_n$.

Lemme 1.1. *Soit $A \subset \mathbb{C}$. Alors $z \in \overline{A}$ si et seulement si z est limite d'une suite d'éléments de A.*

Preuve. Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $z \in \mathbb{C}$. Si $z \notin \overline{A}$ alors $z \in \overset{\circ}{\widehat{A^c}}$. D'où, il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset A^c$. Par conséquence, on trouve un entier n_0, dépendant de r, tel que $z_n \in D(z,r)$ pour tout $n \geqslant n_0$. En particulier, $z_n \in A^c$ pour tout $n \geqslant n_0$, ce qui entraine une contradiction.

Inversement, on affirme que si $z \in \overline{A}\backslash A$ alors tout disque de rayon non nul rencontre A. Car sinon, il existerait $r > 0$ tel que $D(z,r) \subset A^c$ et donc $z \in \overset{\circ}{\widehat{A^c}} = \overline{A}^c$, ce qui est impossible. Il en résulte que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe $z_n \in A$ tel que $|z - z_n| < 1/n$. On a ainsi construit une suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ de A telle que $z = \lim_{n\to+\infty} z_n$. Finalement, pour $z \in A$, la suite constante égale à z convient. □

Si A est une partie quelconque de $\mathbb{C}$, la topologie sur $\mathbb{C}$ induit une topologie sur A dont la famille des ouverts est donnée par

$$\mathscr{T}_A = \{\mathcal{O} \cap A;\ \mathcal{O} \in \mathscr{T}\}.$$

1.3 Continuité des fonctions de la variable complexe

Soient A une partie de $\mathbb{C}$ et $f : A \to \mathbb{C}$. On dit que f est continue en $z_0 \in \mathbb{C}$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, qui peut dépendre de z_0 et ϵ, tel que

$$f(z) \in D(f(z_0),\epsilon) \quad \text{si } z \in D(z_0,\eta) \cap A$$

ou de façon équivalente

$$f^{-1}(D(f(z_0),\epsilon)) \supset D(z_0,\eta) \cap A.$$

Si f est continue en tout point de A, on dira tout simplement que f est continue.

Théorème 1.1. *Soient A une partie de $\mathbb{C}$ et $f : A \to \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) f est continue.
(ii) Pour tout $\mathcal{O} \in \mathscr{T}$, on a $f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathscr{T}_A$.
(iii) Pour tous $z \in A$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$ suite de A telle que $z = \lim_{n\to+\infty} z_n$, on a $(f(z_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(z)$.

Preuve. ▪ (i) implique (ii) : soit $\mathcal{O} \in \mathscr{T}$ et $z_0 \in f^{-1}(\mathcal{O})$. Puisque f est continue en z_0, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(\epsilon) > 0$ tel que

$$f^{-1}(D(f(z_0),\epsilon)) \supset D(z_0,\eta) \cap A.$$

Mais puisque $\mathcal{O}$ est une partie ouverte, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $D(f(z_0),\epsilon_0) \subset \mathcal{O}$ et par suite

$$f^{-1}(\mathcal{O}) \supset f^{-1}(D(f(z_0),\epsilon_0)) \supset D(z_0,\eta_0) \cap A, \quad \text{avec } \eta_0 = \eta(\epsilon_0).$$

▪ (ii) implique (i) : il suffit de prendre $\mathcal{O} = D(f(z_0),\epsilon)$, avec $z_0 \in A$ et $\epsilon > 0$ arbitraire. En effet, puisque $f^{-1}(D(f(z_0),\epsilon)) \in \mathscr{T}_A$, il existe $\mathcal{U}$ une partie ouverte de $\mathbb{C}$ contenant z_0 telle que

$$f^{-1}(D(f(z_0),\epsilon_0)) \supset \mathcal{U} \cap A.$$

Comme $\mathcal{U} \in \mathscr{T}$, il existe $\eta > 0$ tel que $D(z_0, \eta) \subset \mathcal{U}$. Il en résulte que

$$f^{-1}(D(f(z_0), \epsilon_0)) \supset D(z_0, \eta) \cap A.$$

▪ (i) implique (iii) : soient $z \in A$ et $(z_n)_{n \geqslant 0}$ suite de A telle que $z = \lim_{n \to +\infty} z_n$. Pour $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$f(w) \in D(f(z), \epsilon) \quad \text{si } w \in D(z, \eta) \cap A.$$

