

# Sommaire

|                                        |     |                                            |     |
|----------------------------------------|-----|--------------------------------------------|-----|
| Notations                              | 22  | <b>IV Théorèmes limites</b>                |     |
| Introduction                           | 24  |                                            |     |
| <b>I Introduction heuristique</b>      |     | 20 Convergences                            | 409 |
| 1 Probabilités (heuristique)           | 31  | 21 Loi des grands nombres                  | 445 |
| 2 Variable aléatoire (heuristique)     | 57  | 22 Le théorème central limite              | 471 |
|                                        |     | 23 Techniques d'approximations             | 481 |
|                                        |     | 24 Espérance conditionnelle                | 503 |
| <b>II Théorie et Pratique</b>          |     | <b>V Quelques applications</b>             |     |
| 3 Espaces probabilisé                  | 79  | 25 Résultats élégamment établis...         | 529 |
| 4 Conditionnement                      | 103 | 26 Simuler informatiquement une loi        | 545 |
| 5 Indépendance (1/2)                   | 113 | 27 Méthodes de Monte-Carlo                 | 567 |
| 6 Variables aléatoires discrètes       | 129 | 28 Chaînes de Markov                       | 585 |
| 7 Espérance de v.a. discrètes          | 145 | 29 Arithmétique et probabilités            | 613 |
| 8 Couples de v.a. discrètes            | 177 | 30 Bosons, fermions et boltzmannions       | 623 |
| 9 Le jeu de <i>pile</i> ou <i>face</i> | 209 | 31 Processus de Poisson                    | 637 |
| 10 Variables aléatoires à densité      | 231 | 32 Mouvements browniens                    | 645 |
| 11 Espérance d'une v.a. à densité      | 253 | 33 Estimation bayésienne                   | 677 |
| 12 Couples de v.a. à densité           | 265 | 34 Loi de l'Arc sinus et séries aléatoires | 681 |
| 13 Exercices et problèmes              | 297 | 35 À propos de quelques paradoxes          | 691 |
| <b>III Plus formellement...</b>        |     | <b>A Annexes</b>                           |     |
| 14 Variables aléatoires (cas général)  | 317 | A Éléments d'analyse et d'algèbre          | 703 |
| 15 L'espérance comme intégration...    | 333 | B Davantage sur la mesure                  | 733 |
| 16 Vecteurs aléatoires                 | 357 | C Théorèmes d'existence                    | 747 |
| 17 Indépendance (2/2)                  | 367 | D Lexique français-anglais                 | 753 |
| 18 Fonctions caractéristiques          | 383 |                                            |     |
| 19 Vecteurs gaussiens (*)              | 391 |                                            |     |

# Table des matières

|                                                                           |               |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------|
| <b>Introduction</b>                                                       | <b>24</b>     |
| § 1. Les lois du hasard . . . . .                                         | 24            |
| § 2. But de la théorie . . . . .                                          | 25            |
| § 3. Quelques mots sur l'ouvrage . . . . .                                | 26            |
| § 4. Rosencrantz et Guildenstern . . . . .                                | 27            |
| <i>Exercice</i> . . . . .                                                 | 28            |
| <br><b>Partie I : Introduction heuristique</b>                            | <br><b>29</b> |
| <b>1 Probabilités (heuristique)</b>                                       | <b>31</b>     |
| 1.1 Le langage de l'aléatoire . . . . .                                   | 31            |
| § 5. Phénomènes aléatoires . . . . .                                      | 31            |
| § 6. L'univers $\Omega$ et les réalisations possibles du hasard . . . . . | 33            |
| § 7. Événements . . . . .                                                 | 35            |
| § 8. Compter/mesurer . . . . .                                            | 35            |
| § 9. Langage ensembliste . . . . .                                        | 37            |
| § 10. Calcul des probabilités . . . . .                                   | 38            |
| 1.2 Probabilités sur un ensemble fini ou dénombrable . . . . .            | 39            |
| § 11. Univers fini . . . . .                                              | 39            |
| § 12. Probabilités sur un ensemble dénombrable . . . . .                  | 42            |
| 1.3 Probabilités sur $\{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$ . . . . .                  | 42            |
| § 13. Un univers non dénombrable . . . . .                                | 42            |
| § 14. Unions dénombrables d'événements . . . . .                          | 44            |
| § 15. Unions non dénombrables d'événements . . . . .                      | 45            |
| § 16. Probabilité sur $\{P, F\}^{\mathbb{N}}$ . . . . .                   | 45            |
| 1.4 Probabilités conditionnelles . . . . .                                | 45            |
| § 17. Un exemple simple . . . . .                                         | 45            |
| § 18. Second exemple . . . . .                                            | 46            |
| § 19. Formule des probabilités totales . . . . .                          | 47            |
| § 20. Formule des probabilités composées . . . . .                        | 48            |
| § 21. Indépendance stochastique . . . . .                                 | 48            |
| § 22. « Indépendance = produit » (*) . . . . .                            | 49            |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                | 50            |
| <br><b>2 Variables aléatoires (heuristique)</b>                           | <br><b>57</b> |
| 2.1 Variables réelles . . . . .                                           | 58            |
| § 23. Première définition . . . . .                                       | 58            |
| § 24. Probabilité image (ou loi) . . . . .                                | 59            |
| § 25. Fonction de répartition . . . . .                                   | 60            |
| § 26. Extension de la notion de variables aléatoires . . . . .            | 62            |
| § 27. Variables discrètes . . . . .                                       | 63            |
| § 28. Variables à densité . . . . .                                       | 64            |

|                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 29. Est-ce tout ? . . . . .                                                  | 66 |
| § 30. La connaissance de $\Omega$ est inutile . . . . .                        | 67 |
| 2.2 La notion d'espérance . . . . .                                            | 67 |
| § 31. Points de vue du théoricien, point de vue de l'expérimentateur . . . . . | 67 |
| § 32. Le problème de la sommation . . . . .                                    | 69 |
| 2.3 Espérance d'une variable discrète ou à densité . . . . .                   | 70 |
| § 33. Cas discret : première (tentative de) définition . . . . .               | 70 |
| § 34. Deux expériences numériques . . . . .                                    | 70 |
| § 35. Séries commutativement convergentes . . . . .                            | 72 |
| § 36. Seconde définition . . . . .                                             | 73 |
| § 37. Espérance d'une variable à densité . . . . .                             | 74 |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                     | 74 |

## Partie II : Théorie et Pratique

77

|                                                                                  |            |
|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>3 Espaces probabilisés</b>                                                    | <b>79</b>  |
| 3.1 Parties, algèbres, tribus . . . . .                                          | 80         |
| § 38. Unions disjointes . . . . .                                                | 80         |
| § 39. Algèbres . . . . .                                                         | 80         |
| § 40. Tribus . . . . .                                                           | 81         |
| § 41. Borne supérieure et borne inférieure . . . . .                             | 81         |
| § 42. Autres propriétés des tribus . . . . .                                     | 82         |
| § 43. Construire une tribu. Tribu engendrée par un ensemble de parties . . . . . | 83         |
| 3.2 Espaces probabilisés . . . . .                                               | 84         |
| § 44. Espaces probabilisables . . . . .                                          | 84         |
| § 45. Espaces probabilisés . . . . .                                             | 86         |
| § 46. Propriétés des mesures de probabilités . . . . .                           | 87         |
| § 47. Événements négligeables . . . . .                                          | 89         |
| § 48. Espaces probabilisés complets (*) . . . . .                                | 90         |
| § 49. Systèmes complets, quasi-complets d'événements . . . . .                   | 90         |
| § 50. Formule du crible (ou : de Poincaré) . . . . .                             | 91         |
| 3.3 Probabilité sur $\mathbb{R}$ . . . . .                                       | 93         |
| § 51. Fonction de répartition d'une probabilité . . . . .                        | 93         |
| § 52. La mesure de Lebesgue sur $[0; 1]$ . . . . .                               | 94         |
| § 53. Probabilités finies . . . . .                                              | 95         |
| § 54. Probabilités discrètes . . . . .                                           | 95         |
| § 55. Probabilités à densité . . . . .                                           | 96         |
| 3.4 Annexe : $\pi$ -systèmes et théorème de Carathéodory . . . . .               | 96         |
| § 56. $\pi$ -systèmes . . . . .                                                  | 96         |
| § 57. Le théorème de Carathéodory . . . . .                                      | 97         |
| 3.5 Annexe : un ensemble non mesurable . . . . .                                 | 97         |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                       | 98         |
| <b>4 Conditionnement</b>                                                         | <b>103</b> |
| § 58. Probabilités conditionnelles . . . . .                                     | 103        |
| § 59. Formule des probabilités composées . . . . .                               | 105        |
| § 60. Formule des probabilités totales . . . . .                                 | 105        |
| § 61. Théorème de Bayes . . . . .                                                | 106        |
| § 62. Quelques remarques et difficultés . . . . .                                | 108        |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                       | 110        |

|          |                                                                                 |            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5</b> | <b>Indépendance (1/2)</b>                                                       | <b>113</b> |
| 5.1      | Indépendance d'événements et de tribus . . . . .                                | 113        |
|          | § 63. Indépendance de deux événements . . . . .                                 | 113        |
|          | § 64. Indépendance mutuelle . . . . .                                           | 114        |
| 5.2      | Les lemmes de Borel-Cantelli . . . . .                                          | 116        |
|          | § 65. Limite supérieure et limite inférieure . . . . .                          | 116        |
|          | § 66. Les lemmes de Borel-Cantelli . . . . .                                    | 119        |
| 5.3      | Application : du jeu de recouvrement au paradoxe d'Olbers . . . .               | 121        |
|          | § 67. Le paradoxe historique d'Olbers . . . . .                                 | 121        |
|          | § 68. Un modèle bidimensionnel de recouvrement . . . . .                        | 122        |
|          | § 69. Modèle stellaire uniforme : probabilité que le cercle... . . . .          | 123        |
|          | <i>Exercices</i> . . . . .                                                      | 125        |
| <b>6</b> | <b>Variables aléatoires discrètes</b>                                           | <b>129</b> |
| 6.1      | Variables aléatoires discrètes . . . . .                                        | 129        |
|          | § 70. Variable simple, variable discrète . . . . .                              | 129        |
|          | § 71. Système complet induit par une variable aléatoire discrète . . . . .      | 130        |
|          | § 72. Loi d'une variable aléatoire discrète . . . . .                           | 131        |
|          | § 73. Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète . . . . .       | 132        |
|          | § 74. Diagrammes en bâtons . . . . .                                            | 133        |
|          | § 75. Variables aléatoires au sens large . . . . .                              | 134        |
| 6.2      | Lois classiques . . . . .                                                       | 135        |
|          | § 76. Loi uniforme . . . . .                                                    | 135        |
|          | § 77. Loi de Bernoulli . . . . .                                                | 135        |
|          | § 78. Loi binomiale . . . . .                                                   | 136        |
|          | § 79. Loi géométrique . . . . .                                                 | 136        |
|          | § 80. Loi de Poisson . . . . .                                                  | 138        |
|          | § 81. Tirages avec et sans remise. Loi hypergéométrique . . . . .               | 141        |
|          | § 82. Loi de l'image $\varphi(X)$ d'une variable aléatoire . . . . .            | 142        |
|          | <i>Exercices</i> . . . . .                                                      | 143        |
| <b>7</b> | <b>Espérance d'une variable aléatoire discrète</b>                              | <b>145</b> |
| 7.1      | Espérance . . . . .                                                             | 145        |
|          | § 83. Espérance . . . . .                                                       | 145        |
|          | § 84. Représentations de $X$ comme combinaisons de fonctions indicatrices . . . | 147        |
|          | § 85. Espérances infinies . . . . .                                             | 149        |
|          | § 86. Linéarité . . . . .                                                       | 150        |
|          | § 87. Application de la linéarité au calcul pratique d'une espérance . . . . .  | 151        |
|          | § 88. Autres propriétés de l'espérance . . . . .                                | 152        |
|          | § 89. Une formule alternative de l'espérance (*) . . . . .                      | 153        |
|          | § 90. Intégration terme à terme . . . . .                                       | 154        |
| 7.2      | Moments . . . . .                                                               | 155        |
|          | § 91. Formule de transfert . . . . .                                            | 155        |
|          | § 92. Moments . . . . .                                                         | 155        |
|          | § 93. Moments centrés . . . . .                                                 | 155        |
|          | § 94. Variance, écart-type . . . . .                                            | 156        |
|          | § 95. Propriétés de la variance . . . . .                                       | 159        |
|          | § 96. Variable centrée réduite . . . . .                                        | 159        |
|          | § 97. Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .                                     | 159        |
|          | § 98. Espérance et variance des lois classiques . . . . .                       | 160        |
|          | § 99. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . . .                                | 160        |

|                                                                                                |                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| § 100. Atouts et faiblesses de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . . .                    | 162            |
| <b>7.3 Fonctions génératrices . . . . .</b>                                                    | <b>163</b>     |
| § 101. Fonction génératrice . . . . .                                                          | 163            |
| § 102. Récupération des moments . . . . .                                                      | 164            |
| § 103. Fonctions génératrices des lois classiques . . . . .                                    | 165            |
| <b>7.4 Un problème classique : le collectionneur . . . . .</b>                                 | <b>166</b>     |
| § 104. Position du problème . . . . .                                                          | 166            |
| § 105. Loi du temps d'attente . . . . .                                                        | 167            |
| § 106. Une majoration de la probabilité de déviation . . . . .                                 | 168            |
| <b>Exercices . . . . .</b>                                                                     | <b>169</b>     |
| <br><b>8 Couples de variables aléatoires discrètes . . . . .</b>                               | <br><b>177</b> |
| § 107. Position du problème . . . . .                                                          | 177            |
| <b>8.1 Loi d'un couple . . . . .</b>                                                           | <b>178</b>     |
| § 108. Loi conjointe, lois marginales . . . . .                                                | 178            |
| § 109. Lois conditionnelles . . . . .                                                          | 179            |
| § 110. Somme de deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ . . . . .                | 180            |
| § 111. Théorème de transfert . . . . .                                                         | 180            |
| <b>8.2 Indépendance . . . . .</b>                                                              | <b>181</b>     |
| § 112. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes . . . . .                           | 181            |
| § 113. Indépendance mutuelle . . . . .                                                         | 182            |
| § 114. Fonctions de variables indépendantes . . . . .                                          | 183            |
| § 115. Un exemple : minimum et maximum de variables indépendantes . . . . .                    | 185            |
| § 116. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes . . . . .                  | 185            |
| § 117. Somme de variables indépendantes — formule de convolution . . . . .                     | 186            |
| § 118. Loi binomiale comme somme de lois de Bernoulli . . . . .                                | 186            |
| § 119. Théorèmes de stabilité . . . . .                                                        | 187            |
| <b>8.3 Covariance . . . . .</b>                                                                | <b>187</b>     |
| § 120. Covariance d'un couple discret . . . . .                                                | 187            |
| § 121. Somme de variables aléatoires . . . . .                                                 | 189            |
| § 122. Coefficient de corrélation . . . . .                                                    | 191            |
| § 123. Invariance par changement d'échelle de $\rho(X, Y)$ . . . . .                           | 191            |
| § 124. Covariance d'un couple de données statistiques . . . . .                                | 192            |
| <b>8.4 Espérance conditionnelle (cas discret) . . . . .</b>                                    | <b>193</b>     |
| § 125. Lois conditionnelles . . . . .                                                          | 193            |
| § 126. Espérance conditionnelle, première approche . . . . .                                   | 194            |
| § 127. Espérance conditionnelle, seconde approche . . . . .                                    | 195            |
| <b>8.5 Sommation d'un nombre aléatoire de variables . . . . .</b>                              | <b>196</b>     |
| § 128. Contexte historique et mathématique . . . . .                                           | 196            |
| § 129. Identités de Wald . . . . .                                                             | 197            |
| § 130. Processus de Galton-Watson . . . . .                                                    | 199            |
| § 131. Probabilité d'extinction . . . . .                                                      | 200            |
| § 132. Évolution de la population . . . . .                                                    | 201            |
| <b>Exercices . . . . .</b>                                                                     | <b>202</b>     |
| <br><b>9 Le jeu de pile ou face . . . . .</b>                                                  | <br><b>209</b> |
| <b>9.1 Formalisation . . . . .</b>                                                             | <b>209</b>     |
| § 133. Espace probabilisé associé à une partie infinie de <i>pile</i> ou <i>face</i> . . . . . | 209            |
| § 134. Quelques notations . . . . .                                                            | 210            |
| <b>9.2 Étude des motifs . . . . .</b>                                                          | <b>211</b>     |
| § 135. Longueur moyenne de la deuxième séquence homogène . . . . .                             | 211            |

|                                                                                                            |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 136. Vaut-il mieux parier FPP ou PPF ? . . . . .                                                         | 212        |
| § 137. Occurrence de motifs, événements régénératifs . . . . .                                             | 214        |
| § 138. Temps d'attente d'un des motifs PPF et FPP . . . . .                                                | 216        |
| § 139. Temps d'attente du motif PPP . . . . .                                                              | 218        |
| 9.3 Théorèmes limites . . . . .                                                                            | 219        |
| § 140. Une certitude : la moyenne . . . . .                                                                | 219        |
| § 141. Retour à l'équilibre et marches aléatoires . . . . .                                                | 220        |
| 9.4 Les nombres normaux existent ! . . . . .                                                               | 222        |
| § 142. Une suite de variables de Bernoulli indépendantes est un réel de $[0; 1[$ (et vice-versa) . . . . . | 222        |
| § 143. Propriétés des fonctions de Rademacher . . . . .                                                    | 223        |
| § 144. Le théorème des nombres normaux de Borel . . . . .                                                  | 225        |
| § 145. Existence de nombres complètement normaux . . . . .                                                 | 225        |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                                                 | 227        |
| <b>10 Variables aléatoires à densité</b>                                                                   | <b>231</b> |
| § 146. À propos de l'intégrabilité des fonctions . . . . .                                                 | 231        |
| 10.1 Variables aléatoires à densité . . . . .                                                              | 232        |
| § 147. Variables continues . . . . .                                                                       | 232        |
| § 148. Variables absolument continues, ou à densité . . . . .                                              | 232        |
| § 149. Propriétés de la densité de probabilité . . . . .                                                   | 235        |
| § 150. Changement d'échelle . . . . .                                                                      | 235        |
| § 151. Médiane . . . . .                                                                                   | 236        |
| § 152. Variables symétriques . . . . .                                                                     | 237        |
| 10.2 Lois classiques . . . . .                                                                             | 237        |
| § 153. Loi uniforme . . . . .                                                                              | 237        |
| § 154. Loi exponentielle . . . . .                                                                         | 238        |
| § 155. Loi normale centrée réduite . . . . .                                                               | 239        |
| § 156. Loi normale . . . . .                                                                               | 240        |
| § 157. Loi de Cauchy . . . . .                                                                             | 242        |
| § 158. Loi $\Gamma$ (Gamma) . . . . .                                                                      | 243        |
| § 159. Loi $\gamma$ . . . . .                                                                              | 243        |
| § 160. Loi du $\chi^2$ . . . . .                                                                           | 243        |
| § 161. Loi bêta $B(a, b)$ . . . . .                                                                        | 243        |
| 10.3 Changement de variable aléatoire . . . . .                                                            | 245        |
| § 162. Loi de $\varphi(X)$ lorsque $\varphi$ est injective . . . . .                                       | 245        |
| § 163. Loi de $\varphi(X)$ : cas général . . . . .                                                         | 246        |
| § 164. Simuler une loi à densité . . . . .                                                                 | 247        |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                                                 | 249        |
| <b>11 Espérance d'une variable aléatoire à densité</b>                                                     | <b>253</b> |
| 11.1 Espérance et moments . . . . .                                                                        | 253        |
| § 165. Espérance . . . . .                                                                                 | 253        |
| § 166. Formule de transfert . . . . .                                                                      | 254        |
| § 167. Moments . . . . .                                                                                   | 255        |
| § 168. Moments centrés . . . . .                                                                           | 255        |
| § 169. Variance . . . . .                                                                                  | 256        |
| § 170. Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .                                                               | 257        |
| § 171. Espérance et variance des lois classiques . . . . .                                                 | 257        |
| § 172. Variables centrées réduites . . . . .                                                               | 260        |
| § 173. Autres caractéristiques numériques d'une variable aléatoire à densité . . . . .                     | 260        |

|                                                                                           |                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 11.2 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev . . . . .                             | 261            |
| § 174. Inégalité de Markov . . . . .                                                      | 261            |
| § 175. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . . .                                         | 261            |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                                | 262            |
| <b>12 Couples de variables à densité</b>                                                  | <b>265</b>     |
| 12.1 Loi d'un couple . . . . .                                                            | 265            |
| § 176. Loi d'un couple, lois marginales . . . . .                                         | 265            |
| § 177. Couple admettant une densité . . . . .                                             | 266            |
| § 178. Densités marginales . . . . .                                                      | 269            |
| § 179. Somme de deux variables aléatoires à densité . . . . .                             | 269            |
| § 180. Théorème de transfert . . . . .                                                    | 271            |
| 12.2 Indépendance . . . . .                                                               | 271            |
| § 181. Indépendance de deux variables aléatoires à densité . . . . .                      | 271            |
| § 182. Indépendance mutuelle . . . . .                                                    | 272            |
| § 183. Somme de deux variables aléatoires indépendantes . . . . .                         | 273            |
| § 184. Somme de lois normales indépendantes . . . . .                                     | 274            |
| § 185. Un exemple : quotient de deux lois normales . . . . .                              | 274            |
| § 186. Maximum et minimum de N variables aléatoires indépendantes . . . . .               | 275            |
| § 187. Espérance du produit de variables indépendantes . . . . .                          | 276            |
| 12.3 Covariance . . . . .                                                                 | 277            |
| § 188. Covariance d'un couple à densité . . . . .                                         | 277            |
| § 189. Coefficient de corrélation . . . . .                                               | 278            |
| 12.4 Lois conditionnelles . . . . .                                                       | 279            |
| § 190. Lois conditionnelles . . . . .                                                     | 279            |
| § 191. Exemple de variable conditionnée par une autre . . . . .                           | 282            |
| § 192. Un exemple de loi mixte (discret, continu) : temps d'attente du métro . . . . .    | 282            |
| § 193. Espérances conditionnelles . . . . .                                               | 285            |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                                | 286            |
| <b>13 Exercices et problèmes</b>                                                          | <b>297</b>     |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                                | 297            |
| <br><b>Partie III : Plus formellement...</b>                                              | <br><b>315</b> |
| <b>14 Variables aléatoires : cas général</b>                                              | <b>317</b>     |
| 14.1 Mesurabilité . . . . .                                                               | 317            |
| § 194. Définition d'une variable aléatoire . . . . .                                      | 317            |
| § 195. Calcul des images réciproques . . . . .                                            | 318            |
| § 196. Quelques résultats sur la mesurabilité . . . . .                                   | 318            |
| 14.2 Fonction de répartition . . . . .                                                    | 320            |
| § 197. Loi d'une variable aléatoire . . . . .                                             | 320            |
| § 198. Fonction de répartition . . . . .                                                  | 320            |
| § 199. Variables discrètes, continues, mixtes . . . . .                                   | 322            |
| § 200. Décomposition de Lebesgue d'une fonction de répartition . . . . .                  | 323            |
| § 201. Densité au sens des distributions . . . . .                                        | 325            |
| § 202. Une définition de l'espérance n'utilisant que la fonction de répartition . . . . . | 326            |
| § 203. L'espérance et les notations de l'intégrale de Stieltjes . . . . .                 | 327            |
| 14.3 Limite simple de variables aléatoires . . . . .                                      | 328            |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                                | 330            |

|                                                                               |            |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>15 L'espérance comme intégration sur une mesure de probabilité</b>         | <b>333</b> |
| 15.1 Construction de l'espérance comme intégrale                              | 334        |
| § 204. Espérance d'une variable aléatoire simple                              | 334        |
| § 205. Espérance d'une variable aléatoire positive                            | 335        |
| § 206. Espérance comme limite croissante d'une suite de variables simples (*) | 335        |
| § 207. Espérance d'une variable aléatoire réelle                              | 336        |
| § 208. Espérance d'une variable aléatoire complexe                            | 337        |
| § 209. Propriétés de l'espérance; espace $\mathcal{L}^1$                      | 337        |
| § 210. Intégration sur une partie                                             | 339        |
| § 211. Espaces $\mathcal{L}^1$ et $L^1$                                       | 339        |
| § 212. Moments d'ordre supérieur                                              | 340        |
| 15.2 Théorèmes de convergence                                                 | 341        |
| § 213. Théorème de convergence monotone                                       | 341        |
| § 214. Lemme de Fatou (*)                                                     | 341        |
| § 215. Théorème de convergence dominée                                        | 342        |
| § 216. La Cavalerie Légère à l'œuvre                                          | 343        |
| 15.3 Le théorème de transfert et ses applications                             | 344        |
| § 217. Le théorème général                                                    | 344        |
| § 218. Cas des variables à densité                                            | 345        |
| 15.4 Espace $L^2$ ; interprétations géométriques                              | 347        |
| § 219. Espaces $\mathcal{L}^2$ et $L^2$                                       | 347        |
| § 220. Inégalité de Cauchy-Schwarz                                            | 347        |
| § 221. Covariance                                                             | 348        |
| § 222. Structure de l'espace $L^2$                                            | 349        |
| § 223. Interprétations géométriques                                           | 350        |
| § 224. Meilleur estimateur quadratique d'une variable aléatoire               | 351        |
| 15.5 Inégalités                                                               | 352        |
| § 225. Inégalité de Markov                                                    | 352        |
| § 226. Inégalités de Bienaymé-Tchebychev                                      | 353        |
| § 227. Inégalité de Bernstein                                                 | 354        |
| § 228. Inégalité de Jensen (convexité)                                        | 354        |
| 15.6 Annexe : le théorème de convergence monotone                             | 355        |
| <i>Exercices</i>                                                              | 355        |
| <b>16 Vecteurs aléatoires</b>                                                 | <b>357</b> |
| § 229. Notations                                                              | 357        |
| 16.1 Probabilités sur $\mathbb{R}^n$                                          | 358        |
| § 230. Boréliens de $\mathbb{R}^n$                                            | 358        |
| § 231. Probabilité produit                                                    | 358        |
| § 232. Densités                                                               | 358        |
| 16.2 Vecteurs aléatoires                                                      | 358        |
| § 233. Espérance                                                              | 359        |
| § 234. Matrice de covariance                                                  | 359        |
| § 235. Inégalité de Cauchy-Schwarz                                            | 360        |
| 16.3 Fubini !!!                                                               | 361        |
| § 236. Le théorème de Fubini en pratique                                      | 361        |
| § 237. Application : densités marginales                                      | 361        |
| § 238. Application : expression alternative de l'espérance                    | 362        |
| 16.4 Changements de variables aléatoires                                      | 363        |
| § 239. Changement de vecteur aléatoire                                        | 363        |
| § 240. Somme, produit et quotient de deux variables aléatoires                | 364        |

|                                                                                  |            |
|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                       | 365        |
| <b>17 Indépendance (2/2)</b>                                                     | <b>367</b> |
| 17.1 Indépendance de variables aléatoires . . . . .                              | 367        |
| § 241. Indépendance de deux variables aléatoires . . . . .                       | 367        |
| § 242. Indépendance de classes et de tribus d'événements . . . . .               | 369        |
| § 243. Indépendance de $n$ variables aléatoires . . . . .                        | 370        |
| § 244. Caractérisations de l'indépendance de variables aléatoires . . . . .      | 370        |
| § 245. Coalitions . . . . .                                                      | 370        |
| § 246. Indépendance de variables aléatoires discrètes . . . . .                  | 371        |
| § 247. Indépendance de variables aléatoires à densité . . . . .                  | 371        |
| 17.2 Somme et produit de variables aléatoires indépendantes . . . . .            | 372        |
| § 248. Espérance d'un produit . . . . .                                          | 372        |
| § 249. Formule de convolution . . . . .                                          | 374        |
| § 250. Formule de convolution pour les variables à densité . . . . .             | 375        |
| § 251. Somme de $n$ variables aléatoires indépendantes . . . . .                 | 376        |
| 17.3 Temps d'arrêt et identité de Wald . . . . .                                 | 376        |
| § 252. Notion de temps d'arrêt . . . . .                                         | 376        |
| § 253. Temps d'arrêt et identités de Wald . . . . .                              | 377        |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                       | 379        |
| <b>18 Fonctions caractéristiques</b>                                             | <b>383</b> |
| § 254. Variables aléatoires complexes . . . . .                                  | 383        |
| § 255. Fonction caractéristique . . . . .                                        | 384        |
| § 256. Cas des variables aléatoires discrètes . . . . .                          | 385        |
| § 257. Propriétés de la fonction caractéristique . . . . .                       | 385        |
| § 258. Fonction caractéristique d'une somme de variables indépendantes . . . . . | 386        |
| § 259. Théorème d'unicité . . . . .                                              | 386        |
| § 260. Fonction caractéristique et indépendance . . . . .                        | 387        |
| § 261. Régularité de la fonction caractéristique . . . . .                       | 387        |
| § 262. Fonctions caractéristiques usuelles . . . . .                             | 388        |
| § 263. Le théorème de continuité de Paul Lévy . . . . .                          | 388        |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                       | 389        |
| <b>19 Vecteurs gaussiens</b>                                                     | <b>391</b> |
| 19.1 Loix normales sur $\mathbb{R}^2$ . . . . .                                  | 391        |
| § 264. Loix normales et extension . . . . .                                      | 391        |
| § 265. Loix normales sur $\mathbb{R}^2$ : cas non dégénéré . . . . .             | 392        |
| § 266. Réduction d'une loi normale non dégénérée sur $\mathbb{R}^2$ . . . . .    | 394        |
| 19.2 Aspects numériques de loix normales sur $\mathbb{R}^2$ . . . . .            | 396        |
| § 267. Loix marginales . . . . .                                                 | 396        |
| § 268. Combinaisons linéaires de $X$ et $Y$ . . . . .                            | 397        |
| § 269. Densités conditionnelles . . . . .                                        | 398        |
| § 270. Ellipses d'égale densité . . . . .                                        | 398        |
| 19.3 Vecteurs gaussiens . . . . .                                                | 400        |
| § 271. Définition des vecteurs gaussiens . . . . .                               | 400        |
| § 272. Caractérisation par les combinaisons linéaires . . . . .                  | 400        |
| § 273. Indépendance et décorrélation . . . . .                                   | 401        |
| § 274. Décomposition d'un vecteur gaussien . . . . .                             | 401        |
| § 275. Densité d'un vecteur gaussien . . . . .                                   | 403        |
| § 276. Ellipsoïdes d'égale densité et loi du $\chi^2$ . . . . .                  | 404        |

