



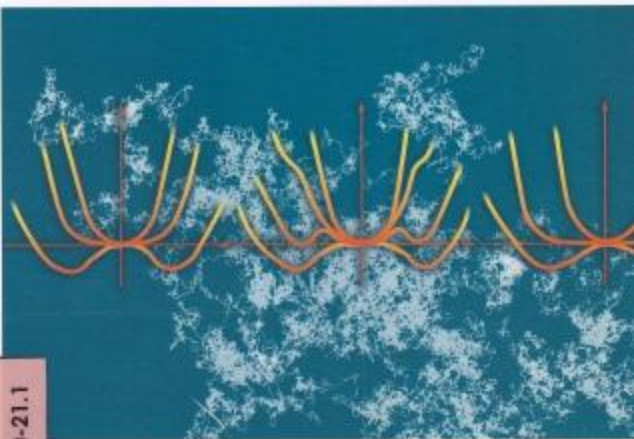
COLLECTION
DIRIGÉE PAR JEAN BORNAREL

GRENoble SCIENCES

MÉCANIQUE STATISTIQUE

EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS

■ Élie BELORIZKY et Wladimir GORECKI



530-21.1



INTRODUCTION

Cet ouvrage s'adresse essentiellement aux étudiants de deuxième cycle des universités ainsi qu'à ceux des écoles d'ingénieurs, mais il pourra également servir de référence à des étudiants plus avancés ou à des enseignants-chercheurs désireux d'avoir rapidement des réponses à certaines questions ponctuelles. De nombreux textes de problèmes ont été proposés en travaux dirigés ou en examen lors d'un enseignement de maîtrise et de deuxième année de magistère de l'École de Physique de Grenoble.

Le plan et les notations de cet ouvrage correspondent à ceux du cours d'Introduction à la Mécanique Statistique publié dans la même collection (PUG, Grenoble 1992). Ce livre est donc complémentaire du précédent mais peut fort bien être utilisé de manière autonome. On trouvera à la fois des exercices simples permettant d'assimiler le cours et des problèmes plus élaborés concernant soit des compléments de cours, soit l'étude de phénomènes physiques intéressants. Dans la mesure du possible, et tout en respectant la chronologie du cours, les problèmes proposés au sein d'un même chapitre sont classés par difficulté croissante afin de faciliter l'assimilation par l'étudiant de concepts parfois délicats.

On montre, à travers la variété des problèmes proposés, que la physique statistique a un champ d'applications très vaste dans pratiquement tous les domaines de la physique. On trouvera un certain nombre de textes traitant de questions simples de physique des solides, de magnétisme, de physique des polymères, de propriétés des gaz et des liquides, d'astrophysique, ...

Notons la part importante accordée dans le chapitre XI aux phénomènes de diffusion et de transport qui n'avaient été que partiellement traités dans l'ouvrage précédent. Plusieurs exercices de ce chapitre constituent des compléments indispensables à un cours complet, à ce niveau, de physique statistique.

Enfin, nous avons complété cet ouvrage par quatre appendices mathématiques sur les intégrales eulériennes, la formule de Stirling, la fonction d'erreur et quelques applications des nombres de Bernoulli qui sont très souvent utilisées dans la résolution de nombreux problèmes.

Les auteurs tiennent à remercier chaleureusement Mr Pascal FRIES qui a eu la très lourde tâche d'effectuer et de vérifier tous les exercices et qui, par de fructueuses discussions, a permis d'améliorer notablement le manuscrit et de l'enrichir. Nous avons apprécié sa compétence et son dévouement.

Mr Jean-Jacques BENAYOUN a fait une lecture critique et constructive de l'ouvrage et nous a fait bénéficier de son expérience notamment pour les problèmes d'astrophysique. Il nous a signalé de nombreuses références. Il avait déjà fait partie du comité de lecture de notre cours de physique statistique et nous lui exprimons toute notre gratitude.

Enfin nous remercions Mesdames Martine AUMONT, Paule BERNA, Lyliane GARCIN et Jessie SITBON pour leur participation à la frappe du manuscrit.