Mais il existe un entier n_0, dépendant de ϵ, tel que $|z - z_n| < \eta$ pour tout $n \geqslant n_0$. Et donc

$$|f(z_n) - f(z)| < \epsilon, \quad \text{pour tout } n \geqslant n_0,$$

ce qui revient à dire que $f(z) = \lim_{n \to +\infty} f(z_n)$.
▪ (iii) implique (i) : sinon, on trouverait $z_0 \in A$ et $\epsilon > 0$ tels que, pour tout $\eta > 0$, il existerait $z \in D(z_0, \eta) \cap A$ et $|f(z) - f(z_0)| > \epsilon$. En particulier, en prenant $\eta = 1/n$, $n \geqslant 1$ entier, il existerait une suite $(z_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de A qui convergerait vers z_0 telle que $|f(z_n) - f(z_0)| > \epsilon$, pour tout $n \geqslant 1$, ce qui contredirait (iii). □

Remarque 1.1. Soit $\mathcal{F}$ est une partie fermé de $\mathbb{C}$. Puisque $f^{-1}(\mathcal{F}^c) = [f^{-1}(\mathcal{F})]^c$, on conclut que l'assertion (ii) dans le Théorème 1.1 est équivalente à la suivante :
(iv) Pour tout fermé $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}$, on a $f^{-1}(\mathcal{F})$ est un fermé de A.

Si A est une partie quelconque, on définit la distance d'un point $z \in \mathbb{C}$ à A, notée $d(z, A)$, comme suit :

$$d(z, A) = \inf\{|z - w|;\ w \in A\}.$$

Lemme 1.2. *On a, pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,*

$$|d(z_1, A) - d(z_2, A)| \leqslant |z_1 - z_2|,$$

ce qui entraine que l'application $d(\cdot, A) : z \in \mathbb{C} \mapsto d(z, A) \in \mathbb{R}_+$ est continue.

Preuve. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. D'après l'inégalité triangulaire, il est clair que, pour tout $w \in A$, on a

$$d(z_1, A) \leqslant |z_1 - w| \leqslant |z_1 - z_2| + |w - z_2|.$$

Par conséquence,

$$d(z_1, A) \leqslant |z_1 - z_2| + d(z_2, A). \tag{1.2}$$

En intervertissant les rôles de z_1 et z_2, on voit qu'on a aussi

$$d(z_2, A) \leqslant |z_1 - z_2| + d(z_1, A). \tag{1.3}$$

Le résultat recherché s'ensuit comme conséquence de (1.2) et (1.3). □

Lemme 1.3. *Soient A une partie quelconque de $\mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. Alors $d(z, A) = 0$ si et seulement si $z \in \overline{A}$.*

Preuve. ▪ Si $d(z, A) = 0$ alors, par définition, pour tout $n \geqslant 1$ entier, il existe $z_n \in A$ tel que $|z - z_n| < 1/n$. Il en résulte que $(z_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de A qui converge vers z. Par suite, $z \in \overline{A}$ par le Lemme 1.1.

▪ Inversement, toujours d'après le Lemme 1.1, si $z \in \overline{A}$ alors z est limite d'une suite $(z_n)_{n \geqslant 0}$ de A. D'où

$$d(z, A) \leqslant |z - z_n| \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty,$$

entrainant $d(z, A) = 0$. □

On rappelle qu'un isomorphisme isométrique entre deux espaces vectoriels (sur le même corps) normés, de même dimension finie, est une bijection linéaire qui conserve les normes. On note qu'avec cette définition, un isomorphisme isométrique est continue, ainsi que son inverse, puisqu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés de dimension finie est automatiquement continue.

Identifier $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ sera parfois bien utile dans la suite. Cette identification est possible via l'isomorphisme isométrique suivant

$$\mathcal{I} : (\mathbb{C}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}^2, |\cdot|_2) : z \mapsto (\Re z, \Im z),$$

où $|\cdot|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Cet isomorphisme isométrique permet de voir que la topologie induite par la norme $|\cdot|_2$ sur $\mathbb{R}^2$ est exactement $\mathscr{T}$, ce qui permet d'identifier les parties ouvertes de $\mathbb{C}$ avec celles de $\mathbb{R}^2$.

1.4 Parties compactes

Soit K une partie de $\mathbb{C}$. On dit que K est une partie compacte si toute suite d'éléments de K admet une sous-suite convergente vers un élément de K. Et donc un compact est nécessairement fermée et bornée.

On rappelle que, d'après le théorème de Bolzano [2]-Weierstrass [3], toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente. Il en résulte que toute partie fermée et bornée de $\mathbb{C}$ est compacte. Donc les compacts de $\mathbb{C}$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{C}$.