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| § 277. Lemme des moments (théorème de Wick) . . . . . | 404 |
| <i>Exercices</i> . . . . .                            | 405 |

## Partie IV : Théorèmes limites 407

|                                                                                    |            |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>20 Convergence</b> . . . . .                                                    | <b>409</b> |
| § 278. Introduction aux théorèmes limites . . . . .                                | 409        |
| 20.1 Convergence presque sûre, convergence en probabilité . . . . .                | 412        |
| § 279. Convergence presque sûre . . . . .                                          | 412        |
| § 280. Critères de convergence presque sûre (*) . . . . .                          | 412        |
| § 281. Convergence en probabilité . . . . .                                        | 414        |
| § 282. Une caractérisation par l'espérance . . . . .                               | 415        |
| § 283. Convergence et images de variables aléatoires . . . . .                     | 416        |
| § 284. Comparaison entre convergence en probabilité et convergence p.s. . . . .    | 416        |
| § 285. Une distance sur l'espace des variables aléatoires (*) . . . . .            | 417        |
| 20.2 Convergence en moyenne et dans $L^p$ . . . . .                                | 418        |
| § 286. Convergence en moyenne et dans $L^p$ . . . . .                              | 418        |
| § 287. Convergence en probabilité et convergence dans $L^p$ (*) . . . . .          | 419        |
| 20.3 Convergence en loi . . . . .                                                  | 419        |
| § 288. Convergence en loi . . . . .                                                | 419        |
| § 289. Convergence en loi <i>versus</i> convergence étroite . . . . .              | 421        |
| § 290. Convergence en loi et convergence en probabilité . . . . .                  | 422        |
| § 291. Convergence en loi de variables discrètes . . . . .                         | 423        |
| § 292. Convergence en loi de variables à densité . . . . .                         | 426        |
| § 293. Convergence en loi et fonctions caractéristiques . . . . .                  | 427        |
| § 294. Convergence en loi vers une constante . . . . .                             | 428        |
| § 295. Convergence en loi d'un couple, théorème de Slutsky . . . . .               | 428        |
| 20.4 Une application : produit scalaire de vecteurs unitaires aléatoires . . . . . | 429        |
| § 296. Vecteur aléatoire sur la sphère $S_n$ . . . . .                             | 429        |
| § 297. Loi du produit scalaire . . . . .                                           | 430        |
| § 298. Loi limite . . . . .                                                        | 431        |
| 20.5 Seconde application : suites équidistribuées . . . . .                        | 431        |
| § 299. Suites équidistribuées . . . . .                                            | 431        |
| § 300. Critère de Weyl . . . . .                                                   | 432        |
| § 301. Application aux suites $(n\alpha \bmod 1)$ . . . . .                        | 434        |
| 20.6 Annexe : convergence étroite . . . . .                                        | 436        |
| § 302. Théorème de représentation de Skorokhod . . . . .                           | 436        |
| § 303. Équivalence de la convergence en loi et de la convergence étroite . . . . . | 437        |
| 20.7 Résumé synoptique . . . . .                                                   | 438        |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                         | 439        |
| <b>21 Loi des grands nombres</b> . . . . .                                         | <b>445</b> |
| 21.1 La loi du tout ou rien . . . . .                                              | 445        |
| § 304. Événements de queue, tribu asymptotique . . . . .                           | 445        |
| § 305. Loi du 0–1 de Kolmogorov . . . . .                                          | 447        |
| § 306. Loi du tout ou rien pour les événements . . . . .                           | 448        |
| § 307. Loi du tout ou rien de Hewitt-Savage (*) . . . . .                          | 448        |
| § 308. Une application aux séries aléatoires . . . . .                             | 449        |
| § 309. Une application aux marches aléatoires . . . . .                            | 449        |
| 21.2 Lois des grands nombres . . . . .                                             | 451        |

|                                                                                       |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 310. La loi faible des grands nombres . . . . .                                     | 452        |
| § 311. La loi forte des grands nombres . . . . .                                      | 453        |
| § 312. Cas de la divergence (*) . . . . .                                             | 455        |
| 21.3 Théorème de Glivenko-Cantelli . . . . .                                          | 456        |
| § 313. Fonction de répartition empirique . . . . .                                    | 456        |
| § 314. Application : le test de Kolmogorov-Smirnov . . . . .                          | 458        |
| 21.4 Annexe : deux démonstrations de la loi des grands nombres . . . . .              | 460        |
| § 315. La loi forte selon Etemadi . . . . .                                           | 460        |
| § 316. La loi forte selon Pratelli . . . . .                                          | 463        |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                            | 466        |
| <b>22 Le théorème central limite</b>                                                  | <b>471</b> |
| § 317. Au-delà de la loi des grands nombres . . . . .                                 | 471        |
| § 318. Le théorème central limite . . . . .                                           | 472        |
| § 319. Autres formes du théorème central limite (*) . . . . .                         | 474        |
| § 320. Forme locale du théorème central limite . . . . .                              | 475        |
| § 321. Évaluation de la vitesse de convergence . . . . .                              | 476        |
| § 322. Extension aux variables vectorielles (*) . . . . .                             | 477        |
| § 323. Utilité du théorème central limite . . . . .                                   | 477        |
| § 324. La physique et la loi du $1/\sqrt{n}$ . . . . .                                | 477        |
| § 325. Au-delà du théorème central limite : la loi du logarithme itéré . . . . .      | 478        |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                            | 480        |
| <b>23 Techniques d'approximation</b>                                                  | <b>481</b> |
| 23.1 Approximations poissonniennes . . . . .                                          | 481        |
| § 326. Convergence vers une loi de Poisson . . . . .                                  | 481        |
| § 327. Approximation poissonnienne d'une loi binomiale . . . . .                      | 482        |
| 23.2 Approximation normale . . . . .                                                  | 483        |
| § 328. Approximation normale d'une loi binomiale ; correction de continuité . . . . . | 483        |
| § 329. Approximation normale d'une loi de Poisson . . . . .                           | 485        |
| § 330. Approximation normale et inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . . .            | 486        |
| § 331. Estimer un nombre de lancers nécessaires . . . . .                             | 487        |
| § 332. Résumé des conditions d'approximation . . . . .                                | 490        |
| 23.3 Régression linéaire . . . . .                                                    | 490        |
| § 333. Droite de régression . . . . .                                                 | 490        |
| § 334. Droite de régression par rapport à $y$ . . . . .                               | 491        |
| § 335. Corrélation et causalité . . . . .                                             | 492        |
| 23.4 Estimation . . . . .                                                             | 494        |
| § 336. Un exemple : moyenne empirique . . . . .                                       | 494        |
| § 337. Un exemple : variance empirique . . . . .                                      | 494        |
| § 338. Notion d'estimateur . . . . .                                                  | 496        |
| § 339. Risque quadratique . . . . .                                                   | 496        |
| § 340. Intervalles de confiance . . . . .                                             | 497        |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                            | 498        |
| <b>24 Espérance conditionnelle</b>                                                    | <b>503</b> |
| 24.1 Le cas fini ou dénombrable . . . . .                                             | 503        |
| § 341. Espérance conditionnelle sachant une partition . . . . .                       | 504        |
| § 342. Un autre point de vue . . . . .                                                | 505        |
| § 343. La propriété fondamentale de l'espérance conditionnelle . . . . .              | 506        |
| § 344. Propriétés élémentaires . . . . .                                              | 506        |

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 345. Espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire discrète . . . . .         | 508 |
| § 346. Fonctions mesurables selon une partition dénombrable . . . . .                     | 509 |
| 24.2 Le cas général . . . . .                                                             | 510 |
| § 347. Espérance d'une variable aléatoire sachant un événement . . . . .                  | 510 |
| § 348. Espérance conditionnelle sachant une tribu . . . . .                               | 510 |
| § 349. Espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire . . . . .                  | 512 |
| § 350. Lemme de factorisation . . . . .                                                   | 512 |
| § 351. Propriétés de l'espérance conditionnelle . . . . .                                 | 512 |
| § 352. Théorèmes de convergence . . . . .                                                 | 513 |
| § 353. Densités conditionnelles (*) . . . . .                                             | 514 |
| § 354. Le point de vue hilbertien : l'espérance conditionnelle comme projection . . . . . | 514 |
| 24.3 Martingales . . . . .                                                                | 516 |
| § 355. Ma première martingale . . . . .                                                   | 516 |
| § 356. Filtrations, martingales . . . . .                                                 | 516 |
| § 357. Sur- et sous-martingales . . . . .                                                 | 518 |
| § 358. Théorème de convergence des martingales . . . . .                                  | 518 |
| § 359. Applications . . . . .                                                             | 521 |
| 24.4 Annexe : probabilités conditionnelles (*) . . . . .                                  | 521 |
| § 360. Probabilité conditionnelle sachant une partition dénombrable . . . . .             | 521 |
| § 361. Probabilité conditionnelle sachant une variable aléatoire . . . . .                | 522 |
| § 362. Probabilité conditionnelle sachant une tribu . . . . .                             | 522 |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                                | 523 |

## Partie V : Quelques applications 527

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 25 Quelques résultats établis par la théorie des probabilités . . . . .         | 529 |
| § 363. La formule de Bernstein . . . . .                                        | 529 |
| § 364. L'existence de nombres complètement normaux . . . . .                    | 532 |
| § 365. Points singuliers du cercle de convergence d'une série entière . . . . . | 533 |
| § 366. Le théorème de Weierstrass et les polynômes de Bernstein . . . . .       | 535 |
| § 367. En guise de conclusion . . . . .                                         | 539 |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                      | 540 |
| 26 Simuler informatiquement une loi de probabilité . . . . .                    | 545 |
| 26.1 Simuler une loi discrète . . . . .                                         | 545 |
| § 368. Simuler une loi de Bernoulli . . . . .                                   | 546 |
| § 369. Simuler une loi binomiale . . . . .                                      | 546 |
| § 370. Simuler une loi discrète finie . . . . .                                 | 546 |
| § 371. Simuler une loi géométrique . . . . .                                    | 547 |
| § 372. Simuler une loi de Poisson . . . . .                                     | 548 |
| 26.2 Simuler une loi continue . . . . .                                         | 549 |
| § 373. Méthode de l'inverse . . . . .                                           | 549 |
| § 374. Méthode du rejet . . . . .                                               | 550 |
| § 375. Mélange de fonctions de répartition . . . . .                            | 552 |
| 26.3 Simuler une loi normale . . . . .                                          | 554 |
| § 376. Méthode découlant du théorème central limite . . . . .                   | 554 |
| § 377. Méthode de la transformée inverse . . . . .                              | 554 |
| § 378. Méthode de Box-Muller . . . . .                                          | 554 |
| § 379. Simulation d'une loi normale par la méthode du rejet . . . . .           | 556 |
| § 380. Simulation d'un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^2$ . . . . .            | 557 |

|                  |                                                                            |            |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| 26.4             | Remarques sur les générateurs d'une loi uniforme . . . . .                 | 559        |
| § 381.           | Remarques préliminaires . . . . .                                          | 559        |
| § 382.           | Générateur à récurrence linéaire . . . . .                                 | 561        |
| § 383.           | Récurrences d'ordre supérieur, ou non linéaires . . . . .                  | 562        |
| § 384.           | Brève remarque historique . . . . .                                        | 563        |
| <i>Exercices</i> | . . . . .                                                                  | 564        |
| <b>27</b>        | <b>Méthodes de Monte-Carlo</b>                                             | <b>567</b> |
| 27.1             | Estimation d'une moyenne . . . . .                                         | 568        |
| § 385.           | L'aiguille de Buffon . . . . .                                             | 568        |
| 27.2             | Intégration numérique . . . . .                                            | 570        |
| § 386.           | Position du problème . . . . .                                             | 570        |
| § 387.           | Convergence de la méthode . . . . .                                        | 573        |
| § 388.           | Effet de la dimension . . . . .                                            | 573        |
| 27.3             | Laissons faire le hasard ! . . . . .                                       | 574        |
| § 389.           | Un exemple arithmétique : tests de primalité (Miller-Rabin) . . . . .      | 574        |
| § 390.           | Une machine à deviner des conjectures : le modèle de Cramér . . . . .      | 578        |
| § 391.           | Le hasard et les algorithmes de recherche de solution optimale . . . . .   | 579        |
| § 392.           | Falsification de données comptables et la loi de Benford . . . . .         | 580        |
| <i>Exercices</i> | . . . . .                                                                  | 583        |
| <b>28</b>        | <b>Chaînes de Markov</b>                                                   | <b>585</b> |
| 28.1             | Matrices de transition . . . . .                                           | 585        |
| § 393.           | Matrices de transition, chaînes de Markov . . . . .                        | 586        |
| § 394.           | Mise en garde : probabilités conditionnelles et mémoire du passé . . . . . | 588        |
| § 395.           | Graphe associé à une chaîne de Markov . . . . .                            | 588        |
| § 396.           | Propriétés des matrices stochastiques . . . . .                            | 589        |
| § 397.           | Mesures sur l'espace des états . . . . .                                   | 589        |
| § 398.           | Évolution à $n$ pas et équation de Chapman-Kolmogorov . . . . .            | 590        |
| § 399.           | Évolution du système aux grandes échelles de temps . . . . .               | 591        |
| 28.2             | Classification immédiate des états . . . . .                               | 593        |
| § 400.           | États communicants . . . . .                                               | 593        |
| § 401.           | Notion de classes. Graphes et matrices irréductibles. . . . .              | 595        |
| § 402.           | Parties fermées. États absorbants . . . . .                                | 596        |
| § 403.           | Périodicité . . . . .                                                      | 597        |
| § 404.           | Ergodicité (irréductibilité forte) . . . . .                               | 598        |
| § 405.           | Théorème de Perron-Frobenius et théorème ergodique . . . . .               | 599        |
| 28.3             | Classification asymptotiques des états . . . . .                           | 601        |
| § 406.           | États transitoires, états récurrents . . . . .                             | 601        |
| § 407.           | Matrice réduite . . . . .                                                  | 602        |
| 28.4             | Méthode « un pas en avant » . . . . .                                      | 603        |
| § 408.           | Temps moyen de retour . . . . .                                            | 603        |
| § 409.           | Temps moyen d'atteinte d'une partie . . . . .                              | 604        |
| § 410.           | Temps de retour et loi stationnaire . . . . .                              | 604        |
| § 411.           | Probabilité d'absorption . . . . .                                         | 605        |
| 28.5             | Trois exemples . . . . .                                                   | 606        |
| § 412.           | Attente d'un motif dans le jeu de <i>pile</i> ou <i>face</i> . . . . .     | 606        |
| § 413.           | Une chaîne réductible . . . . .                                            | 607        |
| § 414.           | Le modèle des urnes d'Ehrenfest . . . . .                                  | 608        |
| <i>Exercices</i> | . . . . .                                                                  | 609        |

|                                                                                         |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>29 Arithmétique et probabilités : une randonnée</b>                                  | <b>613</b> |
| 29.1 Exemple élémentaire . . . . .                                                      | 614        |
| 29.2 Le théorème d'Erdős-Kac et la loi normale . . . . .                                | 615        |
| 29.3 Écarts entre nombres premiers et lois de Poisson . . . . .                         | 617        |
| 29.4 Valeurs propres de matrices aléatoires . . . . .                                   | 619        |
| <b>30 Bosons, fermions et boltzmannions</b>                                             | <b>623</b> |
| 30.1 Le facteur de Boltzmann . . . . .                                                  | 623        |
| § 415. Théorie cinétique des gaz et statistiques non quantiques . . . . .               | 623        |
| § 416. « Nombre de complexions » d'un état . . . . .                                    | 625        |
| § 417. Un exemple (très) élémentaire . . . . .                                          | 626        |
| § 418. Le facteur de Boltzmann . . . . .                                                | 627        |
| 30.2 Statistiques quantiques . . . . .                                                  | 630        |
| § 419. L'entropie et le paradoxe de Gibbs . . . . .                                     | 630        |
| § 420. Fermions et bosons . . . . .                                                     | 632        |
| § 421. Nombre d'états occupés . . . . .                                                 | 634        |
| <b>31 Processus de Poisson</b>                                                          | <b>637</b> |
| § 422. Introduction : comment placer des points uniformément sur $\mathbb{R}^+$ ? . . . | 637        |
| § 423. Processus de comptage . . . . .                                                  | 638        |
| § 424. Processus de Poisson . . . . .                                                   | 638        |
| § 425. Caractérisation des processus de Poisson . . . . .                               | 639        |
| § 426. Processus marqués . . . . .                                                      | 640        |
| § 427. Distribution des instants d'arrivée . . . . .                                    | 641        |
| § 428. Effet physique : le bruit de grenaille . . . . .                                 | 641        |
| § 429. Âge et temps de vie résiduel . . . . .                                           | 641        |
| § 430. Processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ . . . . .                                  | 642        |
| § 431. Processus de Poisson sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .                                | 643        |
| <i>Exercices</i> . . . . .                                                              | 643        |
| <b>32 Mouvements browniens</b>                                                          | <b>645</b> |
| 32.1 Une approche heuristique . . . . .                                                 | 645        |
| § 432. L'observation de Robert Brown . . . . .                                          | 645        |
| § 433. Marche aléatoire discrète et passage à la limite continue . . . . .              | 646        |
| § 434. Limite continue — première approche . . . . .                                    | 647        |
| § 435. Limite continue — seconde approche . . . . .                                     | 648        |
| § 436. Une propriété du noyau de la chaleur . . . . .                                   | 650        |
| § 437. Limite continue d'une marche aléatoire asymétrique . . . . .                     | 651        |
| § 438. Marche aléatoire en dimension supérieure . . . . .                               | 651        |
| § 439. Temps moyen de visite . . . . .                                                  | 652        |
| § 440. Dernières remarques . . . . .                                                    | 653        |
| 32.2 Modélisation probabiliste . . . . .                                                | 654        |
| § 441. Définition . . . . .                                                             | 655        |
| § 442. La loi du mouvement brownien est la loi limite de marches aléatoires . .         | 656        |
| § 443. Loi du mouvement brownien ; mesure de Wiener . . . . .                           | 657        |
| § 444. Construction canonique du mouvement brownien . . . . .                           | 658        |
| § 445. Covariance . . . . .                                                             | 659        |
| 32.3 Propriétés des chemins browniens . . . . .                                         | 660        |
| § 446. Invariances . . . . .                                                            | 660        |
| § 447. Propriétés de régularité . . . . .                                               | 660        |
| § 448. Récurrence : le théorème de Pólya . . . . .                                      | 661        |

|                                                                                             |                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| § 449. Autres propriétés (*) . . . . .                                                      | 661            |
| § 450. Construction de Lévy-Ciesielski du mouvement brownien . . . . .                      | 662            |
| <b>32.4 Mouvement brownien, physique et potentiels . . . . .</b>                            | <b>664</b>     |
| § 451. Le modèle d'Einstein et la détermination de la constante d'Avogadro . . . . .        | 664            |
| § 452. Problème de Dirichlet et méthode de Monte-Carlo . . . . .                            | 664            |
| § 453. Mouvement brownien et potentiel capacitif . . . . .                                  | 667            |
| § 454. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ( $d = 1$ ) . . . . .               | 667            |
| § 455. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ( $d = 2$ ) . . . . .               | 668            |
| § 456. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ( $d \geq 3$ ) . . . . .            | 669            |
| <b>32.5 Annexes . . . . .</b>                                                               | <b>671</b>     |
| § 457. Détermination du noyau de la chaleur . . . . .                                       | 671            |
| § 458. Démonstration du théorème de Paley-Wiener-Zygmund . . . . .                          | 671            |
| <b>Exercices . . . . .</b>                                                                  | <b>673</b>     |
| <br><b>33 Estimation bayésienne . . . . .</b>                                               | <br><b>677</b> |
| § 459. Distribution <i>a priori</i> uniforme, et distribution <i>a posteriori</i> . . . . . | 677            |
| § 460. Choix d'une autre distribution <i>a priori</i> . . . . .                             | 680            |
| <b>Exercices . . . . .</b>                                                                  | <b>680</b>     |
| <br><b>34 Retour à pile ou face : loi de l'Arc sinus et séries aléatoires . . . . .</b>     | <br><b>681</b> |
| 34.1 L'iniquité flagrante d'un jeu équitable . . . . .                                      | 681            |
| § 461. La loi de l'Arc sinus . . . . .                                                      | 681            |
| 34.2 Séries harmoniques de signe aléatoire . . . . .                                        | 683            |
| § 462. Cas d'une pièce déséquilibrée . . . . .                                              | 684            |
| § 463. Cas équilibré . . . . .                                                              | 684            |
| 34.3 Rayon d'une série entière aléatoire . . . . .                                          | 686            |
| § 464. Le rayon est presque sûrement constant . . . . .                                     | 686            |
| § 465. Trois rayons sont possibles . . . . .                                                | 686            |
| <b>Exercices . . . . .</b>                                                                  | <b>688</b>     |
| <br><b>35 À propos de quelques paradoxes . . . . .</b>                                      | <br><b>691</b> |
| 35.1 Biais d'équiprobabilité . . . . .                                                      | 691            |
| § 466. Biais d'équiprobabilité : le paradoxe des deux cassettes . . . . .                   | 691            |
| § 467. Le problème de Monty Hall . . . . .                                                  | 692            |
| § 468. Retour au problème des deux cassettes . . . . .                                      | 693            |
| 35.2 Problèmes dus à l'interprétation de l'espérance . . . . .                              | 694            |
| § 469. L'espérance d'un jeu n'est pas un critère suffisant . . . . .                        | 694            |
| § 470. Paradoxe de Saint-Petersbourg . . . . .                                              | 694            |
| 35.3 Pseudo-paradoxes . . . . .                                                             | 697            |
| § 471. Le paradoxe de Walter Penney . . . . .                                               | 697            |
| <b>Exercices . . . . .</b>                                                                  | <b>698</b>     |