TABLE DES MATIÈRES

<i>Introduction</i>	5
<i>Chapitre I - Variables aléatoires</i>	7
I.1. Fluctuations de la somme de plusieurs variables aléatoires	7
I.2. Loi binomiale	8
I.3. Loi binomiale et loi de Poisson	11
I.4. Source radioactive	12
I.5. Approche de la distribution gaussienne à partir de la loi de Poisson	13
I.6. Marche aléatoire à deux dimensions	15
I.7. Population bactérienne dans un milieu biologique	15
I.8. Marche aléatoire à une dimension (sauts d'égale longueur)	17
I.9. Marche aléatoire à une dimension (cas continu)	20
I.10. Marche aléatoire à une dimension (cas général) - Théorème central	22
I.11. Résonance d'une molécule d'eau	24
<i>Chapitre II - Dynamique analytique - Espace des phases</i>	27
II.1. Théorème du Viriel	27
II.2. Crochets de Poisson	29
II.3. Modes de vibration d'une molécule triatomique rectangulaire	31
II.4. Oscillateurs classiques et théorème de Liouville	36
II.5. Equation de transport de Boltzmann	38
<i>Chapitre III - Thermodynamique - Premier et second principes</i>	41
III.1. Gaz parfait bidimensionnel	41
III.2. Transformation polytropique	43
III.3. Variation d'entropie de l'Univers dans un processus irréversible	45
III.4. Appareil à air conditionné	48
III.5. Chaleur de vaporisation de la glace	49
III.6. Liquéfaction de l'hélium par un processus adiabatique	50
III.7. Travail pour liquéfier l'hélium avec un cycle de Carnot	52

III.8. Propriétés thermodynamiques d'un sel paramagnétique.....	54
III.9. Solidification de l' ^3He liquide sous pression à basse température.....	58
III.10. Phénomènes convectifs dans une atmosphère en équilibre isentropique	61
Chapitre IV - Ensemble microcanonique	65
IV.1. Entropie et température d'un gaz parfait dans l'ensemble microcanonique	65
IV.2. Température d'un système paramagnétique.....	66
IV.3. Élasticité des polymères.....	67
IV.4. Équilibre d'un ensemble d'oscillateurs dans l'ensemble microcanonique	70
IV.5. Températures négatives.....	74
IV.6. Chaîne de N spins dans le modèle d'Ising.....	76
Chapitre V - Distribution de Boltzmann - Ensemble canonique	83
V.1. Variation d'entropie d'un ensemble de systèmes à deux niveaux.....	83
V.2. Fluctuations de l'énergie d'un gaz parfait.....	84
V.3. Concentration quantique	85
V.4. Sites interstitiels dans un solide	86
V.5. Systèmes à trois niveaux dans l'ensemble canonique	88
V.6. Chaleur spécifique d'un réseau unidimensionnel	90
V.7. Effet Overhauser	93
V.8. Mélange isotherme de deux gaz parfaits.....	95
V.9. Système à trois états dans les diverses statistiques	97
V.10. Comparaison des diverses statistiques pour des particules ayant des niveaux individuels dégénérés.....	99
V.11. Refroidissement par désaimantation adiabatique d'un cristal	102
V.12. Système de trois spins $1/2$ couplés par un échange de type Ising.....	104
V.13. Entropie d'un gaz parfait unidimensionnel.....	108
V.14. Fonctions thermodynamiques d'un gaz de van der Waals.....	109
V.15. Susceptibilité d'ions magnétiques en présence de potentiel cristallin...	110
V.16. Élasticité de la laine.....	114
V.17. Susceptibilité d'un système de deux ions couplés.....	119
V.18. Réponse linéaire, fluctuations et susceptibilité.....	124
V.19. Température d'un petit système	128
V.20. Modèle simplifié du débobinage de deux molécules d'ADN.....	131
V.21. Particules dans un puits harmonique dans les diverses statistiques	134