Théorème 1.2. *Soient K un compact de $\mathbb{C}$ et $f : K \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe $z_-, z_+ \in K$ tels que*

$$f(z_-) = \min\{f(z);\ z \in K\}, \quad f(z_+) = \max\{f(z);\ z \in K\}.$$

Preuve. Puisque $\min\{-f(z);\ z \in K\} = -\max\{f(z);\ z \in K\}$, il suffira de montrer l'existence de z_-. On suppose $-\infty < m$ et on pose alors

$$m = \inf\{f(z);\ z \in K\}.$$

2. Bernard Bolzano, 1781-1848
3. Karl Weiestrass, 1815-1897

Pour chaque $n \geqslant 1$, soit $z_n \in K$ telle que $f(z_n) \leqslant m + 1/n$. Comme K est compact, il existe $(z_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ sous-suite de (z_n) qui converge vers $z_- \in K$. Maintenant f étant continue, on conclut que

$$f(z_-) = \lim_{n\to+\infty} f(z_{\varphi(n)}) \leqslant \lim_{n\to+\infty} (m + 1/\varphi(n)) = m.$$

Pour terminer la preuve, on doit montrer que l'on ne peut pas avoir $m = -\infty$. En effet, si on avait $m = -\infty$, alors on aurait, pour tout $n \geqslant 1$, l'existence d'un $z_n \in K$ tel que $f(z_n) \leqslant -n$. De nouveau la compacité de K permettrait d'affirmer l'existence de $(z_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$, sous-suite de (z_n), qui convergerait vers $\tilde{z} \in K$. Donc $f(z_{\varphi(n)})$ convergerait vers $f(\tilde{z})$, ce qui contredirait

$$f(z_{\varphi(n)}) \leqslant -\varphi(n) \to -\infty \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

D'où le résultat. □

Proposition 1.1. *Soient K une partie compacte de $\mathbb{C}$ et $f : K \to \mathbb{C}$ continue. Alors $f(K)$ est aussi une partie compacte de $\mathbb{C}$.*

Preuve. Soit $(w_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $f(K)$. Pour chaque n, $w_n = f(z_n)$, où $(z_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de K. Puisque K est compacte, la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ admet une sous-suite $(z_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge vers $z \in K$. On utilise alors la continuité de f pour conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} w_{\varphi(n)} = \lim_{n\to+\infty} f(z_{\varphi(n)}) = f(z) = w \in f(K),$$

ce qui termine la preuve. □

Si K est une partie compacte de $\mathbb{C}$, on utilise dans le reste de ce texte la notation $C(K)$ pour désigner l'ensemble des fonctions continues définies sur K et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Il est aisé de voir que $C(K)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies sur K et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

D'après le Théorème 1.2, $f(K)$ est borné si $f \in C(K)$. On peut donc définir sur $C(K)$ l'application

$$f \mapsto \|f\|_{C(K)} = \max_{z\in K} |f(z)| \in \mathbb{R}_+.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que cette application est une norme sur $C(K)$.

1.5 Parties connexes

Soit A une partie de $\mathbb{C}$. On dit que A est connexe s'il n'existe pas $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}_A$ non vides telles que $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing$ et $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = A$. Ou, de façon équivalente, s'il n'existe pas deux parties fermées, dans A, non vides F_1 et F_2 telles que $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ et $F_1 \cup F_2 = A$. Ou encore que A est connexe si les seules parties de A qui soient à la fois ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et A lui même.

Dans le reste de ce texte, un domaine désigne un ouvert connexe.

Analyse complexe

Cet ouvrage couvre l'ensemble du programme d'Analyse complexe enseigné en 3e année de Licence mathématiques ainsi qu'en première année des écoles d'ingénieur. Il pourra être également utile aux candidats au Capes de mathématiques.

Les prérequis sont minimaux : propriétés élémentaires du corps des réels et de l'intégrale de Riemann, généralités sur les séries et intégrales généralisées. Chaque chapitre accueille une série d'exercices intégralement corrigés. Deux appendices – ajoutés en fin d'ouvrage – contiennent les connaissances requises en matière de séries numériques et d'intégrales généralisées.

LES PLUS

- **Toutes les démonstrations sont rédigées de façon claire et détaillée**
- **Les exercices et problèmes sont intégralement corrigés**
- **Deux appendices sur les séries numériques et les intégrales généralisées**

Mourad Choulli est professeur à l'université de Lorraine. Il est spécialisé dans l'étude des équations aux dérivées partielles, spécialement dans l'analyse mathématique des problèmes inverses. Il a une très longue expérience d'enseignement en licence et master de mathématiques.

Conception graphique : Primo&Primo®

ISBN : 978-2-8073-2749-8

9 782807 327498

deboeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com