## Annexes

|                                                     |            |
|-----------------------------------------------------|------------|
| <b>A Éléments d'analyse et d'algèbre . . . . .</b>  | <b>703</b> |
| A.1 Suites . . . . .                                | 703        |
| A 1. Fini, dénombrable, indénombrable . . . . .     | 703        |
| A 2. Limite supérieure, limite inférieure . . . . . | 704        |
| A 3. Suites de Cauchy . . . . .                     | 704        |
| A 4. Comparaison de suites . . . . .                | 705        |
| A 5. Formule de Stirling . . . . .                  | 705        |
| A.2 Séries numériques . . . . .                     | 705        |

|                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| A 6. Définitions . . . . .                                                | 705 |
| A 7. Séries positives . . . . .                                           | 705 |
| A 8. Théorème de comparaison de séries positives . . . . .                | 706 |
| A 9. Produits infinis . . . . .                                           | 706 |
| A 10. Convergence absolue . . . . .                                       | 706 |
| A 11. Exponentielle complexe . . . . .                                    | 706 |
| A 12. Changement d'ordre de sommation . . . . .                           | 707 |
| A 13. Familles sommables positives . . . . .                              | 708 |
| A 14. Familles sommables de signes quelconques . . . . .                  | 708 |
| A 15. Théorème de Fubini pour les séries doubles . . . . .                | 708 |
| A 16. Sommation par paquets . . . . .                                     | 710 |
| A 17. Théorème de convergence dominée discrète . . . . .                  | 710 |
| A.3 Fonctions . . . . .                                                   | 710 |
| A 18. Continuité, continuité à droite . . . . .                           | 710 |
| A 19. Fonctions à variation bornée . . . . .                              | 711 |
| A 20. Fonctions absolument continues . . . . .                            | 711 |
| A 21. Fonction $\Gamma$ d'Euler . . . . .                                 | 711 |
| A 22. Fonction d'erreur, fonction de survie de la loi normale . . . . .   | 711 |
| A.4 Fonctions croissantes . . . . .                                       | 712 |
| A 23. Continuité, continuité à gauche, à droite . . . . .                 | 712 |
| A 24. Discontinuités de 1 <sup>re</sup> et 2 <sup>e</sup> espèce. . . . . | 712 |
| A 25. Sauts de discontinuité d'une fonction croissante . . . . .          | 713 |
| A 26. Régularité d'une fonction croissante . . . . .                      | 713 |
| A 27. Décomposition de Lebesgue . . . . .                                 | 713 |
| A 28. Une fonction singulière : la fonction de Cantor . . . . .           | 714 |
| A 29. Pseudo-inverse d'une fonction de répartition . . . . .              | 715 |
| A.5 Fonctions convexes . . . . .                                          | 716 |
| A 30. Fonctions convexes, strictement convexe, concaves . . . . .         | 716 |
| A 31. Caractérisation par la pente . . . . .                              | 717 |
| A 32. Caractérisation par la dérivée . . . . .                            | 717 |
| A 33. Cordes, tangentes et demi-tangentes . . . . .                       | 717 |
| A 34. Inégalités de Jensen . . . . .                                      | 718 |
| A.6 Modes de convergence de suites et séries de fonctions . . . . .       | 718 |
| A 35. Convergence simple et convergence uniforme . . . . .                | 718 |
| A 36. Théorèmes de Weierstrass . . . . .                                  | 719 |
| A 37. Séries de fonctions . . . . .                                       | 719 |
| A.7 Séries entières . . . . .                                             | 719 |
| A 38. Rayon . . . . .                                                     | 719 |
| A 39. Fonctions définies par une série entière . . . . .                  | 720 |
| A 40. Lemme radial d'Abel . . . . .                                       | 720 |
| A 41. Produit de Cauchy de deux séries entières . . . . .                 | 720 |
| A 42. Quelques sommes . . . . .                                           | 721 |
| A.8 Calcul intégral . . . . .                                             | 721 |
| A 43. Théorème de Fubini . . . . .                                        | 721 |
| A 44. Changement de variable dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .                | 722 |
| A 45. Produit de convolution . . . . .                                    | 722 |
| A 46. Quelques intégrales utiles . . . . .                                | 723 |
| A 47. Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .                   | 723 |
| A.9 Espaces de Hilbert . . . . .                                          | 723 |
| A 48. Espaces préhilbertiens . . . . .                                    | 723 |
| A 49. Espaces de Hilbert, bases hilbertiennes . . . . .                   | 724 |
| A 50. Théorème de projection orthogonale . . . . .                        | 725 |
| A.10 Transformée de Fourier . . . . .                                     | 725 |
| A 51. Transformée de Fourier d'une fonction intégrable . . . . .          | 725 |
| A 52. Distributions. Distributions tempérées . . . . .                    | 725 |
| A 53. Transformée de Fourier d'une distribution . . . . .                 | 726 |
| A.11 Dénombrement . . . . .                                               | 726 |
| A 54. Coefficients binomiaux . . . . .                                    | 726 |
| A 55. Formulaire pour les coefficients binomiaux . . . . .                | 727 |

|                                                                                                         |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| A 56. Nombres de Stirling . . . . .                                                                     | 727        |
| A.12 Topologie élémentaire . . . . .                                                                    | 729        |
| A 57. Ouverts, fermés . . . . .                                                                         | 729        |
| A 58. Espaces complets . . . . .                                                                        | 729        |
| A.13 Réduction, théorème spectral . . . . .                                                             | 729        |
| A 59. Adjoint . . . . .                                                                                 | 729        |
| A 60. Théorème spectral . . . . .                                                                       | 730        |
| A 61. Matrices symétriques positives, définies positives . . . . .                                      | 730        |
| A.14 Matrices positives . . . . .                                                                       | 730        |
| A 62. Rayon spectral . . . . .                                                                          | 730        |
| A 63. Matrices à coefficients positifs . . . . .                                                        | 730        |
| A 64. Matrices irréductibles, matrices ergodiques . . . . .                                             | 731        |
| <b>Exercices</b> . . . . .                                                                              | 732        |
| <b>B Davantage sur la mesure</b> . . . . .                                                              | <b>733</b> |
| B.1 Boréliens . . . . .                                                                                 | 733        |
| A 65. Boréliens de $\mathbb{R}$ . . . . .                                                               | 733        |
| A 66. Boréliens de $\mathbb{R}^n$ . . . . .                                                             | 735        |
| A 67. Boréliens de $\mathbb{R}^\infty$ . . . . .                                                        | 735        |
| A 68. Tribus produits, espaces produits . . . . .                                                       | 735        |
| B.2 Fonctions mesurables . . . . .                                                                      | 736        |
| A 69. Définition et premières propriétés . . . . .                                                      | 736        |
| A 70. Tribu engendrée par une variable aléatoire . . . . .                                              | 737        |
| B.3 Un complément au jeu de <i>pile</i> ou <i>face</i> . . . . .                                        | 738        |
| A 71. Additivité dénombrable de $\mathbf{P}_0$ sur la classe $\mathfrak{C}$ des cylindres (*) . . . . . | 738        |
| B.4 Le lemme de classe monotone . . . . .                                                               | 739        |
| A 72. $\pi$ -systèmes et classes monotones . . . . .                                                    | 739        |
| A 73. Première application : le lemme des coalitions . . . . .                                          | 741        |
| A 74. Deuxième application : rôle central de la fonction de répartition . . . . .                       | 742        |
| A 75. Le théorème d'extension de Carathéodory . . . . .                                                 | 743        |
| B.5 Le théorème de Radon-Nikodým . . . . .                                                              | 743        |
| A 76. Mesure absolument continue par rapport à une autre . . . . .                                      | 743        |
| A 77. Le théorème de Radon-Nikodým . . . . .                                                            | 743        |
| <b>Exercices</b> . . . . .                                                                              | 744        |
| <b>C Théorèmes d'existence</b> . . . . .                                                                | <b>747</b> |
| C.1 Quelques exemples simples de théorèmes d'existence . . . . .                                        | 747        |
| A 78. Existence d'une variable aléatoire de loi donnée . . . . .                                        | 747        |
| A 79. Un exemple de suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires indépendantes . . . . .            | 748        |
| A 80. Une suite de variables uniformes indépendantes . . . . .                                          | 749        |
| A 81. Une suite de variables indépendantes de lois quelconques données . . . . .                        | 750        |
| C.2 Le théorème fondamental de Kolmogorov . . . . .                                                     | 750        |
| A 82. Conditions de compatibilité et théorème d'extension . . . . .                                     | 750        |
| <b>D Lexique français-anglais</b> . . . . .                                                             | <b>753</b> |
| <b>Références</b> . . . . .                                                                             | <b>755</b> |
| <b>Index</b> . . . . .                                                                                  | <b>759</b> |

# Notations

| Abréviations                                   |                                                                                 |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| CNS                                            | condition nécessaire et suffisante                                              |
| p.s.                                           | presque sûre, presque sûrement                                                  |
| p.p.                                           | presque partout                                                                 |
| i.s.                                           | infinitement souvent                                                            |
| Ensembles                                      |                                                                                 |
| $\mathbb{N}$                                   | ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$                 |
| $\mathbb{P}$                                   | ensemble des entiers premiers $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$          |
| $\mathfrak{P}(\Omega)$                         | ensemble des parties de $\Omega$                                                |
| $A \cap B$                                     | intersection de A et B                                                          |
| $A \cup B$                                     | réunion de A et B                                                               |
| $A + B$ ou $A \sqcup B$                        | réunion disjointe de A et B ( $A \cap B = \emptyset$ , $A + B := A \cup B$ )    |
| $\sum A_n$ ou $\bigsqcup A_n$                  | réunion disjointe                                                               |
| $A \setminus B$                                | $= A \cap B^c$                                                                  |
| $A - B$                                        | $= A \setminus B$ , étant entendu que $B \subset A$                             |
| $A^c$                                          | complémentaire de A (dans $\Omega$ )                                            |
| $A_n \uparrow A$ , $A = \lim \uparrow A_n$     | limite croissante                                                               |
| $A_n \downarrow A$ , $A = \lim \downarrow A_n$ | limite décroissante                                                             |
| $A^* = \limsup A_n$                            |                                                                                 |
| $A_* = \liminf A_n$                            |                                                                                 |
| $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$                   | ensemble des matrices carrées d'ordre $n$                                       |
| $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$               | ensemble des vecteurs colonnes d'ordre $n$                                      |
| $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$                 | ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^k$ |
| Fonctions                                      |                                                                                 |
| $f(x^+)$ , $f(x+0)$                            | limite à droite $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h)$                               |
| $f(x^-)$ , $f(x-0)$                            | limite à gauche $\lim_{h \rightarrow 0^-} f(x+h)$                               |
| $f(+\infty)$                                   | limite en $+\infty$ : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$                       |
| $f(-\infty)$                                   | limite en $-\infty$ : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$                       |
| $f \otimes g$                                  | produit tensoriel $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$                                     |
| $f * g$                                        | produit de convolution                                                          |

| Lettres gothiques |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\mathfrak{A}$    | $\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{C}$ | $\mathfrak{D}$ | $\mathfrak{E}$ | $\mathfrak{F}$ | $\mathfrak{G}$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{I}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{K}$ | $\mathfrak{L}$ | $\mathfrak{M}$ | $\mathfrak{N}$ | $\mathfrak{O}$ | $\mathfrak{P}$ |
| A                 | B              | C              | D              | E              | F              | G              | H              | I              | J              | K              | L              | M              | N              | O              | P              |

| Probabilités                                                         |                                                                          |                      |
|----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| $\Omega$                                                             | univers, espace des épreuves                                             |                      |
| $\mathfrak{T}, \mathfrak{F}, \mathfrak{A}$                           | tribus (« T » et « F » gothiques) ou algèbres (« A »)                    |                      |
| $\omega$                                                             | réalisation du hasard (élément de $\Omega$ )                             |                      |
| $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$                                             | probabilités                                                             |                      |
| $X, Y, Z, T, \dots$                                                  | variables aléatoires                                                     |                      |
| $\mathbf{Cov}(X, Y)$                                                 | covariance du couple $(X, Y)$                                            |                      |
| $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}X$                                         | espérance de la variable $X$                                             |                      |
| $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}\{X \in B\}$                               | probabilité                                                              |                      |
| $\mathbf{V}(X)$                                                      | variance de la variable $X$                                              |                      |
| $\sigma_X$                                                           | écart-type de $X$                                                        |                      |
| $\mathfrak{N}(x)$                                                    | fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$                    | § 156                |
| $\mathfrak{n}(x)$                                                    | densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$                     | § 155                |
| $\{X \in A\}$                                                        | événement lié à une variable aléatoire                                   |                      |
| $\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}$                                      | probabilité produit                                                      | § 231                |
| $f \otimes g$                                                        | produit direct, ou tensoriel $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$            | § 22, § 181          |
| $X \wedge Y, X \wedge m$                                             | $\min(X, Y), \min(X, m)$                                                 |                      |
| $X'$                                                                 | variable centrée $X' = X - \mathbf{E}(X)$                                |                      |
| $X^*$                                                                | variable centrée réduite $X^* = (X - \mathbf{E}X)/\sigma_X$              |                      |
| $X^+$                                                                | $\max(X, 0)$                                                             | § 207                |
| $X^-$                                                                | $\max(-X, 0)$                                                            | § 207                |
| $X_n \xrightarrow{\text{ps}} X$                                      | convergence presque sûre                                                 | § 279                |
| $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$                                     | convergence en proba                                                     | § 281                |
| $X_n \xrightarrow{\mathbf{L}} X$                                     | convergence en loi (convergence étroite)                                 | § 288                |
| $X_n \xrightarrow{L^p} X$                                            | convergence dans $L^p$                                                   | § 286                |
| $X \sim \mathcal{L}$                                                 | $X$ suit la loi $\mathcal{L}$                                            |                      |
| $\mathcal{B}(p)$                                                     | loi de Bernoulli de paramètre $p$                                        | $p \in [0; 1]$       |
| $\mathcal{B}(n; p)$                                                  | loi binomiale de paramètres $n$ et $p$                                   | $n \in \mathbb{N}$ , |
| $\mathcal{E}(\alpha)$                                                | loi exponentielle de paramètre $\alpha$                                  |                      |
| $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$                                        | loi géométrique de paramètre $p$                                         |                      |
| $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$                                           | loi normale de moyenne $m$ et de variance $\sigma^2$                     |                      |
| $\mathcal{P}(\lambda)$                                               | loi de Poisson de paramètre $\lambda$                                    |                      |
| $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ | tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ , de $\mathbb{R}^n$                  |                      |
| $\mathfrak{T}, \mathfrak{E}, \dots$                                  | tribus                                                                   |                      |
| $\mathfrak{D}_X$                                                     | système complet induit par une variable discrète                         |                      |
| $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$                             | $\mathfrak{A}$ est plus fine que $\mathfrak{B}$                          |                      |
| $\sigma(X)$                                                          | tribu engendrée par $X$                                                  |                      |
| $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$                                       | tribu engendrée par $X_1, X_2, \dots, X_n$                               |                      |
| $\delta_a$                                                           | mesure de Dirac en $a$                                                   |                      |
| $\Delta(x, y)$                                                       | $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2; s \leq x, t \leq y\}$                        | § 176                |
| $\mathcal{L}^0(\Omega)$                                              | espace des variables aléatoires                                          | § 194                |
| $\mathcal{L}_+^0(\Omega)$                                            | espace des variables aléatoires positives                                | § 194                |
| $\mathcal{L}_b^0(\Omega)$                                            | espace des variables aléatoires bornées                                  | § 194                |
| $\mathcal{L}^1, L^1$                                                 | espaces des variables intégrables : $\mathbf{E} X  < +\infty$            | § 211                |
| $\mathcal{L}^2, L^2$                                                 | espaces des variables de carre intégrables : $\mathbf{E} X ^2 < +\infty$ | § 219                |
| $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$                                             | matrices de transition                                                   | § 393                |
| $\mathbf{P}(i, j), \mathbf{P}^{(i, j)}$                              | coefficients de $\mathbf{P}$ , de $\mathbf{P}^n$                         |                      |
| $\pi_n$                                                              | loi instantanée                                                          | § 398                |
| $\mathbf{P}_i$                                                       | probabilité conditionnée par $\{X_0 = i\}$                               | § 397                |
| $i \rightarrow j, i \leftrightarrow j$                               | $i$ mène à $j$ , communique avec $j$                                     | § 400                |
| $\mathbf{E}_g(\lambda, \mathbf{P})$                                  | sous-espace propre à gauche                                              | § 399                |

# Introduction

*Je considère que la théorie des probabilités n'est pas seulement une branche des mathématiques, et ne se limite pas à une collection harmonieuse d'axiomes et de théorèmes. À mon idée, le calcul des probabilités est un mode de pensée.*

Mark KAC, 1961.

## § 1 Les lois du hasard

Les termes qui reviennent le plus souvent dans un ouvrage de probabilité sont, paradoxalement, « loi » et « presque sûrement » — des locutions associées à la certitude plutôt qu'à l'aléatoire.

*Les lois du hasard,*

quel bel oxymore ! Et pourtant, c'est bien à étudier les lois (prévisibles) du hasard (par nature imprévisible) que Pascal, plusieurs Bernoulli, Tchebychev, Kolmogorov et autres grands mathématiciens se sont attachés. Que des certitudes puissent apparaître est sans doute un phénomène connu depuis longtemps : au cours d'un grand nombre de tirages, une pièce équilibrée doit mener au résultat *pile* avec une fréquence proche de  $1/2$ , et même d'autant plus proche que le nombre de tirages est grand. C'est presque une tautologie — si l'on observe une fréquence limite qui n'est pas  $1/2$ , on dira tout simplement que la pièce n'est pas équilibrée. Mais ce n'en est pas une : l'intérêt de la mathématisation du problème est de montrer que la fréquence observée admet *effectivement* une limite. Ce théorème, appelé *loi des grands nombres*, fut une révolution en soi : de qualitatif, l'étude du comportement du hasard est devenu quantitatif, et permet donc de prédire des nouveaux phénomènes.

Voici un exemple graphique, plus élaboré mais frappant : ci-dessous, à gauche, une représentation d'une matrice carrée  $A$ , dont les coefficients ont été tirés « au hasard » dans l'intervalle  $[-1; 1]$ . Chaque valeur de gris correspond à une valeur réelle ( $-1$  pour noir,  $1$  pour blanc). Maintenant, inversons cette matrice<sup>(1)</sup> et ob-

---

(1). Elle est sans doute inversible, comme doivent l'être la plupart des matrices dont les

servons, à droite, le résultat (le noir correspond maintenant à la valeur du plus petit coefficient, le blanc à celle du plus grand).

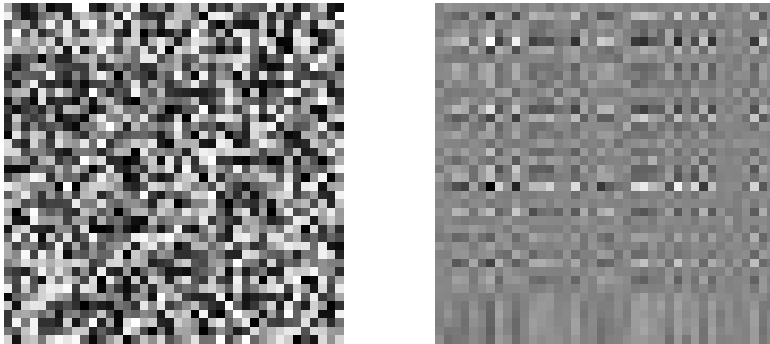


FIGURE 0.1 — À gauche : Une matrice carrée aléatoire à coefficients dans  $[-1; 1]$ . À droite : L'inverse de cette matrice.

Que s'est-il passé ? L'aspect « nettement aléatoire » de la première figure a disparu, remplacé par une sorte de motif écossais délavé. Un ordre a surgi du hasard !

### But de la théorie

On dit parfois en manière de plaisanterie que *le but de la théorie des probabilités est de calculer des probabilités*.

Cette galéjade cache un réel malaise : la notion de probabilité telle qu'étudiée par un mathématicien est sans aucun doute très éloignée de la notion qu'en auront un physicien, un philosophe, ou le fameux homme de la rue (quand il n'est pas philosophe ou mathématicien). La notion elle-même est suffisamment fuyante pour qu'il soit confortable de se cacher derrière les formules et les techniques de calcul et éluder la question de la signification, en la laissant à d'autres.

- La première interprétation, et la plus fréquente, est statistique, et résumée par la formule « nombre de cas favorables sur nombre total de cas ». Mais très rapidement, on en vient à manipuler des nombres infinis et un appareillage mathématique plus sophistiqué est requis. On doit alors faire un saut conceptuel et construire, en confiance, un *modèle*, dont on espère qu'il décrira le monde avec la précision et les propriétés voulues. Pour tester ce modèle, on peut tenter de répéter une expérience un grand nombre de fois, et calculer une fréquence limite. Plusieurs problèmes se posent alors : que veut dire un grand nombre de fois ? que veut dire répéter une expérience ? La réponse mathématique est de considérer des *suites de variables aléatoires indépendantes*, et d'établir des théorèmes affirmant que, sous certaines conditions, la fréquence limite observée est bien la valeur attendue.
- Il existe d'autres interprétations. Pour certains, les probabilités objectives n'existent pas, il n'existe que des probabilités subjectives, qui mesurent notre degré de confiance en certains événements.
- Enfin, on peut se débarrasser des difficultés conceptuelles en les ignorant tout simplement : on décide de s'abstraire entièrement du contexte historique des probabilités, et de n'envisager la théorie que comme un pro-

---

coefficients sont des réels choisis « au hasard ». Le lecteur sera invité à réfléchir à ce problème ultérieurement.

longement de la théorie de la mesure et de l'intégration. On peut alors axiomatiser entièrement la théorie, la débarrasser de tous les problèmes d'interprétation, de toute référence à des situations concrètes, et réduire la théorie des probabilités à une branche mathématique aussi pure, aussi nette que les autres. Ce point de vue a un côté stérile. Bien que le véritable essor des probabilités n'ait pu avoir lieu qu'une fois l'axiomatisation correctement faite et une théorie de l'intégration profondément ancrée dans le sol mathématique, il n'en reste pas moins que la motivation à la base des travaux les plus cruciaux se rattache à des situations concrètes : phénomènes physiques ou biologiques, calculs de risques, détermination de stratégies. Quoi que l'on fasse, les probabilités restent une branche unique des mathématiques, avec ses propres méthodes et, surtout, ses propres types de raisonnements<sup>(2)</sup>.

Comme à chaque fois que les mathématiciens s'approprient un concept — le hasard n'a appartenu, des siècles durant, qu'au champ de la philosophie, de la métaphysique ou des controverses de comptoir —, les outils mathématiques qu'ils créent deviennent en eux-mêmes un objet d'étude. Une part importante de tout ouvrage de probabilités est consacrée à l'étude des concepts et des méthodes spécifiques au champ d'étude du hasard, qui ont pour noms *variables aléatoires*, *indépendance*, *fonction de répartition*, *espérance*, *convergence presque sûre*, *convergence en loi*, etc.

### § 3 Quelques mots sur l'ouvrage

Aucune connaissance spécifique aux probabilités n'est requise pour aborder l'ouvrage, qui commence par une introduction heuristique aux idées et au langage de l'aléatoire. Cette partie est indépendante du reste de l'ouvrage<sup>(3)</sup>.

Les mathématiques nécessaires à la compréhension du texte sont rappelées en annexe<sup>(4)</sup>.

L'ouvrage est découpé en plusieurs parties :

- La partie I présente, de manière assez informelle, les idées essentielles de la théorie (probabilités conditionnelles, indépendance, variables aléatoires, espérance), ainsi que les problèmes théoriques auxquels on est confronté lorsque l'on manipule des univers infinis.
- La partie II débute par un chapitre assez formel sur les espaces probabilisés. Ce chapitre peut être lu en deux temps : dans un premier temps, seuls les passages balisés par le symbole « ► » peuvent être étudiés. Suivent les notions de probabilité conditionnelle et d'indépendance. Le reste de la partie traite de deux grandes classes de variables aléatoires (discrètes et à densité), et est tourné vers l'étude pratique. Il correspond globalement au niveau des probabilités exigées en début de cycle universitaire, en classes préparatoires ou au CAPES de mathématiques. Un interlude sur le jeu de *pile* ou *face* présente, par anticipation, quelques résultats intéressants.

---

(2). De nombreux résultats, d'une grande profondeur, ont été établis *avant* (ou *sans*) le cadre axiomatique désormais universellement utilisé. Le lecteur est très vivement incité à lire le merveilleux ouvrage de William FELLER [34], totalement dénué de théorie de la mesure.

(3). Le lecteur pressé d'en découdre avec des définitions plus formelles peut la sauter ; on trouvera des renvois aux exemples importants qui s'y trouvent dans le texte principal.

(4). Pour la partie II, seules la théorie des séries et les rudiments de calcul différentiel et intégral sont nécessaires.

Les parties III et IV font parfois référence à l'intégrale de Lebesgue, sans qu'une connaissance approfondie du sujet soit nécessaire ; notamment, la construction explicite de l'espérance est effectuée sans appel à des connaissances extérieures. Dans cet esprit, nous avons réduit l'importance de l'utilisation des fonctions caractéristiques, sans tout à fait les supprimer.

- La partie III généralise, de manière plus théorique, les résultats de la partie précédente. On y présente la construction générale de l'espérance d'une variable aléatoire, permettant de prouver différentes propriétés admises pour les variables aléatoires à densité, et permettant également de « passer à la limite ». (Deux chapitres peuvent être omis en première lecture : celui sur les fonctions caractéristiques et celui sur les vecteurs gaussiens.) Cette partie est plus du niveau de fin de cycle de licence ou de début de maîtrise, et pourra intéresser également les candidats au concours de l'Agrégation externe.
- La partie IV présente les « théorèmes limites » : après avoir abordé la notion générale de convergence, on étudie les lois de type « zéro-un », les lois des grands nombres et le théorème central limite.
- La partie V présente des applications diverses des probabilités, et les chapitres sont totalement indépendants les uns des autres. Le choix des sujets reflète sans doute davantage les goûts de l'auteur qu'autre chose. Nous conseillons entre autres au lecteur de lire le chapitre sur la simulation informatique d'une loi de probabilités, et de jouer avec un ordinateur...

Nous n'avons pas cherché à *unifier* cette présentation succincte de la vaste théorie des probabilités ; au contraire, nous avons cherché à en *diversifier* les points de vue. Ainsi, certaines notions peuvent être définies jusqu'à trois ou quatre fois, selon le degré de généralité ou d'abstraction cherché, selon le but que l'on recherche<sup>(5)</sup>, voire selon le public visé<sup>(6)</sup>. Un désagrément possible pour le lecteur est de devoir lire, parfois, des explications trop détaillées de passages qu'il jugera triviaux, à côté de passages nettement plus difficiles — signalés comme tels par une taille de caractères plus petite, ou par un astérisque (\*).

Enfin, dernière chose, mais non des moindres, nous avons essayé d'*illustrer* le texte au maximum ; nous accueillerons avec beaucoup de gratitude toute remarque, suggestion ou proposition d'ajout concernant les figures.

Un *index*, que nous espérons le plus complet possible, permet de s'y retrouver. Les entrées peuvent être multiples (par exemple, la notion de *convergence en loi* peut être recherchée aussi bien à l'entrée *Convergence* qu'à celle de *Loi*).

Le symbole de la main qui écrit « ✎ », dans la marge extérieure du texte, informe le lecteur de l'existence d'un exercice proche de ce qui vient d'être dit, et qui peut être traité sur-le-champ. Les exercices sont regroupés en fin de chapitres, et suivis, la plupart du temps, d'indications et/ou d'une correction détaillée. #0.1

- Les paragraphes du texte principal sont numérotés en continu, de § 1 à § 471.
- Les paragraphes des annexes sont également numérotés en continu, de A 1 à A 82.

## Rosencrantz et Guildenstern

Un dernier mot : lors d'expériences (de pensée) mettant en scène deux protagonistes, ceux-ci seront conventionnellement appelés Rosencrantz et Guildenstern, en référence à une pièce de Tom Stoppard, *Rosencrantz and Guildenstern are*

§ 4

(5). Par exemple, une définition abstraite de l'espérance d'une variable aléatoire telle que celle donnée à la page 337 possède un haut degré de généralité. Elle ravira ceux qui y verront un parallèle avec la théorie de l'intégration selon Lebesgue. Mais elle n'est pas effective, au sens où elle ne permet pas de calculer cette espérance de manière simple. Une autre définition, utilisant l'intégrale de Stieltjes, permet d'enrichir ce point de vue.

(6). Bien que les probabilistes usent de préférence de la fonction de répartition — et ils ont bien raison — les physiciens préféreront sans doute utiliser la densité de probabilité, fût-elle définie au sens des distributions — et ils ont raison également.

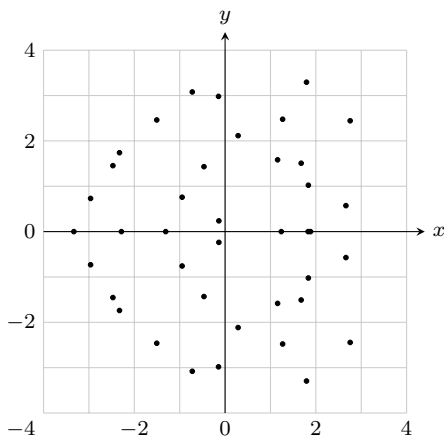
*dead* [93, 94]. La scène initiale de la pièce représente nos deux héros — personnages mineurs de *Hamlet* — en train de disputer une interminable partie de *pile* ou *face*, dont tous les tirages se soldent par un *face* et le passage d’une pièce de la bourse de Guildenstern à celle de Rosencrantz.

## EXERCICE

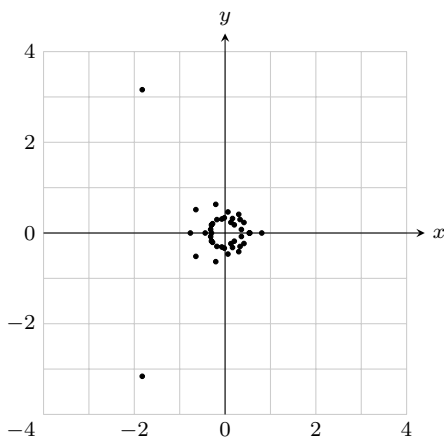
♦ **Exercice 0.1** Expliquer *qualitativement* l’allure de la matrice de droite dans la figure 0.1 : pourquoi ce motif écossais ? Pourquoi la matrice est-elle d’aspect plus terne que la précédente ?

### Indications

◇ *Indication 0.1* : La matrice  $M$  initiale a de grandes chances d’être diagonalisable (en tant que matrice complexe). Voici son spectre dans le plan complexe.



Que devient le spectre lorsque l’on calcule l’inverse de la matrice ? Et notamment, que deviennent les « petites » valeurs propres ? La figure ci-dessous est représentative...



Enfin, représenter (informatiquement) une matrice « aléatoire » de petit rang (1, 2, 3,...)

# Chapitre 1

## Probabilités

(approche heuristique)

*Hasard ?  
Mets que font les fripons pour les sots qui le mangent.  
Point de hasard !*

VICTOR HUGO  
Ruy Blas, acte IV, scène VII.

*Ce chapitre, ainsi que le suivant, présente un panorama rapide du langage et des concepts les plus importants dans la théorie des probabilités :*

- *l'univers des possibles, qui est la collection de toutes les « possibilités de réalisation du hasard » ;*
- *notion d'événement — une partie de l'univers des possibles, dont on va quantifier l'importance, soit par comptage, soit par une mesure plus sophistiquée ;*
- *notion de probabilité conditionnée par un événement, et notion d'indépendance d'événements.*

*Des exemples simples sont présentés, ainsi qu'un premier exemple non trivial, permettant de modéliser une succession infinie de tirages à pile ou face — expérience que l'on peut qualifier de fondamentale dans l'approche théorique des probabilités.*

### 1.1 LE LANGAGE DE L'ALÉATOIRE

#### Phénomènes aléatoires

§ 5

On parle de phénomène aléatoire lorsque, en recommençant une expérience dans des conditions aussi semblables que possible, le résultat de cette expérience est variable et échappe à toute prévision absolue. À ce titre, le jeu de dé est l'archétype même de l'expérience que l'on associe au hasard<sup>(1)</sup>.

---

<sup>(1)</sup>. Le nom latin du dé, *alea*, a donné le terme « aléatoire ». Le mot arabe *az-zahr*, signifiant « le dé » et passant par l'espagnol *azar*, a lui-même conduit à « hasard ». Quant à la manière

# Chapitre 2

## Variables aléatoires

(approche heuristique)

*Ce calcul délicat s'étend aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité.*

*Pierre-Simon, marquis de LAPLACE,  
dédicace (à Napoléon) de sa Théorie analytique des probabilités,  
1812.*

*Pour décrire une quantité  $X$  pouvant prendre des valeurs « aléatoires », il suffit de définir une fonction  $X$  sur l'ensemble  $\Omega$ . Ainsi, à chaque « possibilité du hasard »  $\omega$ , la quantité  $X(\omega)$  est déterminée.*

*Contrairement à ce qui se passe souvent en analyse, ce n'est pas  $X$  en tant que fonction qui présente un intérêt. Les notions usuelles de continuité ou de dérivabilité, centrales en analyse, n'ont ici aucun sens, puisque l'on n'a pas défini a priori de notion de « proximité » entre les  $\omega$ , c'est-à-dire de topologie sur  $\Omega$ . D'ailleurs, la plupart du temps,  $\Omega$  est inconnu et on ne se soucie pas de le définir correctement : tel le système d'exploitation de qualité, il travaille en tâche de fond et se fait oublier de l'utilisateur. Pour le probabiliste, ce qui compte est : avec quelle fréquence  $X$  prend-elle telle ou telle valeur ? On cherche ainsi à répondre à des questions du type :*

- quelle est la probabilité que  $X(\omega)$  prenne ses valeurs dans l'intervalle  $[a; b]$  ?*
- quelle est la probabilité que  $X(\omega)$  soit égale précisément à 0 ?*
- quelle est la probabilité que  $|X(\omega)| > 42$  ?*
- ou plus généralement, si  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , quelle est la probabilité que  $X(\omega)$  soit dans  $A$  ?*

*On résume l'ensemble de ces questions sous la formule : comment les valeurs prises par  $X$  sont-elles distribuées ? La donnée quantitative de cette propriété s'appelle la **loi** (de distribution) de  $X$ . Nous verrons — chose remarquable — qu'elle est entièrement déterminée par la réponse à la question : pour chaque réel  $x$ , quelle est la probabilité que  $X(\omega)$  soit inférieur ou égal à  $x$  ?*

# Chapitre 3

## Espaces probabilisés

*Si les mathématiques — système spécialisé de quelques signes, fondé sur l'intelligence et gouverné par elle — impliquent des situations insaisissables, et sont l'objet de permanentes discussions, que dire des obscurités du langage, amas confus de milliers de symboles maniés presque au hasard ?*

*Jorge Luis BORGES, La jouissance littéraire*

*Le formalisme désormais employé dans la théorie des probabilités est celui que Kolmogorov introduisit dans ses Méthode analytiques de la théorie des probabilités [61] de 1931, et surtout dans son opuscule Fondements de la théorie des probabilités [62] paru en 1933<sup>(1)</sup>; bien que cette axiomatisation soit aujourd'hui d'un usage bien établi<sup>(2)</sup>, elle mit longtemps à s'imposer, et ne fut guère connue avant les années 50.*

*L'un des grands mérites de Kolmogorov fut d'avoir fourni un cadre entièrement abstrait à la théorie — qui n'est mise en parallèle avec l'expérience commune que dans le cas des probabilités finies —, cadre qui permet la généralisation de quelques notions intuitives et simples à des situations où, a priori, aucun calcul ne semblait possible. Pour cela, il fait en permanence appel à des éléments de théorie des ensembles, et notamment à la notion de tribu (ou  $\sigma$ -algèbre), déjà évoquée au chapitre 1.*

*Dans ce chapitre, nous passons en revue le vocabulaire nécessaire à la bonne compréhension du reste de l'ouvrage; le lecteur est invité à parcourir, sans forcément s'y attarder en première lecture, les grandes lignes de ce formalisme — mais à s'y reporter chaque fois que le besoin s'en fera ressentir. Les points les plus importants sont signalés, en marge, par un ou deux symboles « ► » ou « ◀ ». Au contraire, certains passages signalés par un astérisque (\*) peuvent être omis en première lecture.*

---

(1). Ce petit livre est encore très lisible malgré son âge et en dépit de notations surprenantes pour le lecteur d'aujourd'hui, comme  $\bigcup_n A_n$  pour l'union, ou  $\bigcap_k A_k = A_1 A_2 \cdots A_n$  pour l'intersection. La structure de la présentation a manifestement influencé un nombre incalculable d'ouvrages sur le sujet ! L'influence considérable de Kolmogorov en mathématiques est présentée de manière très agréable dans l'ouvrage de Charpentier, Lesne et Nikolski [16].

(2). Ce qui n'empêche pas d'autres types de présentation; l'excellent ouvrage de Rényi [86] propose une approche alternative des espaces probabilisés, en prenant comme modèle de base les espaces de probabilités conditionnelles, dont les espaces usuels de Kolmogorov ne sont que des cas particuliers.

# Chapitre 4

## Conditionnement

*On a une chance sur dix mille, quand on prend un avion, qu'il y ait une bombe à l'intérieur. Mais on n'a qu'une chance sur cent millions qu'il y en ait deux. Alors, pour plus de sécurité, emportez votre bombe.*

Notre intuition des probabilités est souvent basée sur des probabilités conditionnées par un événement (« quelle est la probabilité qu'il pleuve aujourd'hui sachant qu'on est en novembre » n'obtient pas la même réponse que la même question « sachant qu'on est en juin »). La formalisation d'une probabilité conditionnelle, pour aisée qu'elle soit, permet d'établir les premiers outils de calcul de la trousse de survie du probabiliste (occasionnel ou enragé) :

- formule des probabilités composées ;
- formule des probabilités totales ;
- théorème de Bayes.

### Probabilités conditionnelles

§ 58

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé. Si  $A$  est un événement, on souhaite donner un sens à « la probabilité qu'un événement  $B$  soit réalisé, sachant que  $A$  est réalisé », comme il a été présenté dans le chapitre 1. On ne s'intéresse qu'aux expériences dont le résultat réalise  $A$ , les autres étant purement et simplement écartées du décompte. Sous ces conditions,  $B$  est réalisé si et seulement si  $A \cap B$  l'est. Tout se passe comme si l'on choisissait le nouvel univers  $\Omega' := A$  et qu'on le munissait d'une nouvelle probabilité  $\mathbf{P}_A$ , telle que  $\mathbf{P}_A(B)$  soit proportionnelle à  $\mathbf{P}(A \cap B)$ . Pour cela, il est donc nécessaire de supposer que  $\mathbf{P}(A) > 0^{(1)}$ , et la condition de normalisation  $\mathbf{P}_A(A) = 1$  mène naturellement à la définition qui suit<sup>(2)</sup>.

**Définition 4.1** Soit  $A$  un événement de probabilité non nulle :  $\mathbf{P}(A) > 0$ . Pour tout événement  $B$ , on définit la **probabilité conditionnelle de  $B$  sachant  $A$**  comme le réel, noté  $\mathbf{P}_A(B)$  ou  $\mathbf{P}(B | A)$ , valant

$$\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B | A) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

<sup>(1)</sup>. Le cas où  $\mathbf{P}(A) = 0$  est beaucoup plus délicat à gérer ; des techniques spécifiques sont expliquées au chapitre 24.

<sup>(2)</sup>. On notera que l'univers est toujours  $\Omega$ , et non  $A$  ; tout ce qui est en dehors de  $A$  est cependant considéré comme *négligeable*.

# Chapitre 5

## Indépendance (1/2)

*Les chiffres sont dénués de toute imagination, tu devrais donc te garder de leur accorder trop d'importance.*

Jón Kalman STEFÁNSSON, *Entre ciel et terre*

*D'une certaine manière, la notion d'indépendance est la notion qui fait que la théorie des probabilités ne se réduit pas à un cas particulier de la théorie générale des espaces mesurés, et a développé, au cours de plus de trois siècles d'existence, ses méthodes propres.*

### 5.1 INDÉPENDANCE D'ÉVÉNEMENTS ET DE TRIBUS

#### Indépendance de deux événements

§ 63

D'un point de vue intuitif, si un événement A semble n'avoir pas d'effet, du point de vue probabiliste, sur un événement B, alors on s'attend à ce que le calcul de la probabilité de B, conditionné par la connaissance de la réalisation (ou non) de l'événement A, conduise au même résultat que le calcul absolu de cette même probabilité, c'est-à-dire

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B \mid A^c) = \mathbf{P}(B).$$

Multipliant cette égalité par la probabilité de A, on obtient  $\mathbf{P}(B \cap A) = \mathbf{P}(B) \mathbf{P}(A)$  ; cette dernière forme est sans doute meilleure que la première, car elle est symétrique et met sur le même plan les événements A et B. De plus, elle ne fait pas appel à une probabilité conditionnelle pour laquelle le cas  $\mathbf{P}(A) = 0$  est problématique.

*Exemple 5.1 (Cas fini : nombre de cas favorables sur nombre de cas total)* Revenons au cas, extrêmement simple, mais fondateur du raisonnement sur les probabilités, où  $\Omega$  est un ensemble fini de cardinal N, muni d'une probabilité uniforme. À un événement A de cardinal k, on associe la probabilité  $\mathbf{P}(A) = k/N$  (nombre de cas favorables sur nombre de cas total).

Dire que les événements A et B sont indépendants revient à dire que la connaissance de la réalisation (ou non) de A n'influe pas sur la probabilité de B, conditionnée par cette réalisation : en d'autres termes, que les rapports

$$\frac{\text{nombre de cas où B est réalisé en même temps que A}}{\text{nombre de cas où A est réalisé}}$$

# Chapitre 6

## Variables aléatoires discrètes

*Les variables ne prenant qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs jouent un rôle particulier dans la théorie des probabilités : outre qu'elles sont naturelles dans les problèmes de dénombrement, elles permettent également de comprendre et de démontrer de nombreux résultats généraux de la théorie des probabilités sans avoir recours aux outils sophistiqués de la théorie de la mesure.*

*Les trois chapitres qui suivent traitent de ces variables, du point de vue théorique comme du point de vue pratique.*

### 6.1 VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Dans tout ce chapitre,  $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$  est un espace probabilisé ; de plus, les variables aléatoires considérées seront toujours, sans que l'on prenne la peine de le préciser, à valeurs réelles.

#### Variable simple, variable discrète

§ 70

Soit  $(\Omega, \mathfrak{T})$  un espace probabilisable (qui pourra la plupart du temps être considéré comme un ensemble fini ou dénombrable muni de sa tribu la plus riche, à savoir  $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(\Omega)$ ). Une **variable aléatoire (réelle) discrète** sur  $(\Omega, \mathfrak{T})$  est une variable aléatoire  $X$  telle que  $X(\Omega)$  est un ensemble réel fini ou dénombrable. On dit que  $X$  est une **variable aléatoire simple** si  $X(\Omega)$  est un ensemble fini.

L'ensemble  $X(\Omega)$  est appelé **univers-image** ou **ensemble des valeurs prises par  $X$**  ou **ensemble des réalisations de  $X$**  ; on le notera génériquement

$$X(\Omega) = \{x_k ; k \in K\}$$

où  $K = \{1, 2, \dots, n\}$  si  $X(\Omega)$  est un ensemble fini, et  $K = \mathbb{N}$  ou  $K = \mathbb{N}^*$  si  $X(\Omega)$  est strictement dénombrable.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour toute partie  $A \subset \mathbb{R}$ , on note

$$\{X = x\} = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) = x\}$$

et

$$\{X \in A\} = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in A\}.$$

La probabilité associée à ces événements sera notée  $\mathbf{P}\{X = x\}$  et  $\mathbf{P}\{X \in A\}$  plutôt que  $\mathbf{P}(\{X = x\})$  et  $\mathbf{P}(\{X \in A\})$ .

# Chapitre 7

## Espérance d'une variable aléatoire discrète

*Voici enfin les notions d'espérance, de moments, de variance, ainsi que les premières grandes inégalités (Bienaymé-Tchebychev et Cauchy-Schwarz) qui jouent un rôle central dans toute la théorie des probabilités. Dans le cas d'une variable discrète, ces notions ne présentent pas de difficulté théorique, et les diverses propriétés que nous pouvons démontrer rigoureusement dans ce cas particulier sont en fait des propriétés qui restent vraies en toute généralité, mais qui sont alors plus difficiles à démontrer.*

*Nous introduisons également les fonctions génératrices associées aux variables à valeurs entières, naturelles dans les problèmes de comptage.*

*Pour terminer, nous appliquons les outils présentés à un problème bien connu, celui du collectionneur de vignettes.*

### 7.1 ESPÉRANCE

#### Espérance

La notion d'*espérance mathématique* d'une variable aléatoire généralise celle de *moyenne pondérée* que même les moins matheux connaissent — qui, enfant, n'a pas calculé sa moyenne trimestrielle en tenant en compte des coefficients de chaque matière ? Soit  $X$  une variable aléatoire **simple**, c'est-à-dire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs  $x_1, \dots, x_n$  avec des probabilités respectives  $p_k = \mathbf{P}\{X = x_k\}$ , où bien entendu  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ . La moyenne pondérée de ces valeurs, notée  $\mathbf{E}(X)$  ou  $\mathbf{EX}$ , est appelée **espérance (mathématique)** de  $X$  :

$$\mathbf{EX} = \mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k.$$

*Exemple 7.1* Considérons un univers  $\Omega$  et une partition finie  $\Omega = A + B + C$  de cet univers. On suppose que  $X$  prend la valeur  $a$  sur  $A$ , la valeur  $b$  sur  $B$  et la valeur  $c$  sur  $C$ . On suppose de plus que  $\mathbf{P}(A) = 1/3$ ,  $\mathbf{P}(B) = 1/2$  et  $\mathbf{P}(C) = 1/6$ . Alors

# Chapitre 8

## Couples de variables aléatoires discrètes

*L'exemple le plus simple de vecteur aléatoire est donné par un couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires discrètes. Étudier la loi d'un tel couple revient donc à déterminer les probabilités élémentaires notées indifféremment*

$$\mathbf{P}\{X = x, Y = y\}, \quad \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}\{(X, Y) = (x, y)\}.$$

- Dans une première partie, nous relierons la loi du couple aux lois marginales, qui sont les lois des seules variables  $X$  ou  $Y$  ; nous étudions également la loi de variables de la forme  $\varphi(X, Y)$ .
- Nous nous concentrons ensuite sur le cas particulier des variables indépendantes, notamment sur l'espérance  $\mathbf{E}(XY)$  de leur produit et sur la loi de leur somme  $X + Y$ .
- Nous enchaînons sur l'étude de la covariance d'un couple et sur la définition de son coefficient de corrélation.
- Enfin, nous abordons la notion d'espérance conditionnelle qui, dans le cas de variables discrètes, ne pose aucune difficulté théorique. Cette thématique sera reprise dans la suite (chapitre 24).
- Pour terminer le chapitre, on traite un exemple de sommation d'un nombre aléatoire de variables aléatoires, avec application à l'étude de l'extinction d'une espèce ou d'un nom de famille.

### Position du problème

On se place dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$  et on suppose que l'on a deux variables aléatoires réelles discrètes,  $X$  et  $Y$ . Connaître la loi de  $X$  et la loi de  $Y$  ne permet pas, en général, de déterminer la probabilité que le couple  $(X, Y)$  prenne une valeur  $(x, y)$  donnée.

Donnons un exemple. On définit l'univers  $\Omega := \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ , et on suppose que l'on connaît deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  de même loi

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = \mathbf{P}\{Y = 0\} = 0, 3$$

$$\mathbf{P}\{X = 1\} = \mathbf{P}\{Y = 1\} = 0, 5$$

$$\mathbf{P}\{X = 2\} = \mathbf{P}\{Y = 2\} = 0, 2$$

# Chapitre 9

## Interlude : le jeu de pile ou face

*Dans ce chapitre, nous explorons quelques propriétés élémentaires du jeu de pile ou face. Après avoir défini un espace probabilisé permettant de modéliser une succession infinie de tirages, on s'intéresse à la loi de la longueur de séquences homogènes, puis à un jeu consistant à parier sur la sortie d'une séquence particulière (PPF) avant une autre (FPP). Cela nous permet d'aborder la théorie des événements régénératifs. Enfin, nous terminons par un parallèle entre les suites de tirages à pile ou face et les probabilités continues, via le théorème de Borel sur les nombres normaux, parallèle qui mènera à deux conclusions :*

- *une suite de variables de Bernoulli indépendantes ou un réel de  $[0; 1[$ , c'est (presque) pareil ;*
- *il est possible de prouver (avec une certitude absolue, et non pas presque sûrement) l'existence de nombres possédant certaines propriétés, en utilisant l'attrait des probabilités, et ce bien qu'aucune des propriétés calculées n'ait un quelconque rapport avec le hasard.*

### 9.1 FORMALISATION

#### Espace probabilisé associé à une partie infinie de *pile* ou *face*

§ 133

Par convention, les lettres P et F représentent l'issue d'un tirage à *pile* ou *face* ; on les identifiera conventionnellement avec les valeurs numériques  $P = 1$  et  $F = 0$ , ou avec des notions de succès ( $P = \text{succès}$ ,  $F = \text{échec}$ ).

On modélise l'expérience consistant à tirer une infinité de fois à *pile* ou *face* par l'espace  $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$ , que l'on munit d'une tribu  $\mathfrak{T}$  et d'une probabilité  $\mathbf{P}$  définie sur cette tribu. Un élément  $\omega$  de  $\Omega$  est donc une suite

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots) \quad \omega_k \in \{P, F\}.$$

Avant de déterminer quelle tribu choisir, on s'accorde d'abord sur les « événements » dont on exige, *a minima*, qu'ils soient dans  $\mathfrak{T}$ . Par exemple, on aimerait pouvoir parler de l'ensemble des parties telles que le troisième tirage est *pile* et le cinquième *face*.

# Chapitre 10

## Variables aléatoires à densité

*En l'absence (temporaire) d'une théorie de la mesure et, notamment, de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{R}^n$  ainsi que du cortège de théorèmes d'intégration qui lui est associée, les trois chapitres qui suivent, et qui traitent tous de variables à densité, présentent un certain nombre de résultats non démontrés, mais justes (!) ; l'accent est mis sur la pratique. La théorie justifiant les méthodes proposées fait l'objet des chapitres 14 à 16.*

*Dans ce chapitre,*

- nous définissons les variables à densité (qu'on appelle aussi variables absolument continues) ;
- nous présentons les lois classiques (uniforme, exponentielle et normale, notamment) ;
- enfin, nous établissons les formules utiles lors d'un changement de variable aléatoire  $Y = \varphi(X)$ .

### À propos de l'intégrabilité des fonctions

Nous rappelons un résultat essentiel de la théorie de l'intégration : si  $f$  est une fonction à valeurs positives et possédant la régularité nécessaire<sup>(1)</sup>, alors on peut définir l'intégrale de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  :

- si  $f$  est intégrable, la quantité  $\int_{-\infty}^{+\infty} f$  est finie ;
- si  $f$  n'est pas intégrable,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f = +\infty$ .

Nous utiliserons librement cette propriété, notamment lors de la preuve de l'intégrabilité d'une fonction.

Si  $f$  est une fonction à valeurs réelles (pas forcément positives), la situation est un tout petit peu plus compliquée ; l'intégrabilité de  $f$  est équivalente à la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f| < +\infty.$$

Notamment, la quantité  $\int_{-\infty}^{+\infty} f$  peut être définie<sup>(2)</sup> sans que la fonction  $f$  soit intégrable.

Enfin, les fonctions considérées dans ce chapitre auront toujours, même si ce n'est pas précisé, la régularité voulue pour les intégrer, au moins localement.

---

(1). Selon le niveau d'abstraction et de raffinement cherché,  $f$  peut être continue par morceaux, ou mesurable et localement intégrable.

(2). Au sens de la limite de  $\int_A^B f$  quand les bornes  $A$  et  $B$  tendent respectivement vers  $-\infty$  et  $+\infty$ .

# Chapitre 11

## Espérance d'une variable aléatoire à densité

*Par analogie avec le cas discret, nous donnons ici une définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité. La plupart des propriétés de l'espérance — linéarité, formule de transfert — sont provisoirement admises. Elles seront toutes justifiées dans le chapitre 15, qui requiert une approche théorique plus élaborée. Ici, l'accent est mis sur l'utilisation pratique de ces propriétés.*

### 11.1 ESPÉRANCE ET MOMENTS

#### Espérance

§ 165

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, la notion d'espérance généralise, pour une variable aléatoire quelconque, la notion de moyenne d'une variable aléatoire finie. Reprenons un point de vue « heuristique<sup>(1)</sup> ». Soit  $X$  une variable aléatoire admettant une densité  $f$ . La probabilité  $dp$  que la variable  $X$  soit comprise entre  $x$  et  $x + dx$  est  $dp \approx f(x) dx$ ; en sommant les valeurs de  $X$  pondérées par ces probabilités, on définit la valeur moyenne de  $X$  comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Les contraintes vues au paragraphe § 33 étant *a fortiori* encore valables, on est amenés à poser plus précisément la définition suivante :

*Définition 11.1* Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, admettant une densité  $f$ . On dit que  **$X$  admet une espérance** ou est **intégrable** si la fonction  $x \mapsto |x| f(x)$  est intégrable, ce qui revient à dire que les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^0 x f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} x f(x) dx$$

---

<sup>(1)</sup>. C'est-à-dire le point de vue du physicien, ou du mathématicien de l'époque de ténèbres précédant la théorie de la mesure et son cortège de tribus, mais durant laquelle il fallait tout de même avancer.

# Chapitre 12

## Couples de variables à densité

*Dans tout ce chapitre, nous considérons des couples  $(X, Y)$  de variables aléatoires, ce qui revient à considérer une variable aléatoire  $\mathbf{X} = (X, Y)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . La généralisation à des  $n$ -uplets  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de variables aléatoires (ou à des variables aléatoires  $\mathbf{X}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ) est presque toujours immédiate.*

*Les propriétés déjà vues pour les couples discrets sont reprises ici, et quelques cas particuliers sont mis en avant (comme la somme de variables normales indépendantes). Une approche heuristique des lois conditionnelles est proposée, avec un exemple détaillé, ainsi qu'un nouvel aperçu de l'espérance conditionnelle. Là encore, le but de ce chapitre est de faire manipuler les notions; aussi le chapitre s'achève-t-il sur une quinzaine d'exercices, aisés pour la plupart, dont nous conseillons fortement l'étude avant de passer à la partie suivante, consacrée à des aspects plus théoriques.*

### 12.1 LOI D'UN COUPLE

#### Loi d'un couple, lois marginales

§ 176

La **fonction de répartition (conjointe)** du couple  $(X, Y)$  est la fonction  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$F(x, y) = \mathbf{P}\{X \leq x, Y \leq y\}$$

Elle représente la probabilité que le couple  $(X, Y)$  prenne ses valeurs dans le domaine  $\Delta(x, y)$  du plan représenté sur la figure 12.1 page suivante.

La fonction  $F$  est croissante par rapport à chacune de ses variables, donc admet une limite quand  $x \rightarrow \pm\infty$  ou  $y \rightarrow \pm\infty$ . Nous noterons  $F(x, +\infty)$  pour  $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$  et ainsi de suite.

■ **Proposition 12.1**  $F(+\infty, +\infty) = 1$  et  $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ .

DÉMONSTRATION : Pour toutes suites croissantes  $(x_n)_{n \geq 0}$  et  $(y_n)_{n \geq 0}$  de limites  $+\infty$ , on peut écrire  $\mathbb{R}^2$  comme l'union croissante

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(X, Y) \in \Delta(x_n, y_n)\}.$$

# Chapitre 13

## Exercices et problèmes

*Ce chapitre présente un certain nombre d'exercices et de problèmes classiques, tous accessibles sans les outils de la théorie de la mesure (que l'on introduira dans les chapitres 14 et 15).*

### EXERCICES

#### Espaces probabilisés

♦ **Exercice 13.1** Existe-t-il un espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$  tel que l'univers  $\Omega$  soit dénombrable, et sur lequel soit définie une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre  $p \in ]0; 1[$  ?

On pourra commencer par le cas simple où  $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(\Omega)$ .

♦ **Exercice 13.2 (Densité d'une partie de  $\mathbb{N}$ )** On dit qu'une partie  $A$  de  $\mathbb{N}$  **admet une densité** si la limite suivante existe :

$$\mu(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \{1, \dots, n\}|}{n}.$$

On note  $\mathcal{L}$  l'ensemble des parties  $A$  de  $\mathbb{N}$  admettant une densité.

- i) Donner des parties  $A$  pour lesquelles  $\mu(A) = 0$ ,  $\mu(A) = 1$ ,  $\mu(A) = 1/2$  et montrer que  $\mathcal{L} \subsetneq \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ .
- ii) L'ensemble  $\mathcal{L}$  est-il une tribu sur  $\mathbb{N}$  ?
- iii) La fonction  $\mu : \mathcal{L} \rightarrow [0; 1]$  est-elle  $\sigma$ -additive au sens où, si  $(A_n)_{n \geq 1}$  est une suite d'éléments disjoints de  $\mathcal{L}$  telle que  $A := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  est élément de  $\mathcal{L}$ , a-t-on  $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$  ?
- iv) Existe-t-il une probabilité sur une tribu de  $\mathbb{N}$  contenant  $\mathcal{L}$ , dont la restriction à  $\mathcal{L}$  soit égale à  $\mu$  ?

♦ **Exercice 13.3 (Borel-Cantelli généralisé)** Soit  $Y$  une variable aléatoire positive.

- i) Établir l'inégalité  $\mathbf{E}(Y)^2 \leq \mathbf{E}(Y^2) \cdot \mathbf{P}\{Y > 0\}$ .
- ii) Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements non tous négligeables. Montrer l'inégalité

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq \frac{\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(A_j)\right)^2}{\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(A_j) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j)}.$$

# Chapitre 14

## Variables aléatoires : cas général

*Certaines variables aléatoires ne sont ni discrètes, ni absolument continues. Si la fonction de répartition de certaines de ces variables peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'une fonction de répartition discrète et d'une fonction de répartition absolument continue, le cas général mérite une étude à part entière.*

*Nous terminons ce court chapitre en établissant un théorème d'une grande importance : toute variable aléatoire positive est limite (au sens de la convergence simple) d'une suite croissante de variables aléatoires simples (étagées). Ce théorème permettra de construire la notion générale d'espérance d'une variable aléatoire, ce qui sera l'objet du chapitre suivant.*

Dans tout ce chapitre,  $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$  est un espace probabilisé ; en l'absence de précision, toutes les variables aléatoires rencontrées sont définies sur cet espace, et à valeurs réelles.

### 14.1 MESURABILITÉ

#### Définition d'une variable aléatoire

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une application à valeurs réelles. Afin d'étudier la probabilité image induite par une fonction  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , c'est-à-dire de calculer la probabilité  $\mathbf{P}\{X \in B\}$  pour que  $X$  prenne ses valeurs dans un borélien  $B$  de  $\mathbb{R}$ , il est nécessaire que les ensembles  $\{X \in B\}$  soient tous éléments de la tribu  $\mathfrak{T}$ .

*Définition 14.1* Soit  $(\Omega, \mathfrak{T})$  un espace probabilisable. Une **variable aléatoire réelle** est une application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout borélien  $B$  de  $\mathbb{R}$ , l'événement  $\{X \in B\}$  est un élément de la tribu  $\mathfrak{T}$ . On dit également que  $X$  est une application **mesurable** de l'espace mesurable  $(\Omega, \mathfrak{T})$  dans l'espace mesurable  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ .

On notera :

- $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathfrak{T})$  l'espace des applications mesurables de  $(\Omega, \mathfrak{T})$  dans  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  ;
- $\mathcal{L}_+^0(\Omega, \mathfrak{T})$  l'espace des applications mesurables positives, et

# Chapitre 15

## L'espérance comme intégration sur une mesure de probabilité

*Un des (nombreux) avantages de l'utilisation de la théorie abstraite de l'intégrale de Lebesgue en probabilités, initiée notamment par Fréchet et Kolmogorov, est de pouvoir écrire l'espérance d'une variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , non en prenant pour objet de base l'ensemble d'arrivée (la droite  $\mathbb{R}$ ), comme dans les formules*

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathbf{P}\{X = x_n\}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

*déjà vues pour des variables aléatoires respectivement discrètes et absolument continues, mais au contraire en partant de l'espace  $\Omega$  lui-même, selon une formule qui prendra l'allure suivante :*

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbf{P}(\omega) \quad \text{ou} \quad \mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbf{P}.$$

*(L'intégrale est calculée sur l'ensemble  $\Omega$  grâce à la mesure de probabilité, notée  $d\mathbf{P}(\omega)$ , selon une procédure standard qui sera brièvement présentée.) Ce changement radical de point de vue permet notamment de prouver des résultats « simples », comme la linéarité de l'espérance, qui sont quasiment indémontrables avec les formules précédentes<sup>(1)</sup>.*

Dans tout ce chapitre, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$ .

---

<sup>(1)</sup>. On peut certes prouver la linéarité de l'espérance dans le cas de variables discrètes, mais au prix de notations bien lourdes. Quant au cas continu, il a été admis.

# Chapitre 16

## Vecteurs aléatoires

*La généralisation de couples de variables aléatoires est la notion de vecteurs aléatoires, ou encore variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Bien que l'on puisse travailler dans un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$  quelconque, nous supposerons toujours que celui-ci est égal à  $\mathbb{R}^n$ , et nous identifierons donc un vecteur  $\mathbf{X}$  à un  $n$ -uplet  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de variables aléatoires.*

*Après une rapide étude de la manière dont on munit  $\mathbb{R}^n$  d'une structure d'espace probabilisé, nous introduisons la notion de matrice de covariance d'un vecteur aléatoire, puis le théorème de Fubini permettant de calculer des intégrales multiples en se ramenant à  $n$  intégrales simples, sous des hypothèses simples. La dernière partie du chapitre concerne les changements de variables aléatoires — permettant, par exemple, d'étudier la loi d'un couple  $(U, V)$ , image d'un autre couple  $(X, Y)$  de loi connue par une application  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .*

### Notations

§ 229

Dans tout ce chapitre, l'espace  $E = \mathbb{R}^n$  est muni de sa base canonique

$$\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$$

et identifié à l'espace  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  des matrices colonnes ; le contexte permet de trancher. Il est muni de son produit scalaire canonique défini par

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = {}^t \mathbf{x} \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

en écrivant (abusivement)

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Rappelons qu'alors, pour tous vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , et pour toute matrice  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , on a

$$\langle \mathbf{x} | A \mathbf{y} \rangle = \langle {}^t A \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle. \quad (16.1)$$

# Chapitre 17

## Indépendance (2/2)

*La notion d'indépendance d'une famille d'événements permet de définir, de manière très générale, celle d'indépendance d'une famille de variables aléatoires quelconques. Des outils théoriques et des méthodes pratiques sont exposés ici concernant cette notion, avec des applications à la somme et au produit de variables aléatoires indépendantes.*

*Enfin, nous terminons ce chapitre par une introduction à la notion de temps d'arrêt, permettant de généraliser l'identité de Wald, déjà rencontrée au chapitre 8.*

### 17.1 INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES

#### Indépendance de deux variables aléatoires

§ 241

On dit que deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** si, pour tous événements  $A$  et  $B$ ,

$$\mathbf{P}\{X \in A, Y \in B\} = \mathbf{P}\{X \in A\} \cdot \mathbf{P}\{Y \in B\}.$$

Cette définition mettant en jeu des événements du type  $\{X \in A\}$ , où  $A$  est un borélien, on introduit la notion de tribu engendrée par une variable aléatoire.

*Définition 17.1* Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$  et à valeurs réelles. La **tribu engendrée par  $X$** , notée  $\sigma(X)$ , est l'ensemble des événements de la forme  $\{X \in A\}$ , où  $A$  décrit l'ensemble des boréliens de  $\mathbb{R}$ . C'est bien sûr une tribu.

*Remarque 17.2* La tribu  $\sigma(X)$  est donc, par construction, la plus petite tribu par rapport à laquelle la variable aléatoire  $X$  est mesurable. En effet, une telle tribu contient nécessairement tous les  $\{X \in A\}$  pour  $A \in \mathfrak{B}$ , donc contient  $\sigma(X)$ .

*Définition 17.3* Deux tribus  $\mathfrak{T}_1$  et  $\mathfrak{T}_2$  sont dites **indépendantes** si, quels que soient les événements  $A_1 \in \mathfrak{T}_1$  et  $A_2 \in \mathfrak{T}_2$ , ces événements sont indépendants :

$$\forall A_1 \in \mathfrak{T}_1 \quad \forall A_2 \in \mathfrak{T}_2 \quad \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}(A_2).$$

# Chapitre 18

## Fonctions caractéristiques

*Dans ce chapitre, nous présentons la définition et les principales propriétés de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Il y a finalement peu de « vraies » probabilités présentes, seulement de la belle analyse assez standard, ce pourquoi nous ne nous attardons guère sur le sujet.*

*Cependant, les fonctions caractéristiques sont un outil d'une grande puissance dont on se passe difficilement, notamment lors de l'étude de la convergence de variables aléatoires ; elles permettent également une démonstration assez simple du théorème central limite. Le lecteur pressé peut se contenter, dans un premier temps, de parcourir les propriétés les plus importantes : théorème d'unicité, fonction caractéristique d'une somme de variables aléatoires indépendantes.*

### Variables aléatoires complexes

§ 254

Nous pouvons généraliser dans le corps  $\mathbb{C}$  des complexes les notions de variable aléatoire (c'est-à-dire de fonction mesurable) et d'espérance.

Munissons tout d'abord  $\mathbb{C}$  d'une tribu, en identifiant dans un premier temps le plan complexe au plan réel  $\mathbb{R}^2$ . L'ensemble des parties de  $\mathbb{R}^2$  de la forme  $A \times B$ , où  $A$  et  $B$  sont des boréliens, n'est pas une tribu. On note  $\mathfrak{B}^2$  ou  $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$  la tribu engendrée par l'ensemble de ces parties ; c'est une tribu sur  $\mathbb{R}^2$ , appelée **tribu des boréliens sur  $\mathbb{R}^2$** . On peut vérifier<sup>(1)</sup> que cette tribu est également engendrée par les rectangles de  $\mathbb{R}^2$ . On la note également  $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ , l'espace  $\mathbb{R}^2$  étant vu explicitement comme le plan complexe  $\mathbb{C}$ .

Soit  $X$  une **variable aléatoire complexe**, c'est-à-dire une application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mesurable par rapport aux tribus  $\mathfrak{T}$  et  $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ . Séparons la partie réelle de la partie imaginaire : il suffit, pour tout  $\omega \in \Omega$ , d'écrire  $X(\omega)$  sous la forme  $Y(\omega) + iZ(\omega)$  où  $Y(\omega)$  et  $Z(\omega)$  sont tous deux réels. On définit ainsi deux applications  $Y$  et  $Z$  vérifiant  $X = Y + iZ$ . Ce sont les images de l'application mesurable  $X$  par les fonctions continues « partie réelle » et « partie imaginaire », elles sont donc également mesurables<sup>(2)</sup> : ce sont des variables aléatoires.

Si  $Y$  et  $Z$  admettent toutes deux une espérance, on définit l'**espérance** de  $X$  comme

$$\mathbf{E}(X) := \mathbf{E}(Y) + i\mathbf{E}(Z).$$

(1). Voir l'annexe B pour plus de détails.

(2). Corollaire 14.6 page 319.

# Chapitre 19

## Vecteurs gaussiens (\*)

*Les vecteurs gaussiens, généralisation naturelle à  $\mathbb{R}^d$  des lois normales sur  $\mathbb{R}$ , sont présentés en deux temps. D'abord sur  $\mathbb{R}^2$ , dans une approche assez pédestre ; quelques aspects numériques (droites de corrélation, ellipses d'égale densité,...), utiles en physique ou en traitement du signal, sont abordés. Sur  $\mathbb{R}^d$  ensuite, de manière plus théorique, où l'on caractérise un vecteur gaussien  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  par le fait que  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{X} \rangle$  suit une loi normale pour tout vecteur  $\mathbf{u}$  de  $\mathbb{R}^d$ .*

### 19.1 LOIS NORMALES SUR $\mathbb{R}^2$

#### Lois normales et extension

§ 264

La loi normale  $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$  sur  $\mathbb{R}$  (on dit aussi loi gaussienne **univariée**), d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma^2$  admet pour densité

$$n_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} n\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}. \quad (19.1)$$

(Voir page 239 pour des rappels élémentaires.) Cette loi est d'une importance fondamentale en théorie des probabilités et dans ses applications, notamment en statistiques. En effet, comme le montre le théorème central limite, la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et de même loi, correctement renormalisée, suit approximativement une loi normale, et ce, *quels que soient les détails de la loi commune à ces variables* ; quelques hypothèses simples sont naturellement requises, comme l'existence d'un moment d'ordre 2. Afin d'inclure tous les cas de figure, on peut également définir la **loi normale dégénérée**  $\mathcal{N}(m; 0)$ , de variance nulle, comme la loi certaine de valeur  $m$  (ou **mesure de Dirac** en  $m$ ), dont la fonction de répartition vaut  $F(x) = 0$  si  $x < m$  et  $F(x) = 1$  si  $x \geq m$ <sup>(1)</sup>.

Cette fâcheuse dichotomie entre lois normales de variances strictement positives (continues, et admettant une densité) et dégénérées (discontinues, et n'en

---

<sup>(1)</sup>. Par définition de la convergence en loi (§288), on a convergence en loi de  $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$  vers  $\mathcal{N}(m; 0)$  lorsque  $\sigma \rightarrow 0$ . On remarquera que, au sens des distributions, l'expression (19.1) converge vers la distribution de Dirac en  $m$ .

# Chapitre 20

## Convergence

*On introduit dans ce chapitre les principales notions de convergence de suites de variables aléatoires : convergence presque sûre, convergence en probabilité, convergence en loi. Les relations, parfois subtiles, entre ces notions, sont développées, et des critères simples les caractérisant sont exposés.*

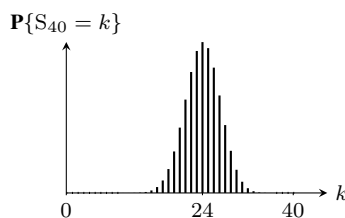
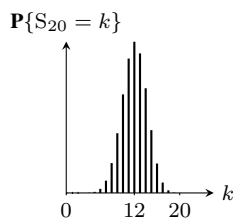
*Ce chapitre est, par essence, très technique. Il est cependant important de s'y plonger un temps suffisant pour bien se pénétrer des techniques exposées. Plus que tout autre chapitre, celui-ci doit être lu un crayon à la main. Le minimum syndical à connaître pour pouvoir aborder les lois des grands nombres et le théorème central limite sont indiqués par un ou deux symboles « ◀ » en marge.*

*Afin de faire oublier un peu l'aridité du sujet, on termine par deux applications simples. Dans la première, on montre que, dans les espaces euclidiens de grande dimension, presque tous les vecteurs sont presque orthogonaux. Dans la seconde, on étudie une propriété caractérisant les suites de réels dont la partie décimale est équirépartie sur  $[0; 1[$ .*

### Introduction aux théorèmes limites

§ 278

Nous avons déjà rencontré plusieurs résultats typiques de ce que l'on appelle des *théorèmes limites*, notamment dans le cas d'une succession infinie de tirages à *pile* ou *face*. Ci-dessous, nous représentons le diagramme en bâtons de la loi du nombre de *pile* obtenu lors de  $n$  tirages :  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , où  $X_k$  est la variable valant 1 si le  $k$ -ième tirage amène *pile* et 0 sinon (la probabilité d'obtenir *pile* étant ici  $p = 0,6$  ; les valeurs successives de  $n$  sont 20, 40 et 160).



# Chapitre 21

## Loi des grands nombres

GULDENSTERN (Flips a coin) : *The law of averages, if I have got this right, means that if six monkeys were thrown up in the air for long enough they would land on their tails about as often as they would land on their —*

ROSENCRANTZ : *Heads.* (He picks up the coin.)

TOM STOPPARD, *Rosencrantz & Guildenstern are dead*<sup>(1)</sup>.

Ce chapitre présente deux grands résultats sur les suites de variables aléatoires.

- Le premier est la loi du zéro-un (ou loi du tout-ou-rien) de Kolmogorov qui stipule qu'un événement, ne dépendant que de manière asymptotique d'une suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  quelconque de variables aléatoires indépendantes, est nécessairement de probabilité 0 ou 1.
- Le second est la très fameuse loi des grands nombres, déclinée dans plusieurs versions, et dont l'importance n'est plus à souligner. C'est le théorème qui permet notamment de relier la probabilité abstraite à la « fréquence limite du nombre de cas favorables sur le nombre total de cas » lorsque l'on répète une expérience un grand nombre de fois. Une démonstration relativement élémentaire de la version « forte » de ce théorème est donnée en annexe.

### 21.1 LA LOI DU TOUT OU RIEN (OU DU 0-1) (\*)

#### Événements de queue, tribu asymptotique

§ 304

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires; on appelle **événement de queue** associé à cette suite tout événement qui peut être déterminé par l'ensemble des valeurs prises par cette suite, mais qui n'est pas modifié lorsque l'on change arbitrairement un nombre fini de ces valeurs. En d'autres termes, un événement de queue est un événement qui est entièrement déterminé par le comportement asymptotique de la suite des valeurs de  $(X_n)_{n \geq 0}$ .

---

<sup>(1)</sup>. GULDENSTERN (*Lance une pièce*) : D'après la loi des grands nombres, si j'ai bien compris, si on lance six singes un grand nombre de fois, ils retomberont sur leurs fesses à peu près aussi souvent que sur leur —

ROSENCRANTZ : *Face.* (*Il ramasse la pièce.*)

# Chapitre 22

## Le théorème central limite

Le célèbre théorème central limite permet d'aller au-delà du résultat de la loi des grands nombres : si  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant une espérance  $m$  et une variance  $\sigma^2$ , alors les fluctuations de la moyenne  $M_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$  autour de  $m$  se font sur une échelle typique en  $\sigma/\sqrt{n}$  et suivent, asymptotiquement, une loi précise : la loi normale  $\mathcal{N}(0; \sigma^2/n)$ . En d'autres termes, on peut approcher la loi de  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  par la loi normale  $\mathcal{N}(nm; n\sigma^2)$ .

D'autres formes du théorème permettent aux variables  $X_n$  de suivre des lois différentes, à condition que leurs variances ne deviennent pas trop petites.

Les conséquences de ce théorème fondamental sont innombrables, et tout d'abord en statistiques : si l'on ajoute des quantités inconnues mais indépendantes, le résultat est (presque) une loi normale !

En conclusion du chapitre, nous présentons un résultat connu sous le nom de loi du logarithme itéré, qui permet d'encadrer les fluctuations de  $S_n/\sqrt{n}$ .

### Au-delà de la loi des grands nombres

§ 317

Dans le paragraphe § 278, nous avons vu l'évolution de la loi du nombre de *pile* obtenus au cours d'une succession de tirages à *pile* ou *face* indépendants. Notamment, la moyenne

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

converge (en probabilité et presque sûrement) vers une constante  $m$ , qui est ici la probabilité d'obtenir *pile* à chaque tirage. Cette propriété reste vraie sous l'hypothèse plus générale que les  $X_i$  sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi, admettant une espérance  $m$ .

Dans la vie réelle, on ne peut pas réitérer une infinité de fois une expérience, pas plus qu'on ne saurait lancer une infinité de fois la pièce. Une question naturelle est alors : peut-on quantifier la vitesse de cette convergence ? En d'autres termes, quelle est l'importance des fluctuations autour de la valeur limite dans une figure telle que celles de la page 410 ?

La largeur typique de ces fluctuations est donnée simplement par l'écart-type de  $M_n$ , s'il est défini ; supposons désormais que les  $X_i$  admettent un moment d'ordre 2 et notons  $\sigma = \sigma_{X_1}$ , l'hypothèse d'indépendance des variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  permet alors de conclure que leurs variances s'ajoutent (égalité de Bienaymé), et donc

# Chapitre 23

## Techniques d'approximation

*Le chapitre précédent montre la convergence de certaines lois vers une loi normale. Or, il peut être intéressant d'approcher une distribution par une autre — notamment parce qu'une loi normale admet une densité. Nous exposons ici les techniques d'approximations : poissonnienne d'une loi binomiale, normale d'une loi binomiale ou d'une loi de Poisson.*

### 23.1 APPROXIMATIONS POISSONIENNES

#### Convergence vers une loi de Poisson

§ 326

Rappelons l'énoncé du théorème 6.21, démontré au chapitre 6.

■ **Théorème 23.1 (Limite d'épreuves de Bernoulli)** Soit  $(p_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels de  $]0; 1[$  telle que  $\lim n p_n = \lambda$ . Pour chaque entier  $n$ , on note  $X_n$  le nombre de succès obtenus dans la succession de  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes, et de même loi  $\mathcal{B}(p_n)$  ; ainsi,  $X_n \sim \mathcal{B}(n ; p_n)$ . Alors, pour tout entier  $k$ ,  $\mathbf{P}\{X_n = k\} \rightarrow e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ , c'est-à-dire que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $\mathcal{P}(\lambda)$ .

Cet énoncé peut se généraliser en n'imposant plus aux  $n$  épreuves de Bernoulli d'avoir le même paramètre  $p_n$ . Pour chaque valeur de  $n$ , on considère des variables  $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$  indépendantes et on forme leur somme  $S_n$ . Les variables  $X_{n,k}$  suivent une loi de Bernoulli de paramètre  $p_{n,k}$ .

|           |           |           |         |           | somme   |
|-----------|-----------|-----------|---------|-----------|---------|
| $p_{1,1}$ |           |           |         |           | $q_1$   |
| $p_{2,1}$ | $p_{2,2}$ |           |         |           | $q_2$   |
| $p_{3,1}$ | $p_{3,2}$ | $p_{3,3}$ |         |           | $q_3$   |
| $\dots$   | $\dots$   | $\dots$   | $\dots$ |           | $\dots$ |
| $p_{n,1}$ | $p_{n,2}$ | $p_{n,3}$ | $\dots$ | $p_{n,n}$ | $q_n$   |
| $\dots$   | $\dots$   | $\dots$   | $\dots$ | $\dots$   | $\dots$ |

Ce théorème, comme celui qui suit, illustre le fait qu'une distribution de Poisson peut être obtenue en collationnant un grand nombre d'événements rares (et indépendants).

# Chapitre 24

## Espérance conditionnelle

*Le simple est toujours faux. Ce qui ne l'est pas est inutilisable.*

Paul VALÉRY

*L'espérance d'une variable aléatoire peut être vue comme sa meilleure approximation sous forme d'un scalaire et, plus précisément, comme sa meilleure approximation quadratique, puisque  $\mathbf{E}|Y - m|^2$  est minimale lorsque  $m = \mathbf{E}(Y)$ <sup>(1)</sup>. Lorsque l'on connaît un renseignement numérique limitant le domaine de  $\Omega$  dans lequel se trouve  $\omega$  (c'est-à-dire un renseignement de la forme «  $\omega \in A$  »), on peut calculer, via la probabilité  $\mathbf{P}_A$  conditionnée par ce renseignement, l'« espérance conditionnée »  $\mathbf{E}_A(Y)$  de  $Y$ . Si ce renseignement est le résultat d'une seconde variable aléatoire  $X$ , l'espérance conditionnelle de  $Y$  est donc une quantité dépendant de  $\omega$  au travers de la valeur de  $X$  ; c'est donc une variable aléatoire mesurable par rapport à  $\sigma(X)$ .*

*Ce chapitre expose tout d'abord la théorie de l'espérance conditionnelle lorsque  $X$  est une variable aléatoire discrète — et que tout va bien. Dans un second temps, les résultats sont généralisés au cas d'une variable quelconque — et les difficultés jaillissent, qui sont résolues de deux manières différentes : par un théorème issu de la théorie de la mesure (Radon-Nikodým), ou par une interprétation géométrique de meilleure approximation quadratique dans le cas de variables de  $L^2$ .*

### 24.1 LE CAS FINI OU DÉNOMBRABLE

Dans toute cette section, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$  et discrètes, ce qui permettra de définir de manière élémentaire la notion d'espérance conditionnelle puis de démontrer par simple calcul quelques propriétés essentielles ; on vérifiera que celles-ci sont encore vraies pour des variables quelconques, bien que les démonstrations fassent alors appel à des outils plus sophistiqués.

---

<sup>(1)</sup>. Théorème 15.38 page 351. On en rappelle l'interprétation géométrique : l'espérance de  $X$  est égale à sa projection orthogonale sur la droite des variables aléatoires déterministes (= constantes)  $D = \text{Vect}(\mathbf{1})$ .

# Chapitre 25

## Quelques résultats élégamment établis par la théorie des probabilités

*Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats d'analyse démontrés avec des méthodes, des théorèmes ou des idées provenant du monde probabiliste.*

- *La formule de Bernstein est une formule découlant rapidement du théorème central limite, mais plus difficile à démontrer avec des outils élémentaires d'analyse.*
- *Le même théorème central limite permet une démonstration relativement élémentaire de la formule de Stirling.*
- *Deux théorèmes (§ 364 et § 365) sont représentatifs de la méthode probabiliste, historiquement introduite par Erdős. Il s'agit de prouver l'existence (certaine !) d'un objet possédant telle propriété, en montrant par exemple que la mesure de l'ensemble des objets possédant cette propriété est strictement positive. Le langage même de l'aléatoire pourrait d'ailleurs être totalement gommé au profit de celui de mesure — mais l'intuition initiale étant probabiliste, ne boudons pas notre plaisir.*
- *Le théorème de Weierstrass sur la densité de l'espace des fonctions polynomiales a reçu, au début du siècle, une démonstration particulièrement simple et élégante par Bernstein ; c'est l'occasion de voir l'apparition très naturelle des polynômes du même nom.*

### La formule de Bernstein

Un exemple des plus célèbres d'application « non probabiliste » des probabilités est la **formule de Bernstein** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Ce n'est pas à vrai dire une application tellement impressionnante des probabilités : peu de mathématiciens se réveillent le matin en se disant « Tiens, j'aimerais bien démontrer cette formule » et finissent pas se dire que les probabilités peuvent les

# Chapitre 26

## Simuler informatiquement une loi de probabilité

GUILDENSTERN *Syllogism the second: One, probability is a factor which operates within natural forces. Two, probability is not operating as a factor. Three, we are now within un-, sub- or supernatural forces. Discuss. (Rosencrantz is suitably startled. Acidly.) Not too heatedly.*<sup>(1)</sup>

Tom STOPPARD, *Rosencrantz & Guildenstern are dead.*

*Toutes les méthodes de simulation de lois probabilistes se basent sur l'existence d'une source aléatoire de loi uniforme. Le lecteur ne cherchant qu'à simuler une loi de Poisson, une loi normale, etc., peut admettre l'existence d'un programme informatique, que nous appellerons « **rand** », dont les sorties successives, lorsqu'il est appelé de manière répétée, forment une suite numérique  $u_0, u_1, u_2, \dots$  correspondant à une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur  $[0; 1]$ . Une très courte discussion sur les algorithmes permettant de simuler une loi uniforme est proposée en fin de chapitre.*

### 26.1 SIMULER UNE LOI DISCRÈTE

Dans toute la suite du chapitre, on supposera donnée une fonction **rand** qui retourne un réel de l'intervalle  $[0; 1[$ , avec une probabilité uniforme, et telle que des appels successifs à cette fonction donnent des résultats indépendants.

*Remarque 26.1* Remarquons d'ores et déjà que l'on aura parfois à considérer que **rand** retourne un réel de  $]0; 1[$ , ou de  $[0; 1]$ ; comme dans tous les cas, la probabilité d'obtenir exactement 0 ou 1 est nulle, il n'y a pas de véritable contradiction.

---

<sup>(1)</sup>. GUILDENSTERN Syllogisme II : primo, la probabilité est un facteur agissant au sein de forces naturelles. Deuxio, la probabilité n'agit pas en tant que facteur. Tertio, nous sommes les jouets de forces anti-, sous- ou surnaturelles. Discutez. (*Rosencrantz est proprement ébahi. D'un ton aigre :*) Ne nous emportons pas.

# Chapitre 27

## Méthodes de Monte-Carlo

*L'analyse est le seul instrument dont on se soit servi jusqu'à ce jour dans la science des probabilités, pour déterminer & fixer les rapports du hasard ; la Géométrie paroissoit peu propre à un ouvrage aussi délié ; cependant si l'on y regarde de près, il sera facile de reconnoître que cet avantage de l'Analyse sur la Géométrie, est tout-à-fait accidentel, & que le hasard, selon qu'il est modifié & conditionné, se trouve du ressort de la géométrie aussi-bien que de celui de l'analyse.*

*Comte de BUFFON, Essai d'Arithmétique morale, chap. XXIII*

*La méthode de Monte-Carlo a été développée à Los Alamos par John von Neumann, Stanisław Ulam, Enrico Fermi et Nicholas Metropolis (qui en invente le nom) pour effectuer des calculs numériques que les algorithmes déterministes rendaient rédhibitoirement longs [76].*

*Elle a connu une fortune prodigieuse et ses avatars permettent de résoudre de manière très précise de nombreux problèmes : calcul d'intégrales, résolution d'équations différentielles, recherche de minimas, recherche d'algorithmes optimaux. Le domaine d'application est en réalité si vaste que l'on ne peut qu'à peine en effleurer la surface dans les quelques pages qui suivent.*

*Des méthodes basées sur des tests aléatoires permettent également de dire, très rapidement et avec un risque très faible d'erreur, si un entier est premier ou non<sup>(1)</sup> (§ 389). Des études statistiques permettent également de deviner si une liste de données a été falsifiée ou non (§ 392).*

---

<sup>(1)</sup>. La commande `isprime` du logiciel Maple, par exemple, effectue un test probabiliste de primalité, et non une étude déterministe, qui serait astronomiquement trop coûteuse en temps pour des grands entiers.

# Chapitre 28

## Chaînes de Markov

De ce très vaste sujet, nous n'aborderons ici qu'un exemple : celui des chaînes de Markov homogènes à nombre fini d'états. On peut voir ces chaînes comme des promenades aléatoires sur un graphe fini où, à chaque pas, le promeneur choisit un des chemins qui lui sont offerts avec une loi de probabilité fixée et ce, sans garder mémoire de son passé.

On étudie un système pouvant se trouver dans un nombre fini d'états, notés  $E_1, E_2, \dots, E_d$ , et qui évolue en temps discret repéré par un entier  $n$  parcourant  $\mathbb{N}$ . À l'instant 0, le système n'est pas forcément dans un état déterminé, mais décrit par une **loi initiale**  $\pi_0 = (\pi_0(1), \dots, \pi_0(d))$  : le système se trouve dans l'état  $E_i$  avec la probabilité  $\pi_0(i)$ . Des questions se posent naturellement :

- Si le système est dans un certain état  $E_i$  à  $t = 0$ , quels autres états lui sont accessibles ?
- Reviendra-t-il à l'état  $E_i$  ?
- De manière plus générale, comment décrire la probabilité qu'a le système de se trouver dans un état  $E_i$  au cours du temps ?
- Y a-t-il un « comportement asymptotique » quand  $n \rightarrow \infty$  ?
- Avec quelle fréquence le système repassera-t-il par chacun des états ?

Après avoir étudié les propriétés des matrices de transition, on donnera deux types de propriétés des états : celles directement liées aux coefficients de la matrice de transition (périodicité, accessibilité) et celles découlant de propriétés asymptotiques (états récurrents, transitoires).

### 28.1 MATRICES DE TRANSITION

On se donne un système (physique, mathématique, biologique...) pouvant évoluer, à temps discret (indexé par  $n$ ), et se trouver dans différents états  $E_i$ . On suppose de plus que ce système n'a aucune mémoire de son passé et ne connaît que son état présent à l'instant  $n$  pour évoluer jusqu'à l'instant  $n + 1$ . Enfin, on suppose que cette évolution ne dépend pas du temps (ou encore : est invariante par translation dans le temps).

*Exemple 28.1* Les systèmes admettant une telle description sont nombreux :

- étude d'une marche aléatoire (et, au-delà, d'un mouvement brownien) ;
- évolution au cours du temps (discrétisé) du nombre d'atomes dont le moment magnétique pointe vers le haut (modèle d'Ising et assimilés) ;
- étude d'une population ;

# Chapitre 29

## Arithmétique et probabilités : une randonnée

Par Emmanuel Kowalski

*La théorie des probabilités est basée sur un certain nombre d'idées et de concepts abstraits qui ont été modélisés par Kolmogorov en particulier. Depuis lors, il est naturel de s'intéresser à ces idées indépendamment de toute réalisation concrète, en s'appuyant sur des résultats généraux qui établissent, a priori, que les hypothèses que l'on peut faire (comme l'existence de suites  $(X_n)$  de variables aléatoires indépendantes dont les lois sont données à priori) ne sont pas contradictoires.*

*Dans ce chapitre, le point de vue est un peu différent : nous allons considérer des objets parfaitement concrets et, apparemment, « déterministes », et nous allons pourtant expliquer qu'ils peuvent incarner la plupart des constructions probabilistes importantes. Ces objets seront, tout simplement, les entiers naturels strictement positifs, qui sont l'objet de la théorie des nombres.*

*On peut aussi voir cette approche comme parallèle à celle des simulations à la Monte-Carlo : ici, on va faire apparaître des lois de probabilités usuelles (comme la loi normale, ou les lois de Poisson, et l'on pourrait donner beaucoup d'autres exemples) ou inhabituelles (la mesure qui contrôle l'écart entre valeurs propres entre matrices unitaires de grande taille) non pas à l'aide de processus physiques que l'on peut aisément (!) créer dans le monde réel, mais à l'aide de la suite des entiers naturels.*

*Du point de vue des mathématiques pures, ce chapitre est aussi une illustration de l'intérêt des idées et des raisonnements probabilistes, et surtout de la convergence en loi, qui — cachée souvent sous le nom « équirépartition » — est l'une des idées les plus utiles qui soit...*

# Chapitre 30

## Bosons, fermions et boltzmannions

*Dans ce court chapitre, nous montrons deux applications simples du dénombrement à la mécanique statistique. La première consiste à montrer que, dans un système isolé constitué d'un grand nombre de particules, la probabilité de trouver l'une d'elles dans un état individuel d'énergie  $\varepsilon$  est proportionnel à  $e^{-\beta\varepsilon}$ , où  $\beta$  est une constante que l'on peut identifier à  $1/k_B T$ , où  $T$  est la température du système et  $k_B$  la constante de Boltzmann. Dans la seconde, nous montrons comment l'hypothèse d'indiscernabilité des particules — bosons ou fermions — affecte leur répartition et, notamment, le nombre moyen d'états occupés.*

### 30.1 LE FACTEUR DE BOLTZMANN

#### **Théorie cinétique des gaz et statistiques non quantiques**

§ 415

Dans une série de travaux qui ont profondément bouleversé la physique moderne, le physicien allemand Ludwig BOLTZMANN (1844-1906) a posé les principes probabilistes de la thermodynamique statistique. Il s'agissait de construire, de façon mathématique, un modèle de gaz dont les particules, régies par les lois usuelles de la mécanique, sont en nombre si grand que la description individuelle doit être remplacée par une description statistique<sup>(1)</sup>. À l'époque de la fondation de la mécanique statistique, il s'agissait d'ailleurs surtout de décrire des systèmes à l'équilibre<sup>(2)</sup>.

Le principe de base de la mécanique statistique est de considérer que les positions et les vitesses des molécules d'un gaz peuvent être considérées comme des

---

(1). Rappelons qu'un litre de gaz à pression et température ambiante contient environ  $3 \cdot 10^{22}$  molécules ; la description mécanique du système est donc la donnée d'autant d'équations différentielles d'ordre 2 pour chaque dimension d'espace.

(2). Les mouvements des particules étant rapides, une transformation « lente » à l'échelle humaine peut être décrite comme une succession de positions d'équilibre ; les transformations violentes (comme le cas d'un gaz emprisonné dans une bouteille de verre, elle-même contenue dans une enceinte hermétique, au moment où la bouteille se brise) ne sont pas concernées par la mécanique statistique à l'équilibre : tout au plus peut-on décrire l'état initial et l'état final après relaxation du système.

# Chapitre 31

## Processus de Poisson

### (brève introduction)

*Dans ce court chapitre, nous présentons un premier exemple simple de processus stochastique (un second exemple plus compliqué, le mouvement brownien, fait l'objet du chapitre suivant). Un processus de Poisson est un cas particulier de processus de comptage : c'est une famille  $\{N(t) ; t \geq 0\}$  de variables aléatoires à valeurs entières, qui « compte » le nombre d'occurrences d'un certain type d'événement avant l'instant  $t$ . Le lien, déjà aperçu plusieurs fois, entre variables exponentielles et variables de Poisson, trouve ici son expression la plus achevée. La théorie montre de plus que, sous des hypothèses générales, un processus de Poisson est une modélisation convenable de situations naturelles, ce qui explique la grande faveur dans laquelle est tenue ce type de processus.*

#### En guise d'introduction : comment placer des points uniformément sur $\mathbb{R}^+$ ?

§ 422

Comment distribuer aléatoirement, et indépendamment les uns des autres, des points sur la demi-droite réelle  $\mathbb{R}^+$ , de telle sorte que leur densité soit (en moyenne) constante sur chaque intervalle ? Par indépendant, on entend ceci : que le nombre de points dans un intervalle  $[a; b]$  soit indépendant du nombre de points dans un intervalle  $[c; d]$  disjoint du premier.

La méthode naïve (placer les points les uns après les autres) échoue avant même de débiter : comment diable pourrait-on placer un point uniformément sur  $[0; +\infty[$  ?

Une autre approche possible est la suivante. Notons  $\lambda$  la densité désirée. Il est bien entendu que, par densité, on entend : le nombre de points sur un intervalle  $[a; b]$  est une variable aléatoire, d'espérance  $(b - a)\lambda$ . Si  $n \geq 1$  est un entier, plaçons, uniformément et indépendamment,  $n$  points sur l'intervalle  $[0; n/\lambda]$ . À la limite  $n \rightarrow \infty$ , on devrait obtenir la modélisation désirée.

Le problème de cette deuxième méthode est qu'elle ne converge qu'en loi : chaque fois que l'on change  $n$ , il faut recalculer tous les points. Et, à  $n$  fixé, aucune condition n'est vraiment respectée : la densité n'est bien sûre égale à  $\lambda$  que sur  $[0; n/\lambda]$ , mais de plus la répartition des points ne satisfait pas à la condition d'indépendance. Par construction, le nombre total de points sur l'intervalle

# Chapitre 32

## Mouvements browniens

*La théorie du mouvement brownien s'est, depuis un peu plus d'un siècle, développée de façon spectaculaire. De manière tout à fait remarquable, elle est au cœur de l'intérêt de nombreux mathématiciens et de physiciens ; si elle a fourni une modélisation satisfaisante du mouvement observé de fines particules et permis une détermination expérimentale de la constante d'Avogadro, son intérêt n'a cessé de croître quand d'éminents physiciens ont proposé une formulation entièrement nouvelle de la théorie quantique des champs par des intégrales dont les variables étaient des chemins browniens ; ces connexions très profondes entre mouvement brownien et théorie quantique des champs ont été étendues à la mécanique statistique, la gravitation quantique, la théorie de la percolation, etc. Le champ de recherche du mouvement brownien est gigantesque et en perpétuelle expansion, diverses disciplines (probabilités, analyse harmonique, physique théorique, mathématiques financières) s'y rencontrant et s'enrichissant mutuellement.*

À cause de la très grande technicité des outils mis en jeu, toutefois, nous devons nous contenter de proposer une simple introduction à ce vaste domaine, le but (avoué) étant d'abord de donner envie au lecteur de s'y plonger entièrement ; et puisque l'eau est fraîche, on commence par une partie heuristique simple.

### 32.1 UNE APPROCHE HEURISTIQUE

#### L'observation de Robert Brown

Le botaniste anglais Robert Brown fit paraître, en 1828, un opuscule intitulé : *A brief account of microscopical observations [...] on the particles contained in the pollen of plants ; and on the general existence of active molecules*. Cherchant à élucider, durant l'été 1827, le problème du transport de particules jusqu'à l'ovule d'une plante, il observa au microscope, de très fines particules oblongues contenues dans les grains de pollen de *Clarkia pulchella* (une petite fleur rose découverte durant la fameuse expédition de Lewis & Clark, choisie parce que ces particules étaient de tailles inhabituellement grosses, et donc plus faciles à observer), et les trouva animées de mouvements désordonnés, indépendants les uns des autres et, surtout, perpétuels ; l'origine de ces mouvements lui était inconnue. Étaient-ils liés à la nature vivante d'une plante ? Il effectua des observations similaires sur d'autres espèces de plantes, puis chercha à savoir si cette propriété perdurait après la mort. Il constata successivement que :

# Chapitre 33

## Estimation bayésienne

*Lors de la modélisation probabiliste d'une situation, il arrive qu'une probabilité  $p$ , constitutive du modèle, soit inconnue, par manque d'observations, par impossibilité de répéter l'expérience ne serait-ce qu'une seconde fois, ou toute autre raison.*

*L'approche bayésienne consiste alors à construire une méta-modélisation, en considérant tous les modèles possibles fondés sur le nombre  $p$ , et à postuler une loi de distribution a priori, pour la valeur de  $p$  — en général une densité  $f(p)$  — qui modélise, plus ou moins précisément, les informations d'ordre psychologique que nous pensons détenir sur  $p$  (est-il proche de 0, de 1, a-t-on une bonne confiance en sa valeur ou l'imagine-t-on au contraire bien étalé dans  $[0; 1]$  ?). Les observations effectuées permettent ensuite de modifier cette distribution, et fournissent une nouvelle évaluation de  $p$ .*

*Cette approche est assez fréquente mais, malgré des succès certains, parfois critiquée, notamment par les tenants d'une interprétation statistique des probabilités.*

*Remarque 33.1* Il convient de ne pas mélanger le *théorème de Bayes* (§ 61, page 106), qui est un théorème tout ce qu'il y a de plus solide, et nulle part contesté, et l'*approche bayésienne* des probabilités, qui consiste à utiliser des distributions a priori de  $p$ .

### **Distribution a priori uniforme, et distribution a posteriori**

§ 459

Considérons une situation simple : un mathématicien décide d'aller visiter l'Écosse ; il a entendu dire que les moutons, noirs ou blancs, y sont nombreux et, durant son premier trajet en train dans la campagne, il scrute le paysage par la fenêtre en guettant les ovins. La proportion  $p$  de moutons blancs lui est inconnue. Une attitude possible pour lui est d'attribuer, en son for intérieur, une distribution uniforme à  $p$ , c'est-à-dire choisir une densité

$$f(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq p \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec cette modélisation, la variable  $p$  admet pour valeur moyenne  $\hat{p} = \frac{1}{2}$ . (Nous ne la notons pas «  $\mathbf{E}(p)$  », réservant la notion d'espérance au procédé de calcul effectué dans un univers probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P}_p)$ , où  $\mathbf{P}_p$  est une mesure de probabilité

# Chapitre 34

## Retour à pile ou face : loi de l'Arc sinus et séries aléatoires

*Dans ce court chapitre, nous revenons sur les successions infinies de tirages à pile ou face.*

- *Dans une première partie, nous montrons que, si l'on est momentanément vainqueur dans une partie endiablée de pile ou face, alors on a de fortes chances de l'être pour longtemps !*
- *Puis, nous revenons à la nature des séries  $\sum \pm 1/n$  — séries harmoniques avec une distribution aléatoire de signes, et nous montrons que : si les signes sont répartis équitablement, la série est presque sûrement convergente, mais qu'elle diverge presque sûrement dans le cas contraire.*
- *Enfin, nous montrons que le rayon d'une série entière  $\sum A_n z^n$ , dont les coefficients  $A_n$  sont aléatoires mais indépendants et identiquement distribués, ne saurait prendre (presque sûrement) que trois valeurs : 0, 1 et  $+\infty$ .*

### 34.1 L'INIQUITÉ FLAGRANTE D'UN JEU ÉQUITABLE

#### La loi de l'Arc sinus

§ 461

Considérons une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de loi  $\mathcal{B}(1/2)$ , et notons  $Y_n = 2X_n - 1$ , de telle sorte que les  $Y_n$  sont des variables de Rademacher indépendantes

$$\mathbf{P}\{Y_n = +1\} = \mathbf{P}\{Y_n = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Les variables  $Y_n$  modélisent le gain de l'un des joueurs (Rosencrantz) lors d'une partie de *pile ou face* : gain de 1 € si la pièce tombe sur *pile*, gain de -1 € si elle tombe sur *face*. On note  $S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$  le gain total à l'issue de  $n$  parties. Enfin, on note  $K_n$  le nombre de sommes  $S_1, \dots, S_n$  positives ou nulles :  $K_n$  est donc

# Chapitre 35

## En guise de conclusion : à propos de quelques paradoxes

*Crois-moi : il y a peu de raisons plus valables de faire des cauchemars que de découvrir, caché au cœur des mathématiques, le germe de la folie.*

*Daniel KEHLMANN, La Nuit de l'Illusionniste [58].*

*La plupart des paradoxes ont pour cause l'ambiguïté inhérente à toutes les langues ; le passage difficile d'un énoncé en français à un énoncé mathématique censément équivalent engendre aussi bien des résultats amusants que d'épineux problèmes. D'autres paradoxes proviennent d'un résultat rigoureusement démontré, mais non conforme à l'intuition, parfois trompeuse, comme le paradoxe des anniversaires<sup>(1)</sup> ; un des cas les plus classiques résulte de la confusion entre ignorance de la réalisation ou non d'un événement, et croyance en l'équiprobabilité des éventualités.*

*Enfin, le fameux paradoxe de Saint-Pétersbourg est typique de ce qui arrive lorsque l'on manipule des quantités infinies pour modéliser une situation qui, par nature, ne connaît que des quantités finies.*

### 35.1 BIAIS D'ÉQUIPROBABILITÉ

#### **Biais d'équiprobabilité : le paradoxe des deux cassettes**

On appelle *biais d'équiprobabilité* la tendance (fautive) à traduire l'absence de connaissance sur la probabilité de chacune des issues possibles d'une expérience par l'équiprobabilité entre ces issues.

§ 466

---

(1). Présenté dans l'exercice 1.1 page 50.

# Annexe A

## Éléments d'analyse et d'algèbre

*On résume ici quelques points d'analyse et d'algèbre utilisés dans l'ouvrage : suites, séries, familles sommables, suites de fonctions, séries entières, fonctions dérivables, convexité, pseudo-inverse, calcul intégral, calcul dans les espaces de Hilbert, transformation de Fourier, théorème spectral notamment.*

### A.1 SUITES

#### Fini, dénombrable, indénombrable

Un ensemble  $A$  est dit (**strictement**) **dénombrable** s'il existe une bijection  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$  (que l'on appelle un **dénombrement**). En d'autres termes, on a pu *numéroter* tous les éléments de  $A$  par des entiers, c'est-à-dire écrire  $A = \{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$ , en notant plus commodément  $a_n := \varphi(n)$ . ♦ On dit souvent d'un ensemble qu'il est **dénombrable** pour indiquer qu'il est *fini* ou *strictement dénombrable*. ♦ Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. ♦ Si  $A$  est un ensemble et  $D$  un ensemble dénombrable, et s'il existe une injection  $\varphi : A \rightarrow D$ , alors  $A$  est dénombrable. ♦ De même, s'il existe une surjection  $\psi : D \rightarrow A$  et si  $D$  est dénombrable, alors  $A$  est dénombrable. ♦ Si  $A$  et  $B$  sont dénombrables, alors  $A \times B$  l'est également. ♦ Les ensembles  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$  sont évidemment dénombrables. En revanche,  $[0; 1]$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ,... ne le sont pas. Deux cas particuliers interviennent fréquemment :

■ **Proposition A.1**  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.

DÉMONSTRATION : À tout couple  $(p, q)$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , on peut associer un rationnel  $r$  ; l'application  $(p, q) \mapsto r$  ainsi définie est une *surjection* de l'ensemble dénombrable  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{Q}$ , donc  $\mathbb{Q}$  est dénombrable. ■

■ **Proposition A.2** L'ensemble  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  n'est pas dénombrable.

DÉMONSTRATION : Suivons l'argument classique de la *diagonale de Cantor* et supposons qu'il existe une bijection  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Pour chaque entier  $n$ , notons

$$\varphi(n) =: (\varepsilon_0(n), \varepsilon_1(n), \dots, \varepsilon_k(n), \dots).$$

# Annexe B

## Davantage sur la mesure

Donnons ici quelques compléments sur les tribus et les fonctions mesurables.

- Nous commençons par passer en revue les divers boréliens utiles en théorie des probabilités : boréliens de  $\mathbb{R}$  et de  $\mathbb{R}^n$ , puis boréliens de  $\mathbb{R}^T$  où  $T$  est un ensemble dénombrable (A 67, utile pour le jeu de pile ou face par exemple) ou non dénombrable (A 68, utile pour les processus à temps continus comme le mouvement brownien).
- Après quelques définitions générales sur les fonctions mesurables, nous démontrerons le théorème de factorisation des fonctions mesurables par rapport à la tribu  $\sigma(X)$ .
- Nous terminons le chapitre par un rapide tour d'horizon des techniques liées au lemme de classe monotone, et qui sont d'une très grande puissance. Une description complète de la mesure  $\mathbf{P}$  sur chacun des éléments de  $\mathfrak{T}$  étant, en pratique, impossible, on montre qu'il suffit de la définir sur un ensemble  $\mathfrak{A}$  plus réduit — le but étant évidemment de chercher l'ensemble  $\mathfrak{A}$  le plus petit possible :
  - pour définir  $\mathbf{P}$  ex nihilo, on la définit d'abord sur une algèbre  $\mathfrak{A}$  engendrant  $\mathfrak{T}$  ;
  - si au contraire on suppose que  $\mathbf{P}$  existe, alors elle est caractérisée par ses valeurs prises sur une structure encore plus simple (un  $\pi$ -système).

### B.1 BORÉLIENS

#### Boréliens de $\mathbb{R}$

Tout d'abord, une petite remarque d'ordre topologique. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . On définit la relation d'équivalence «  $\sim$  » par :  $x \sim y$  si et seulement si le segment  $[x; y]$  est inclus dans  $U$ . La classe d'équivalence d'un élément  $x$  de  $U$  est donc un intervalle ouvert. L'ensemble  $U$  est la réunion disjointe de ses classes d'équivalence modulo  $\sim$  ; si l'on choisit, dans chaque classe d'équivalence, un représentant *rationnel*, on a donc montré que :

■ **Lemme B.1** *Tout ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}$  est union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.*

# Annexe C

## Théorèmes d'existence

*En d'innombrables occasions, nous avons formulé des hypothèses du genre : « soit  $X$  une variable aléatoire suivant telle loi », ou encore « soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi ». Diantre ! A-t-on effectivement le droit de le faire ? Après avoir donné des exemples élémentaires de théorèmes d'existence, nous présentons le théorème de Kolmogorov qui les généralise et qui permet, notamment, de fabriquer des suites de variables aléatoires de lois conjointes imposées, ou bien de suites de variables aléatoires indépendantes de lois marginales imposées.*

### C.1 QUELQUES EXEMPLES SIMPLES DE THÉORÈMES D'EXISTENCE

#### Existence d'une variable aléatoire de loi donnée

A 78

Le problème le plus simple que l'on se pose est : si l'on se donne une fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  convenable, existe-t-il *effectivement* une variable aléatoire qui admette  $F$  comme fonction de répartition ?

■ **Théorème C.1 (Théorème de réalisation)** *Soit  $F$  une fonction croissante, continue à droite et admettant les limites 0 et 1 en  $-\infty$  et  $+\infty$  respectivement. Alors il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$  et une variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $F$  soit la fonction de répartition de  $X$ .*

En d'autres termes, si l'on se donne une « loi de variable aléatoire », alors on peut réaliser cette loi au moyen d'une variable aléatoire.

Le démonstration est aisée dans son principe : on choisit pour espace  $\Omega := \mathbb{R}$ , et on définit la probabilité  $\mathbf{P}$  par sa valeur sur les intervalles  $]-\infty; x]$  par  $\mathbf{P}(]-\infty; x]) := F(x)$ . On choisit enfin comme tribu la tribu  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  des boréliens. Le fait d'avoir défini  $\mathbf{P}$  sur les intervalles  $]-\infty; x]$  permet d'étendre, de manière unique,  $\mathbf{P}$  à toute la tribu engendrée par ces intervalles, à savoir justement la tribu  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  des boréliens<sup>(1)</sup>. Il ne reste plus qu'à définir la variable  $X$  comme l'identité :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad X(\omega) = \omega.$$

---

<sup>(1)</sup>. Rappelons qu'il s'agit essentiellement d'utiliser le théorème de Carathéodory, après avoir défini  $\mathbf{P}$  sur l'algèbre  $\mathfrak{A}$  des unions finies disjointes d'intervalles  $]a; b]$ , et après avoir prouvé que  $\mathbf{P}$  ainsi étendue est  $\sigma$ -additive sur  $\mathfrak{A}$ .

# Annexe D

## Lexique français-anglais

| français                     | anglais                                                                     |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| absolument continue          | <i>absolutely continuous</i>                                                |
| aléatoire                    | <i>random</i>                                                               |
| algèbre                      | <i>algebra, field</i>                                                       |
| atome                        | <i>atom</i>                                                                 |
| biais                        | <i>bias</i>                                                                 |
| borélien                     | <i>Borel set</i>                                                            |
| branchement (processus de)   | <i>branching process</i>                                                    |
| classe monotone              | <i>monotone class, d-system, <math>\lambda</math>-system, Dynkin system</i> |
| coefficient d'aplatissement  | <i>kurtosis</i>                                                             |
| coefficient de corrélation   | <i>(linear) correlation coefficient</i>                                     |
| convergence en loi / étroite | <i>convergence in law/distribution</i>                                      |
| convergence étroite          | <i>weak convergence</i>                                                     |
| convergence en probabilité   | <i>convergence in probability</i>                                           |
| convergence presque sûre     | <i>almost sure convergence</i>                                              |
| covariance                   | <i>covariance</i>                                                           |
| dé équilibré                 | <i>fair dice</i>                                                            |
| degré de liberté (d.d.l.)    | <i>degree of freedom (d.o.f.)</i>                                           |
| dénombrable                  | <i>countable, enumerable</i>                                                |
| densité de probabilité       | <i>density function</i>                                                     |
| — conjointe, marginale       | <i>joint, marginal —</i>                                                    |
| écart type                   | <i>standard deviation</i>                                                   |
| échantillon                  | <i>sample</i>                                                               |
| épreuve $\omega$             | <i>sample point</i>                                                         |
| équiprobables                | <i>equally likely</i>                                                       |
| espace des épreuves          | <i>sample space</i>                                                         |
| espérance                    | <i>expectation, expected value, mean value</i>                              |
| estimateur sans biais        | <i>unbiased estimator</i>                                                   |
| estimateur convergent        | <i>consistent estimator</i>                                                 |
| événement                    | <i>event</i>                                                                |
| fonction de répartition      | <i>(cumulative) distribution function c.d.f.</i>                            |
| — conjointe, marginale       | <i>joint, marginal —</i>                                                    |
| hypothèse nulle              | <i>null hypothesis</i>                                                      |

# Index

Les numéros de page en **gras** renvoient aux définitions principales, ceux en *italique* à des exercices. Les noms en PETITES CAPITALES renvoient aux indications biographiques. Les numéros de page précédés par la lettre « H » renvoient à des définitions données dans la partie « Heuristique », qui peuvent être plus informelles que les autres.

## Symboles

|                                      |                  |
|--------------------------------------|------------------|
| 0–1                                  |                  |
| loi du — de Borel                    | 119              |
| loi du — de Kolmogorov               | 447              |
| $\mathbf{1}_A$                       | 135              |
| $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$           | 383              |
| $\mathfrak{B}^\infty$                | 735              |
| $\mathfrak{B}^n$                     | 735              |
| $\Gamma$ (fonction d'Euler)          | 628, 711         |
| $\Gamma$ (loi —)                     | 243, 287         |
| $\Omega$                             | [H34]            |
| $\chi^2$ (loi du —)                  | 243              |
| $\delta_a$ (mesure de Dirac)         | 86, <b>95</b>    |
| $\gamma$ (loi —)                     | 243              |
| simulation                           | 564              |
| $\omega$                             | [H34]            |
| $\pi$ - $\lambda$ (théorème —)       | 740              |
| $\pi$ -système                       | 739              |
| — et indépendance                    | 741              |
| $\preccurlyeq$                       | 737              |
| $\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$       | 446              |
| $\sigma(X)$                          | 367              |
| $\sigma(\mathfrak{F})$               | 83               |
| $\sigma$ -additivité                 | [H45], <b>86</b> |
| $\sigma$ -algèbre                    | <b>81</b>        |
| $\sigma$ -finie (mesure —)           | 743              |
| $\sigma$ -sous-additivité            | 89, 99           |
| $\sim$ ( $u_n \sim v_n$ )            | 705              |
| $\otimes$ (produit direct/tensoriel) | 271              |
| $\otimes$ (tribu produit)            | 735              |
| $\zeta$ (fonction — de Riemann)      | 541, 620         |

## A

|                                    |                         |
|------------------------------------|-------------------------|
| Absolument continue                |                         |
| densité —                          | 96                      |
| fonction —                         | 711                     |
| mesure —                           | 743                     |
| variable aléatoire —               | 232                     |
| Absorbant                          |                         |
| classe —e                          | 596                     |
| état —                             | 596                     |
| Accroissements                     |                         |
| indépendants                       | 639                     |
| stationnaires                      | 639                     |
| Adaptée (suite — à une filtration) | 517                     |
| Additive                           | 87                      |
| $\sigma$ -additive                 | [H45], <b>86</b>        |
| sous-additive                      | 87                      |
| Adjoint d'un endomorphisme         | 729                     |
| Aiguille de Buffon                 | 568                     |
| Aléa                               | [H34]                   |
| Aléatoire                          |                         |
| matrice —                          | 365, 619                |
| série entière —                    | 686                     |
| variable —                         | voir Variable aléatoire |

|                                |                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| Alembert (erreur de d'—)       | [H39]                               |
| Algèbre                        | <b>80</b>                           |
| engendrée                      | 81                                  |
| sans atomes                    | 98                                  |
| Anniversaires (paradoxe des —) | 50                                  |
| Aplatissement                  | 260                                 |
| Application mesurable          | [H60], 317, 736                     |
| Approximation                  |                                     |
| binomiale par normale          | 483                                 |
| binomiale par Poisson          | 482                                 |
| Poisson par normale            | 485                                 |
| Arc sinus (loi de l'—)         | 249, 430, <b>681</b>                |
| Arrêt (temps d'—)              | <b>376</b> , 601                    |
| Asymétrie (coefficient d'—)    | 260                                 |
| Asymptotique (tribu —)         | 445                                 |
| Atome                          | 81                                  |
| algèbre sans —s                | 98                                  |
| d'une partition                | 504                                 |
| tribu sans —s                  | 99                                  |
| Atomique (événement)           | [H34]                               |
| Atteinte (temps d'—)           | 601                                 |
| Autoadjoint (endomorphisme —)  | 730                                 |
| Avant (un pas en —)            | 51, 213, 217, <b>603</b> , 609, 610 |
| Avogadro (constante d'—)       | 664                                 |
| Axiomes                        |                                     |
| 1 à 3                          | 86                                  |
| 3', 3'' et 3'''                | 88                                  |

## B

|                                   |                      |
|-----------------------------------|----------------------|
| B( $a, b$ ) (loi bêta)            | 243                  |
| $\mathcal{B}(n; p)$               | voir Binomiale (loi) |
| $\mathcal{B}(p)$                  | 135                  |
| Baguette brisée                   | 286                  |
| Banach (espace de —)              | 729                  |
| Base hilbertienne                 | 724                  |
| Bayes (formule de —)              | 106, 107             |
| version continue                  | 281                  |
| Benford (loi de —)                | 580                  |
| Bernoulli                         |                      |
| loi de —                          | 135                  |
| épreuve de —                      | 135                  |
| Bernstein                         |                      |
| formule de —                      | 529                  |
| inégalité de —                    | 354                  |
| théorème de —                     | 536                  |
| Bertrand (série de —)             | 705                  |
| Biais d'un estimateur             | 496                  |
| Bienaymé (égalité de —)           | 190, 278, 376        |
| Bienaymé-Tchebychev (inéq. de —)  | 161, 261, <b>353</b> |
| d'ordre $k$                       | 353                  |
| Bilatérale (loi exponentielle —)  | 288                  |
| Binomial (coefficient —)          | 726                  |
| Binomiale (loi —)                 | <b>136</b>           |
| approximation par Poisson         | 482                  |
| approximation par une loi normale | 483                  |
| calcul de l'espérance             | 151                  |
| Boltzmann                         |                      |
| facteur de —                      | 66, <b>627</b>       |
| formule de —                      | 630                  |
| Boole                             |                      |
| algèbre de —                      | 80                   |
| inégalité de —                    | 89, 99               |

- Borel  
  lemmes de — -Cantelli ..... 119, 297  
  loi du 0-1 de — ..... 119  
  théorème des nombres normaux de — 225  
Borélienne (fonction —) ..... 736  
Boréliens  
  de  $\mathbb{C}$  ..... 383  
  de  $\mathbb{R}$  ..... 83, **733**  
  de  $\mathbb{R}^n$  ..... 358, **735**  
Borne inférieure/supérieure ..... 81  
BORTKIEWICZ Władisław ..... 139  
Boson ..... [H41], 632  
Boule ouverte ..... 729  
Box-Muller (méthode de —) ..... 555  
Branchement (processus de —) ..... 199  
Brownien ..... voir Mouvement  
Bruit de grenaille ..... 641  
BUFFON, comte de ..... 568  
Buffon (aiguille de —) ..... 568  
BYWATER John ..... 646  
Bêta (loi —) ..... 243
- C**
- Cantelli  
  inégalité de — ..... 299  
  lemmes de Borel- — ..... 119, 297  
  loi forte ..... 464, 466  
  théorème de Glivenko- — ..... 457  
Cantor  
  diagonale de — ..... 703  
  fonction de — ..... 714  
Caractéristique  
  fonction — ..... 298  
Caractéristique (fonction —) ..... 384  
Carathéodory (théorème de —) ..... 97, **743**  
Cauchy  
  loi de — ..... 242  
  somme de variables de — ..... 389  
  produit de — ..... 720  
  suite de — ..... 704  
Cauchy-Schwarz (inégalité de —) ..... 159, 257, **347**, 360  
  dans un espace préhilbertien ..... 723  
Causalité ..... 492  
Cavalerie Légère ..... 343  
Central (théorème-limite —) ..... **472**, 477  
Centré  
  moment — ..... **340**  
  d'une variable à densité ..... 255  
  d'une variable discrète ..... 155  
  variable — e ..... 159, 260  
Chaîne de Markov ..... 203, **586**  
Chaleur (équation de la —) ..... 649  
Champernowne (nombre de —) ..... 226  
Changement de variable ..... 722  
  aléatoire ..... 245  
Chapeaux (problème des —) ..... 151  
Chapman-Kolmogorov (équation de —) ..... 591, 650  
Chenille ..... 51, 610  
Cigogne (effet —) ..... 493  
Classe  
  absorbante ..... 596  
  fermée ..... 596  
  indécomposable ..... 595  
  récurrente ..... 601  
  transitoire ..... 601  
Classe monotone ..... 739  
  engendrée ..... 740  
  lemme de — ..... 740  
Coalitions (lemme des —)  
  cas discret ..... 183  
  cas à densité ..... 273  
  (démonstration) ..... 742  
  pour des tribus ..... 369, **741**  
  pour des variables aléatoires ..... **370**, **741**  
Cochran (théorème de —) ..... 405  
Coefficient  
  d'asymétrie ..... 260  
  binomial ..... 726  
  de corrélation ..... 191, 278, 359  
Collectionneur (problème du —) ..... 152, **166**  
Communicants (états —) ..... 593  
Commutativement convergente (série —) ..... 707  
Comparaison de séries positives ..... 706  
Complet  
  espace probabilisé — ..... 90  
  espace vectoriel normé — ..... 729  
  système — ..... 91  
  système — induit par  $X$  ..... 130  
  système quasi- — ..... 91  
  tribu complète ..... 90  
Complexion ..... 625  
Composées (th. des probabilités —) ..... [H48], 105  
Conditionnelle  
  densité — ..... 280  
  espérance ..... voir Espérance  
  probabilité — ..... [H47], 104  
  sachant une partition ..... 521  
  sachant une tribu ..... 522  
  sachant une v.a. ..... 522  
Confiance (intervalle de —) ..... 497  
Conjointe  
  densité — ..... 266  
  fonction de répartition — ..... 265  
  loi —  
  cas discret ..... 178  
  cas à densité ..... 265  
Continue  
  fonction — à droite ..... 710  
  fonction absolument — ..... 711  
  fonction uniformément — ..... 710  
  variable aléatoire — ..... 232  
Continuité  
  correction de — ..... 483  
  monotone ..... 88  
  radiale (lemme d'Abel) ..... 720  
  théorème de — ..... 388, 425, **427**  
Convergence  
  commutative ..... 707  
  dominée (th. de — discret) ..... 168, 710  
  dominée (th. de —) ..... 342  
  étroite ..... 419, **421**  
  dans  $L^p$  ..... 419  
  en loi ..... **419**, 421  
  monotone ..... 341  
  (démonstration) ..... 355  
  en moyenne ..... 418  
  presque sûre ..... **412**, 453  
  en probabilité ..... **414**, 452  
  simple ..... 718  
  d'une suite de parties ..... 118  
  uniforme ..... 718  
Convergent (estimateur —) ..... 496  
Convolution  
  des densités ..... 375  
  de distributions de Dirac ..... 375  
  des fonctions de répartition ..... 374  
  formule de — ..... 374  
  formule de — discrète ..... 186  
  des mesures de probabilité ..... 374  
Correction de continuité ..... 483  
Corrélation  
  et causalité ..... 492  
  coefficient de — ..... 191, 278, 359  
*Coupon collector's problem* ..... 152, **166**

Covariance ..... **348**  
 d'un couple à densité ..... 277  
 d'un couple discret ..... 187  
 matrice de — ..... 359  
   changement de base ..... 360  
 Cramér (modèle de —) ..... 578  
 Crible (formule du —) ..... 91  
 Critère de Weyl ..... 432  
 Croissance (propriété de —)  
   pour les probabilités ..... 87  
   pour les tribus ..... 84  
 Cylindre ..... 210, 658, **735**, **751**

**D**

d'Alembert (erreur de —) ..... [H39]  
 de Moivre (théorème de —Laplace) ..... 483  
 de Morgan (règles de —) ..... 38  
 Décomposition de Lebesgue ..... 324, 714  
 Décorrélation ..... 351  
 Décorrélées (variables aléatoires —) ..... 188  
 Demi-vie ..... 259  
 Dénombrable ..... 703  
 Dénombrablement additive ..... [H45]  
 Dénombrément ..... 703  
 Densité  
   conditionnelle ..... 280  
   conjointe ..... 266  
   au sens des distributions ..... 325  
   marginale ..... 269, 361  
   d'une mesure ..... 743  
   d'une partie de  $\mathbb{N}$  ..... 297  
   d'une probabilité ..... 96  
   sur  $\mathbb{R}^n$  ..... 358  
   d'une variable aléatoire ..... [H64], 232  
   d'un vecteur gaussien ..... 403  
 Dés non transitifs ..... 698  
 Destin ..... [H34]  
 Déterministe  
   système — ..... [H33]  
   variable — ..... **33**, 378  
 Diagonale de Cantor ..... 703  
 Diagramme en bâtons ..... 133  
 Diffuse (loi —) ..... 232  
 Dini (théorème de —) ..... 718  
 Dirac  
   convolution de distributions de — ..... 375  
   distribution de — ..... 325, **726**  
   mesure de — ..... 86, **95**  
 Dirichlet  
   problème de — ..... 605, 664  
   théorème de — ..... 707  
 Discontinuité  
   de 1<sup>re</sup>/ de 2<sup>e</sup> espèce ..... 712  
   saut de — ..... 132, 321, **713**  
 Discrète  
   tribu — ..... 81  
   variable aléatoire — ..... [H63], **129**  
 Distribution  
   de Dirac ..... 325, **726**  
   convolution ..... 375  
   de Maxwell-Boltzmann ..... 66, 629  
 Dominée (th. de convergence —) ..... 342  
   cas discret ..... 168, 710  
 Doob  
   inégalité des remontées ..... 520  
   lemme de — -Dynkin ..... 512, 737  
 Droite de régression ..... 398, **490**  
 Durée de vie ..... 259  
 Dynkin  
   lemme de Doob- — ..... 512, 737  
   théorème de — ..... 740  
 Dés non transitif ..... 698

**E**

$\mathcal{E}(\alpha)$  ..... 238  
 Écart-type ..... **340**  
   d'une variable à densité ..... 256  
   d'une variable discrète ..... 158  
 Échec ..... 135  
 Effet cigogne ..... 493  
 Égalité  
   de Bienaymé ..... 190, 278, 376  
   de Parseval ..... 724  
 Ehrenfest (modèle des urnes d'—) ..... 608  
 EINSTEIN Albert ..... 664  
 Élection (théorème du scrutin) ..... 299  
 Élimination (processus d'—) ..... 298  
 Empirique  
   fonction de répartition — ..... 456  
   moyenne — ..... 494  
 Endomorphisme autoadjoint ..... 730  
 Endomorphisme orthogonal ..... 730  
 Engendrée  
   algèbre — ..... 81  
   classe monotone — ..... 740  
   tribu — ..... 83, 367, 446  
 Entropie ..... 630  
 Épreuves (espace des —) ..... [H34], 84  
 Équation  
   de la chaleur ..... 649  
   de Chapman-Kolmogorov ..... 591, 650  
 Équidistribuée (suite —) ..... 431  
 ERDŐS Paul ..... 216  
 Erdős-Kac (théorème d'—) ..... 615  
 Ergodique  
   matrice / chaîne — ..... 598, 731  
   théorème — ..... 599, 731  
 Erreur  
   de d'Alembert ..... [H39]  
   fonction d'— « erf » ..... 240  
 Espace  
   de Banach ..... 729  
   des épreuves ..... [H34], 84  
   euclidien ..... 729  
   mesurable ..... **84**  
   probabilisable ..... **84**  
   probabilisé ..... **86**  
   vectoriel normé ..... 729  
   complet ..... 729  
 Espérance  
   calcul pratique ..... 151  
   conditionnelle  
     sachant une partition ..... 504  
     sachant une tribu ..... 511  
     sachant une v.a. .... **512**  
     sachant une v.a. discrète ..... 194, 195,  
       **508**  
     sachant une v.a. à densité ..... 285  
   définition générale ..... **337**  
   définition alternative ..... 326, 327  
   expression alternative ... 153, 169, **362**  
   infinie ..... 335, 337  
     (cas discret) ..... 149  
   linéarité ..... 338  
     cas discret ..... 150  
   totale (formule de l'—) ..... 194  
   d'une v.a. complexe ..... 337, **383**  
   d'une v.a. discrète ..... [H73], **145**  
   d'une v.a. à densité ..... [H74], **253**  
   d'une v.a. simple ..... 334  
   d'une v.a. positive ..... 335  
 Estimateur ..... 496  
 Estimation de Hardy & Littlewood ..... 299  
 Étagée ..... voir Simple

- État  
  —s communicants ..... 593  
  absorbant ..... 596  
  final ..... 596  
  microscopique ..... 624  
  périodique ..... 597  
  récurrent ..... 601  
  transitoire (transient) ..... 601  
ETEMADI (Nasrollah —) ..... 460  
Étroite (convergence —) ..... 419, **421**  
Euclidien (espace —) ..... 729  
Euler  
  constante d'— -Mascheroni ..... 705  
  fonction  $\Gamma$  d'— ..... 628, 711  
  identité d'— ..... 541  
  indicatrice d'— ..... 541  
Événement ..... [H35], **84**  
  atomique ..... [H34]  
  —s incompatibles ..... 84  
  —s indépendants ..... 114  
  —s mutuellement indépendants ..... 115  
  négligeable ..... [H38], 89  
  presque sûr ..... [H38], 89  
  de queue ..... 445  
  récurrent ..... 215  
  régénératif ..... 214  
  symétrique ..... 448  
  transient ..... 215  
Expérience (résultat d'une —) ..... [H34]  
Exponentielle  
  bilatérale (loi —) ..... 288  
  loi — ..... [H64], **238**  
  lien avec la loi de Poisson .. 249, 548  
  *simulation* ..... 549  
Extension (th. d'— de Kolmogorov) ..... 750
- F**
- Face (trois — d'affilée) ..... 51  
Facteur de Boltzmann ..... 66, **627**  
Factoriel (moment —) ..... 169  
Factorisation (lemme de —) ..... 512, 737  
Faible (loi — des grands nombres) .. 219, **452**  
  de Khintchine ..... 453  
Famille sommable ..... 708  
Fatou  
  inégalités de — ..... 126  
  lemme de — ..... 341  
FELLER William ..... 216  
Fermé ..... 729  
  classe —e ..... 596  
Fermion ..... 632  
Feu tricolore (temps d'attente) .... 322, 381  
Filtration ..... 517  
Final (état —) ..... 596  
Fluctuation (intervalle de —) ..... 497  
Fonction  
   $\Gamma$  d'Euler ..... 628, 711  
  borélienne ..... 736  
  de Cantor ..... 714  
  caractéristique ..... 298, 384  
  d'erreur ..... 240  
  génératrice ..... 163  
  de Haar ..... 662  
  harmonique ..... 605  
  indicatrice d'un événement ..... 135  
  mesurable ..... [H60], 317, 736  
  de Rademacher ..... 224  
  de répartition ..... [H60], 132  
  conjointe ..... 265  
  d'une probabilité sur  $\mathbb{R}$  ..... 93  
  empirique ..... 456  
  de Schauder ..... 662, 673  
  singulière ..... 323, 713  
  —test ..... 725  
  uniformément continue ..... 710  
  à variation bornée ..... 711  
Formule  
  de Bayes ..... 106, 107  
  version continue ..... 281  
  de Bernstein ..... 529  
  de Boltzmann ..... 630  
  de convolution ..... 186, 374, **375**  
  du crible ..... 91  
  de l'espérance totale ..... 194  
  de König-Huygens ..... 157, 256, **340**  
  de Poincaré ..... 91  
  des probabilités composées .... [H48], 105  
  des probabilités totales ..... [H47], 105  
  de Stirling ..... 705  
  preuve probabiliste ..... 531  
  de transfert ..... **344**  
  pour un couple discret ..... 180  
  pour un couple à densité ..... 271  
  pour une variable discrète ..... 155  
  pour une variable à densité ..... 254, 346  
  de Vandermonde ..... 142, 727  
Forte (loi — des grands nombres) ..... 219, **453**, 455  
  cas  $L^2$  ..... 466  
  cas  $L^4$  (démonstration de Cantelli) . 466  
  (démonstration d'Etemadi) ..... 460  
  (démonstration de Pratelli) ..... 463  
Forte (propriété de Markov —) ..... 601  
Fortement irréductible (matrice —) . 598, 731  
Fortune  
  comment gagner des —s ..... 376  
  Dame — ..... [H34]  
Fourier (transformée de —)  
  d'une mesure) ..... 384  
  d'une variable aléatoire ..... 298  
Frobenius (théorème de Perron- —) . 599, 731  
Fubini (théorème de —)  
  cas général ..... 361, 721  
  pour les séries doubles .... 708, 709, 732
- G**
- $\mathcal{G}(p)$  ..... 136  
Galton  
  paradoxe de — ..... 698  
  processus de — -Watson ..... 199  
Gamma  
  fonction  $\Gamma$  d'Euler ..... 628, 711  
  loi  $\Gamma(\alpha, \beta)$  ..... 243, 287  
gamma (loi  $\gamma(\nu)$ ) ..... 243  
  *simulation* ..... 553, 564  
Gaussien  
  loi —ne ..... voir Loi normale  
  variable —ne ..... 392  
  vecteur — ..... 400  
Génératrice (fonction —) ..... 163  
Géométrique (loi —) ..... **136**  
  max de  $n$  — ..... 298  
  *simulation* ..... 547  
Germe de probabilité ..... [H42]  
GIBBS Willard ..... 624  
Gibbs (paradoxe de —) ..... 630  
Glivenko-Cantelli (théorème de —) ..... 457  
GOUY Louis Georges ..... 646  
Grands nombres  
  loi faible des — ..... 219, **452**  
  de Khintchine ..... 453  
  loi forte des — ..... 219, **453**, 455  
  cas  $L^2$  ..... 466  
  cas  $L^4$  (démonstration de Cantelli) 466  
  (démonstration d'Etemadi) ..... 460  
  (démonstration de Pratelli) ..... 463

Grenaille (bruit de —) ..... 641  
 Grenouille (paradoxe des —) ..... 287  
 Grossière  
   divergence — ..... 705  
   tribu — ..... 81  
 Guildenstern & Rosencrantz ..... 27  
 Gumbel (loi de —) ..... 169

**H**

Haar (fonctions de —) ..... 662  
 Hardy (estimation de — -Littlewood) ..... 299  
 Harmonique  
   fonction — ..... 605  
   nombre — ..... 166  
   série — ..... 705  
 Heine (théorème de —) ..... 710  
 Hewitt-Savage (loi du tout ou rien de —) ..... 448  
 Hilbertienne (base —) ..... 724  
 Hoeffding (inégalité de —) ..... 467  
 Hölder (inégalités de —) ..... 170  
 Huygens (théorème de König- —) ..... 157,  
   256, **340**  
 Hypergéométrique (loi —) ..... 141  
 Hypothèse de Riemann ..... 620

**I**

Identité  
   d'Euler ..... 541  
   de Wald ..... 197, 377  
 Image  
   probabilité — ..... 320  
   réciproque d'une partie ..... 60  
 Indépendance  
   accroissements indépendants ..... 639  
   de deux événements ..... 114  
   mutuelle  
     de classes d'événements ..... 369  
     d'événements ..... 115  
     de tribus ..... 369  
     de variables aléatoires ..... **370**  
     de variables discrètes ..... 182  
     de variables à densité ..... 272  
   représentation graphique ..... 368, 380  
   de deux v.a. .... **367, 368**  
     à densité ..... 271  
     discrètes ..... 181  
 Indicatrice  
   d'Euler ..... 541  
   fonction — d'un événement ..... 135  
 Inégalité  
   de Bernstein ..... 354  
   de Bienaymé-Tchebychev ..... 161, 261, **353**  
     d'ordre  $k$  ..... 353  
   de Boole ..... 89, 99  
   de Cantelli ..... 299  
   de Cauchy-Schwarz ..... 159, 257, **347**,  
     360, 723  
   de Doob ..... 520  
   de Fatou ..... 126  
   de Hoeffding ..... 467  
   de Hölder ..... 170  
   de Jensen ..... 298, 354, 511, 718  
   de Lyapounov ..... 355  
   de Markov ..... **352**  
     pour une v.a. à densité ..... 261  
     pour une v.a. discrète ..... 161  
     pour une v.a. discrète ..... 170  
   maximale de Kolmogorov ..... 684  
   de Paley-Zygmund ..... 688  
   des remontées de Doob ..... 520  
   triangulaire ..... 706  
 inf ..... 81

Infiniment souvent ..... 116  
 Initiale (loi —) ..... 586  
 Inspection (paradoxe de l'—) ..... 74, 643  
 Instantanée (loi —) ..... 590  
 Intégrable (v.a. —) ..... **337**  
   cas discret ..... 149  
   cas positif ..... 335  
   cas à densité ..... 253  
 Intégrale  
   gaussienne ..... 723  
   de Paley-Wiener-Zygmund ..... 673  
   selon une mesure de probabilité ..... 334-340  
 Intégration terme à terme ..... 154, 342  
 Intervalle  
   de confiance ..... 497  
   de fluctuation ..... 497  
 Invariante (loi, probabilité, mesure —) ..... 591  
 Irréductible  
   matrice fortement — ..... 598, 731  
   matrice, chaîne — ..... 596, 731  
 i.s. (infiniment souvent) ..... 116  
 Itéré (loi du logarithme —) ..... 478

**J**

Jacobien ..... 722  
 Jensen (inégalité de —) ..... 298, 354, 511, 718  
 Jeu non transitif ..... 697  
 Joker ..... [H43]  
 Jumeaux (entiers « premiers ») ..... 583

**K**

Kac (théorème d'Erdős- —) ..... 615  
 KAKUTANI Shizuo ..... 666  
 Khintchine (théorème de —) ..... 453  
 Kolmogorov  
   axiomes de — ..... 86  
   équation de Chapman- — ..... 591, 650  
   inégalité maximale de — ..... 684  
   loi des grands nombres de — ..... **453**, 455  
   loi du tout ou rien de — ..... 447  
   test de — -Smirnov ..... 458  
   théorème d'extension ..... 750  
 König-Huygens (théorème de —) ..... 157,  
   256, **340**  
 Kurtosis ..... 260

**L**

$\mathcal{L}^0$  ou  $\mathcal{L}^0(\Omega)$  ..... 317  
 $\mathcal{L}_b^0(\Omega)$  ..... 317  
 $\mathcal{L}_+^0(\Omega)$  ..... 317  
 $L^1$  ..... 339  
 $\mathcal{L}^1$  ..... [H73], 337  
 $L^2$  ..... 347  
 $\mathcal{L}^2$  ..... 347  
 $L^p$  ..... 350  
 Lachesis ..... [H34]  
 Lagrange (multiplicateurs de —) ..... 723  
 Laplace  
   — -Gauss (loi de —) ..... 239  
   théorème de de Moivre- — ..... 483  
   transformée de — d'une v.a. .... 299  
 $\mathcal{L}^p$  ..... 340  
 Lebesgue  
   décomposition de — ..... 324, 714  
   mesure de — sur  $[0; 1]$  ..... 94  
   tribu de — ..... 90  
 LEEUWENHOEK Antoni ..... 646  
 Lemme  
   d'Abel ..... 720  
   de — -Cantelli ..... 297  
   de Borel-Cantelli ..... 119  
   de classe monotone ..... 739, **740**

- des coalitions
    - cas discret ..... 183
    - cas à densité ..... 273
    - (démonstration) ..... 742
    - pour des tribus ..... 369, **741**
    - pour des variables aléatoires ..... **370, 741**
  - de Doob-Dynkin ..... 512, 737
  - de factorisation ..... 512, 737
  - de Fatou ..... 341
  - des moments ..... 404
  - Lévy (théorème de —) ..... 388, **427**
  - lim inf et lim sup ..... 116
  - Limite
    - inférieure/supérieure ..... 116
    - d'une suite de parties ..... 118
    - d'une suite monotone de parties ..... 82
    - théorème — central ..... **472, 477**
  - Limites
    - lim  $\uparrow$ , lim  $\downarrow$  ..... 82
  - Littlewood (estimation de Hardy- —) .... 299
  - Logarithme (loi du — itéré) ..... 478
  - Loi ..... [u58], **320**
    - a priori/a posteriori* ..... 281
    - de l'Arc sinus ..... 430, **681**
    - de Benford ..... 580
    - de Bernoulli ..... 135
    - binomiale ..... 136
    - approximation normale ..... 483
    - approximation par Poisson ..... 482
    - calcul de l'espérance ..... 151
    - bêta  $B(a, b)$  ..... 243
    - de Cauchy ..... 242
    - somme de variables de — ..... 389
  - conditionnelle
    - cas discret ..... 179, 193
    - cas à densité ..... 279
  - conjointe
    - cas discret ..... 178
    - cas à densité ..... 265
  - convergence en — ..... 419, 421
  - du demi-cercle ..... 430
  - diffuse ..... 232
  - exponentielle ..... [u64], 238
    - lien avec la loi de Poisson .. 249, 548
    - simulation* ..... 549
    - somme de deux v.a. .... 287
  - faible des grands nombres ..... 219, **452**
    - de Khintchine ..... 453
  - forte des grands nombres . 219, **453, 455**
    - cas  $L^2$  ..... 466
    - cas  $L^4$  (démonstration de Cantelli) 466
    - (démonstration d'Etemadi) ..... 460
    - (démonstration de Pratelli) ..... 463
  - Gamma  $\Gamma(\alpha, \beta)$  ..... 243, 287
  - gamma  $\gamma(\nu)$  ..... 243
    - simulation* ..... 553, 564
  - gaussienne ..... voir Loi normale
  - géométrique ..... **136**
    - max de  $n$  v.a. .... 298
    - simulation* ..... 547
  - de Gumbel ..... 169
  - hypergéométrique ..... 141
  - initiale ..... 586
  - instantanée ..... 590
  - invariante ..... 591
  - du  $\chi^2$  ..... 243
  - du logarithme itéré ..... 478
  - marginale
    - cas discret ..... 178, 179
    - cas à densité ..... 266, 361
  - normale ..... **239**
    - quotient de deux v.a. .... 274
    - simulation* ..... 554
    - somme de deux v.a. .... 274
  - des petits nombres ..... 139
  - de Poisson ..... 138
    - approximation normale ..... 485
    - lien avec l'exponentielle .... 249, 548
    - mode d'une — ..... 143
    - simulation* ..... 548
  - du premier succès ..... 136
  - de Rayleigh ..... 555
  - sans mémoire ..... 138, 238
  - du tout ou rien
    - de Borel ..... 119
    - de Hewitt-Savage ..... 448
    - de Kolmogorov ..... 447
  - uniforme
    - discrète ..... 135
    - à densité ..... 237
    - d'une variable aléatoire ..... **320**
  - Lyapounov (inégalités de —) ..... 355
- M**
- Marche aléatoire
    - discrète ..... 646
    - limite continue ..... 647, 648
    - sur  $\mathbb{Z}$  ..... 220
    - sur  $\mathbb{Z}$ , asymétrique ..... 299
  - Marginale
    - s d'un couple ..... 179, 266
    - densité — ..... 269, 361
    - loi —
      - cas discret ..... 178, 179
      - cas à densité ..... 266, 361
  - Markov
    - chaîne de — stationnaire ..... 203, 586
    - inégalité de — ..... **352**
    - pour une v.a. à densité ..... 261
    - pour une v.a. discrète ..... 161, 170
    - processus de — ..... 661
    - propriété de — ..... 586
    - propriété de — forte ..... 601
  - Martingale ..... 516, **517**
  - Masse de Dirac ..... 86, **95**
  - Matching problem* ..... 151
  - Maternité (nuits agitées à la —) ..... 498
  - Matrice
    - aléatoire ..... 365, 619
    - de covariance ..... 359
    - changement de base ..... 360
    - ergodique ..... 598, 731
    - fortement irréductible ..... 598, 731
    - irréductible ..... 596, 731
    - jacobienne ..... 722
    - positive ..... 589, 730
    - régulière ..... 598, 731
    - stochastique ..... **586, 589, 730**
    - symétrique définie positive ..... 730
    - symétrique positive ..... 730
    - de transition ..... 586
  - Maximale (inégalité — de Kolmogorov) .. 684
  - Maximum
    - de variables aléatoires ... 275, 287, 288, 355
    - géométriques ..... 298
    - presque exponentielles ..... 300
    - de vraisemblance ..... 679
  - MAXWELL James Clerk ..... 624
  - Maxwell-Boltzmann (distrib. de —) .. 66, 629

Médiane d'une v.a. à densité ..... 236  
 Mémoire (loi sans —) ..... 138, 238  
 Menteurs (la chaîne des —) ..... 51  
 Mesurable  
   espace — ..... 84  
   fonction — ..... [H60], 317, 736  
     selon une partition ..... 509  
     selon une tribu ..... 512, 737  
   un ensemble non — ..... 97  
 Mesure  
    $\sigma$ -finie ..... 743  
   absolument continue ..... 743  
   de Dirac ..... 86, **95**  
   de Lebesgue sur  $[0; 1]$  ..... 94  
   produit ..... 358  
   de Wiener ..... 657  
 Méthode  
   de Box-Muller ..... 555  
   de Box-Muller avec rejet ..... 556  
   de Miller-Rabin ..... 574  
   de Monte-Carlo ..... voir Monte-Carlo  
   « un pas en avant » .. 51, 213, 217, **603**,  
     609, 610  
   du rejet ..... 455, **550**, 572  
 Métro (temps d'attente du —) ..... 282  
 Middle-square (algorithme —) ..... 560, 564  
 Miller  
   méthode de —-Rabin ..... 574  
   témoin de — ..... 575  
   théorème de — ..... 575  
 Mixte (variable aléatoire —) ..... 322  
 Mode ..... 143  
 Modèle de Cramér ..... 578  
 Moment ..... **340**  
   centré ..... **340**  
   d'une variable à densité ..... 255  
   d'une variable discrète ..... 155  
   d'une variable à densité ..... 255  
   d'une variable discrète ..... 155  
   factoriel ..... 169  
   lemme des —s ..... 404  
   problème des —s ..... 301  
   récupération des —s ..... 165  
 Monotone  
   classe — ..... 739  
   engendrée ..... 740  
   lemme de classe — ..... 740  
   théorème de convergence — ..... 341  
   (démonstration) ..... 355  
 Monte-Carlo (méthode de —) ..... **567**  
   pour calculer une intégrale ..... 570  
   pour estimer une moyenne ..... 568  
   pour le problème de Dirichlet ..... 664  
   pour la primalité ..... 574  
   pour effectuer un tri ..... 579  
 Morgan (règles de de —) ..... 38  
 Mouvement brownien  
   construction canonique ..... 658  
   covariance ..... 659  
   définition ..... 655  
   existence ..... 656  
   loi (mesure de Wiener) ..... 657  
 Moyenne  
   empirique ..... 494  
   règles de la valeur — ..... 604, 605  
 Multiplicateurs de Lagrange ..... 723  
 Multivariée (distribution normale —) ..... 400  
 Mutuellement indépendants (évts. —) ..... 115

## N

$\mathcal{N}(m; \sigma^2)$  ..... 239  
 Naissances ..... 74  
 NEEDHAM John Turberville ..... 646  
 Négligeable ..... [H38], **89**  
 NEWCOMB Simon ..... 580  
 Nikodým (théorème de Radon- —) ..... 743  
 Nombre  
   de Champernowne ..... 226  
   normal ..... 225, 532  
   —s de Stirling ..... 165, **727**  
 Normal (nombre —) ..... 225, 532  
 Normale (loi —) ..... **239**  
   quotient de deux v.a. .... 274  
   simulation ..... 554  
   somme de deux v.a. .... 274  
 Norme ..... 729  
 Nornes ..... [H34]

## O

O, o ..... 705  
 Observable ..... 84  
 Ordre (statistique d'—) ..... 365  
 Orthogonal (endomorphisme —) ..... 730  
 Orthonormée (famille — de  $L^2$ ) ..... 351  
 Ouvert ..... 729

## P

$\mathcal{P}(\lambda)$  ..... 138  
 Paley-Wiener-Zygmund (intégrale de —) . 673  
 Paley-Zygmund (inégalité de —) ..... 688  
 Paquets (th. de sommation par —) ..... 710  
 Paradoxe  
   des anniversaires ..... 50  
   de Galton ..... 698  
   de Gibbs ..... 630  
   des grenouilles ..... 287  
   de l'inspection ..... 74, 643  
   de Walter Penney ..... 609, 697  
   de Saint-Petersbourg ..... 694  
   téléphonique ..... 365  
 Parseval (égalité de —) ..... 724  
 Partie  
   fermée ..... 729  
   ouverte ..... 729  
   positive/négative ..... 149, **336**  
   singulière ..... 323, 713  
 Pas (un — en avant) ..... 51, 213, 217, **603**,  
   609, 610  
 Penney (paradoxe de W. —) ..... 609, 697  
 Périodique (état —) ..... 597  
 PERRIN Jean ..... 664  
 Perron (théorème de —-Frobenius) . 599, 731  
 Petits nombres (loi des —) ..... 139  
 $\pi$ -système ..... 739  
   — et indépendance ..... 741  
 Poincaré (formule de —) ..... 91  
 Points d'un processus ..... 638  
 Poisson  
   loi de — ..... 138  
   approximation normale ..... 485  
   lien avec l'exponentielle ... 249, 548  
   modes d'une — ..... 143  
   simulation ..... 548  
   processus de — ..... 638  
 Pólya (théorème de récurrence) ..... 661  
 Polynômes de Bernstein ..... 536  
 Positive (matrice —) ..... 589, 730  
 PRATELLI (Luca —) ..... 463  
 Presque sûr ..... [H38], 89  
   convergence presque sûre ..... **412**, 453

- Presque sûrement ..... [H38]  
 $(X_n)_{n \geq 1} \rightarrow X$  p.s. .... **412**, 453  
 Primalité (tests probabilistes de —) ..... 574  
 Probabilisable (espace —) ..... 84  
 Probabilité ..... **86**  
   —s composées (th. des —) .... [H48], 105  
   conditionnelle ..... [H47], **104**  
   sachant une partition ..... 521  
   sachant une v.a. discrète ..... 522  
   convergence en — ..... **414**, 452  
   image ..... [H59], 320  
   invariante ..... 591  
   produit ..... 358, 736  
   —s totales (formule des —) ... [H47], 105  
   de transition ..... 586  
 Problème  
   des chapeaux (des conjoints) ..... 151  
   du collectionneur ..... 152, **166**  
   de Dirichlet ..... 605, 664  
   des moments ..... 301  
 Processus  
   de branchement ..... 199  
   de comptage ..... 638  
   d'élimination ..... 298  
   de Galton-Watson ..... 199  
   markovien ..... 661  
   de Poisson ..... 638  
   stochastique ..... 638  
 Produit  
   de Cauchy ..... 720  
   direct/tensoriel ..... 271  
   probabilité — ..... 358, 736  
   tribu — ..... 358, 735  
 Programme (en environnement instable) . 378  
 Projection orthogonale ..... 723  
 Propriété  
   de Markov ..... 586  
   de Markov forte ..... 601  
 Pseudo-inverse d'une fonction croissante.. 715
- Q**
- Quadratique (risque —) ..... 496  
 Quasi-complet (système —) ..... 91  
 Queue (événement de —) ..... 445  
 Quotient de deux v.a. normales ..... 274
- R**
- Rabin  
   méthode de Miller- — ..... 574  
   théorème de — ..... 576  
 Rademacher  
   fonctions de — ..... 224  
   suite de — ..... 211  
 Radial (lemme de continuité —e d'Abel) . 720  
 Radon (théorème de — -Nikodým) ..... 743  
 Rang d'un cylindre ..... 210  
 Rayleigh (loi de —) ..... 555  
 Rayon d'une série entière ..... 719  
   aléatoire ..... 686  
 Réalisation (théorème de —) ..... 747  
 Réarrangement ..... 365  
 Réciproque (image — d'une partie) . [H60], 318  
 Recuit simulé ..... 579  
 Récupération des moments ..... 165  
 Récurent  
   (mouvement brownien) ..... 661  
   classe —e ..... 601  
   état — ..... 601  
   événement — ..... 215  
 Réduite (variable —) ..... 159, 260  
 Régénératif (événement —) ..... 214
- Règles  
   de de Morgan ..... 38  
   de la valeur moyenne ..... 604, 605  
 Régression (droite de —) ..... 398, **490**  
 Régulière (matrice / chaîne) ..... 598, 731  
 Rejet (méthode du —) ..... 455, 550  
 Remontées (inégalité des —) ..... 520  
 Répartition (fonction de —) ... [H60], 132, **320**  
   d'un couple à densité ..... 265  
   empirique ..... 456  
   d'une probabilité sur  $\mathbb{R}$  ..... 93  
 Résultat d'une expérience ..... [H34]  
 Retour  
   temps de — ..... 601  
   temps moyen de — ..... 603  
 Riemann  
   fonction  $\zeta$  de — ..... 541, 620  
   hypothèse de — ..... 620  
 Riesz-Fisher (théorème de —) ..... 349  
 Risque quadratique ..... 496  
 Rosencrantz & Guildenstern ..... 27  
 Ruine du joueur ..... 51
- S**
- Saint-Petersbourg (paradoxe de —) ..... 694  
 Saut de discontinuité ..... 132, 321, **713**  
 Schauder (fonctions de —) ..... 662  
 Scrutin (théorème du —) ..... 299  
 Séparable (tribu —) ..... 90  
 Séquence  
   homogène ..... 211  
   de trois *face* ..... 51  
 Série  
   aléatoire ..... 449, 683  
   de Bertrand ..... 705  
   entière ..... 719  
   aléatoire ..... 533, 686  
   harmonique ..... 705  
   de variables positives ..... 341  
 Silhouette d'une matrice ..... 594  
 Simple (convergence —) ..... 718  
 Simple (variable aléatoire —) ..... 129, 328  
   espérance ..... 334  
 Simulation  
   d'une loi continue ..... 549  
   d'une loi exponentielle ..... 549  
   d'une loi  $\gamma(a)$  ..... 553  
   d'un vecteur gaussien ..... 557  
   d'une loi géométrique ..... 547  
   d'une loi normale ..... 554  
   d'une loi de Poisson ..... 548  
 Singe ..... 4, 119  
 Singulière  
   fonction — ..... 323, 713  
   partie — ..... 323, 713  
 Skorokhod (th. de représentation de —) .. 436  
 Slutsky (théorème de —) ..... **428**, 497  
 Smirnov (test de Kolmogorov- —) ..... 458  
 SMOLUCHOWSKI Marian ..... 664  
 Sommable (famille —) ..... 708  
 Somme de deux variables  
   à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  ..... 180  
   binomiales ..... 187  
   à densité ..... 269  
   à densité indépendantes ..... 273  
   discrètes indépendantes ..... 186  
   exponentielles ..... 287  
   normales ..... 274  
   de Poisson ..... 187  
 Sondage ..... 51, 499  
 Sous-additivité ..... 87, 99  
   dénombrable ..... 89  
 Sous-martingale ..... 518

- Sous-tribu. .... 81  
 Spectral (théorème —) ..... 730  
 Stabilité  
   de la loi binomiale ..... 187  
   de la loi normale ..... 274  
   de la loi de Poisson ..... 187  
 Stationnaire  
   accroissements — s ..... 639  
   chaîne de Markov — ..... 586  
 Statistique d'ordre ..... 365  
 Steinhaus (théorème de —) ..... 533  
 Stieltjes (intégrale de —) ..... 327  
 Stirling  
   formule de — ..... 705  
   preuve probabiliste ..... 531  
   nombres de — ..... 165, **727**  
 Stochastique (matrice) ..... 586, 589, 730  
 Stratégie  
   pour gagner un trésor ..... 698  
   pour gagner à *pile-face* ..... 376  
 Succès ..... 135  
   loi du premier — ..... 136  
 Suite  
   de Cauchy ..... 704  
   équidistribuée ..... 431  
   de Rademacher ..... 211  
   uniformément distribuée ..... 431  
 sup ..... 81  
 Sur-martingale ..... 518  
 Symétrique  
   matrice — (définie) positive ..... 730  
   variable aléatoire — ..... 237, 255  
   événement — ..... 448  
 Système  
   complet d'événements ..... 91  
   induit par X ..... 130  
   quasi-complet d'événements ..... 91  
   total ..... 724
- T**
- Tchebychev (inégalité de —) ... 161, 261, **353**  
 d'ordre  $k$  ..... 353  
 Temps  
   d'arrêt ..... **376**, 601  
   d'attente  
     au feu tricolore ..... 322, 381  
     au rendez-vous ..... 287  
   de retour ..... 601  
   moyen ..... 603  
 Test  
   fonction-test ..... 725  
   de Kolmogorov-Smirnov ..... 458  
   de primalité ..... 574  
 Théorème  
   de Bayes ..... 106, 107  
     version continue ..... 281  
   de Bernstein ..... 536  
   de Carathéodory ..... 97, **743**  
   *central limit* ..... **472**, 477  
   de Chapman-Kolmogorov ..... 591, 650  
   de Cochran ..... 405  
   de comparaison de séries positives .. 706  
   de continuité  
     (fonctions caractéristiques) .388, **427**  
     (fonctions génératrices) ..... 425  
   de convergence dominée ..... 342  
   de convergence dominée discret 168, 710  
   de convergence monotone ..... 341  
     (démonstration) ..... 355  
   de convolution ..... 273, **375**  
   de de Moivre-Laplace ..... 483  
   de décomposition de Lebesgue .324, 714  
   de Dini ..... 718  
   de Dirichlet ..... 707  
   d'Erdős-Kac ..... 615  
   ergodique ..... 599, 731  
   d'extension de Kolmogorov ..... 750  
   de Fubini  
     cas général ..... 361, 721  
     pour les séries doubles .708, 709, 732  
   de Glivenko-Cantelli ..... 457  
   de Heine ..... 710  
   d'intégration terme à terme ... 154, **342**  
   de Khintchine ..... 453  
   de Kolmogorov ..... 750  
   de König-Huygens ..... 157, 256, **340**  
   de Lévy ..... 388, **427**  
   limite central ..... **472**, 477  
   de Miller ..... 575  
   de Perron-Frobenius ..... 599, 731  
   des probabilités composées ... [H48], 105  
   de Radon-Nikodým ..... 743  
   de réalisation ..... 747  
   de récupération des moments ..... 165  
   de récurrence de Pólya ..... 661  
   de Riesz-Fisher ..... 349  
   du scrutin ..... 299  
   de représentation de Skorokhod ... 436  
   de Slutsky ..... **428**, 497  
   de sommation par paquets ..... 710  
   spectral ..... 730  
   de Steinhaus ..... 533  
   de transfert ..... **344**  
     pour un couple discret ..... 180  
     pour un couple à densité ..... 271  
     pour une variable discrète ..... 155  
     pour une variable à densité .254, 346  
   de Weierstrass ..... 535, 719  
   de Wick ..... 404  
 Total  
   formule de l'espérance — e ..... 194  
   formule des probabilités — es .. [H47], 105  
   système — ..... 724  
 Tour (*tower property*) ..... 509  
 Tout ou rien  
   loi du — de Borel ..... 119  
   loi du — de Kolmogorov ..... 447  
 Tout ou rien (loi du — de Kolmogorov) .. 448  
 Transfert (théorème de —) ..... **344**  
   pour un couple discret ..... 180  
   pour un couple à densité ..... 271  
   pour une variable discrète ..... 155  
   pour une variable à densité .... 254, 346  
 Transformée  
   de Fourier  
     d'une variable aléatoire ..... 298  
   de Laplace d'une v.a. .... 299  
 Transient  
   (mouvement brownien) ..... 661  
   état — ..... 601  
   événement — ..... 215  
 Transitif  
   dés non — s ..... 698  
   jeu non — ..... 697  
 Transition (matrice, probabilité de —) ... 586  
 Transitoire  
   classe — e ..... 601  
   état — ..... 601  
   événement ..... 215  
 Tri (méthode de — rapide randomisé) ... 579  
 Triangulaire (inégalité —) ..... 706  
 Tribu ..... **81**  
   asymptotique ..... 445  
   complète ..... 90  
   discrète ..... 81  
   engendrée ..... 83

engendrée par une v.a. .... 367, 737  
engendrée par plusieurs v.a. .... 446  
grossière ..... 81  
de Lebesgue ..... 90  
produit ..... 358, 735  
de queue ..... 445  
sans atomes ..... 99  
séparable ..... 90  
sous- — ..... 81  
sur  $\mathbb{C}$  ..... 383  
triviale ..... 81  
Trois *face* d'affilée ..... 51  
Tronquée (variable —) ..... 322

## U

$\mathcal{U}([a; b])$  ..... 237  
 $\mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$  ..... 135  
Uniforme  
  convergence — ..... 718  
  loi — discrète ..... 135  
  loi — à densité ..... 237  
Uniformément  
  continue (fonction —) ..... 710  
  distribuées (suites —) ..... 431  
Univers ..... [n34], **84**  
  — -image ..... 129  
Urnes d'Ehrenfest ..... 608

## V

Valeur moyenne (règles de la —) ..... 604, 605  
Vandermonde (formule de —) ..... 142, 727  
Variable aléatoire ..... [n58], 317  
  absolument continue ..... 232  
  centrée ..... 159, 260  
  complexe ..... 337, **383**  
  continue ..... 232  
  —s décorrélées ..... 188  
  à densité ..... [n64], 232  
  espérance ..... [n74], **253**  
  déterministe ..... **33**, 378  
  discrète ..... [n63], **129**  
  espérance ..... [n73], **145**  
  espérance  
  définition alternative ..... 326, 327  
  expression alternative ..... 153, 169, **362**  
  définition générale ..... **337**  
  gaussienne ..... 392  
  —s indépendantes ..... 367  
  intégrable ..... **337**  
  cas discret ..... 149  
  cas positif ..... 335  
  cas à densité ..... 253  
  mixte ..... 322  
  réduite ..... 159, 260  
  simple ..... 129, 328  
  espérance ..... 334  
  symétrique ..... 237, 255  
  tronquée ..... 322  
Variance ..... **340**  
  d'une v.a. à densité ..... 256  
  d'une v.a. discrète ..... 156  
Variation bornée (fonction à —) ..... 711  
Vecteur  
  aléatoire ..... 357  
  gaussien ..... 400  
  *simulation* ..... 557  
Version  
  de l'espérance conditionnelle ..... 506  
  de la probabilité conditionnelle ..... 522, 523  
Vieillessement (propriété de non —) ..... 138, 238  
Vitali (contre-exemple de —) ..... 97  
Voisinage ..... 729  
von Mises (paradoxe des anniversaires) ..... 50

Vraisemblance (maximum de —) ..... 679

## W

Wald (identités de —) ..... 197, 377  
Watson (processus de Galton- —) ..... 199  
Weierstrass (théorème de —) ..... 535, 719  
Weyl (critère de —) ..... 432  
Wick (théorème de —) ..... 404  
WIENER Norbert ..... 657  
Wiener (mesure de —) ..... 657

## Z

Zéro-un  
  loi du — de Borel ..... 119  
  loi du — de Kolmogorov ..... 447  
Zeta (fonction — de Riemann) ..... 541, 620