Chapitre VI - Mécanique statistique classique - Distribution de Maxwell	139
VI.1. Oscillateur harmonique classique.....	139
VI.2. Oscillateur anharmonique classique.....	140
VI.3. Chaleur spécifique d'un gaz parfait soumis à la pesanteur.....	142
VI.4. Centrifugation d'un gaz.....	143
VI.5. Vitesse relative des molécules d'un gaz.....	144
VI.6. Taux de collisions moléculaires dans un mélange gazeux.....	147
VI.7. Distribution de la projection sur un plan de la vitesse des molécules d'un gaz.....	149
VI.8. Taux d'absorption des molécules d'un gaz par une surface.....	150
VI.9. Vitesses de translation et de rotation des molécules d'hydrogène.....	151
VI.10. Largeur Doppler des raies d'émission d'un gaz.....	152
VI.11. Distribution de l'énergie dans l'ensemble canonique.....	155
VI.12. Polarisation électrique.....	159
VI.13. Interaction dipolaire à haute température.....	161
VI.14. Modèle simplifié du caoutchouc.....	163
VI.15. Flux de fuite d'un gaz à travers un trou.....	168
VI.16. Intensité d'un jet moléculaire.....	170
VI.17. Baisse de pression d'un gaz due à une fuite.....	171
VI.18. Taux de fuite d'un mélange de gaz à travers un trou.....	173
VI.19. Taux de fuite dans un potentiel anharmonique à deux dimensions.....	174
VI.20. Gaz parfait ultrarelativiste.....	176
VI.21. Equation d'état d'un gaz de molécules sphériques impénétrables.....	178
VI.22. Energie interne d'un système de points matériels soumis à un potentiel répulsif.....	181
VI.23. Diamagnétisme de particules chargées dans un champ magnétique (niveaux de Landau).....	184
Chapitre VII - Propriétés thermodynamiques des molécules diatomiques ...	189
VII.1. Chaleurs spécifiques de la molécule d'hydrogène.....	189
VII.2. Chaleur spécifique et entropie de rotation de molécules diatomiques hétéronucléaires.....	191
VII.3. Chaleur spécifique rotationnelle d'une molécule homonucléaire.....	193
VII.4. Proportions d'ortho et para-hydrogène en fonction de la température.....	196
VII.5. Energie interne de l'hydrogène moléculaire.....	198

VII.6. Chaleur spécifique rotationnelle de la molécule d'hydrogène à basse température.....	199
VII.7. Chaleur spécifique de l'ammoniac à l'état gazeux.....	202
Chapitre VIII - Distribution de Gibbs - Ensemble canonique généralisé	205
VIII.1. Gaz parfait avec des degrés de liberté internes.....	205
VIII.2. Surface adsorbante.....	207
VIII.3. Adsorption d'un gaz parfait sur une surface.....	209
VIII.4. Empoisonnement par le monoxyde de carbone.....	211
VIII.5. Formation d'hydrogène dans l'Univers primordial.....	213
VIII.6. Ionisation de l'hydrogène au voisinage d'un métal.....	214
VIII.7. Densité de positrons dans l'hydrogène ionisé.....	218
VIII.8. Croissance d'un biopolymère.....	220
VIII.9. Enthalpie libre de réaction et constante d'équilibre.....	223
Chapitre IX - Statistiques de Fermi et de Bose-Einstein	227
IX.1. Densité quantique et gaz de fermions.....	227
IX.2. Fluctuations de l'occupation d'un état pour un gaz de fermions.....	228
IX.3. Pression et entropie d'un gaz de Fermi dégénéré.....	230
IX.4. Energie de Fermi et chaleur spécifique électronique du Sodium.....	232
IX.5. Densité d'états pour des gaz d'électrons unidimensionnels et bidimensionnels.....	233
IX.6. Coefficient de compressibilité isotherme d'un gaz de Fermi à température nulle.....	236
IX.7. Equation d'état d'un gaz parfait ultrarelativiste.....	237
IX.8. Equilibre électron-trou dans un semiconducteur.....	239
IX.9. Potentiel chimique pour un système à deux bandes d'énergie (semiconducteur).....	240
IX.10. Potentiel chimique dans un semiconducteur de type n.....	243
IX.11. Paramagnétisme de Pauli.....	247
IX.12. Densité de neutrons dans une étoile à neutrons.....	253
IX.13. Masse volumique minimale d'une étoile à neutrons.....	255
IX.14. Energies de Fermi dans une naine blanche et dans un pulsar.....	256
IX.15. Densité électronique et pression dans une naine blanche.....	257
IX.16. Masse critique d'effondrement d'une étoile à température nulle.....	258
IX.17. Bosons et limite classique.....	260
IX.18. Gaz de bosons à une et deux dimensions.....	263

IX.19. Fluctuations dans un gaz de bosons	265
IX.20. Système de bosons avec deux états d'énergie.....	267
IX.21. Potentiel chimique et énergie interne d'un gaz de bosons	268
IX.22. Modèle de Debye de la capacité calorifique d'un réseau	273
IX.23. Concentration en impuretés magnétiques pour un refroidissement par désaimantation adiabatique.....	275
Chapitre X - Corps noir - Rayonnement isotherme	279
X.1. Rendement d'une lampe.....	279
X.2. Thermocolorimètre.....	280
X.3. Expansion adiabatique du volume d'un corps noir	281
X.4. Cycle de Carnot avec un gaz de photons.....	282
X.5. Rayonnement du corps noir et laser.....	285
X.6. Fluctuation du nombre de photons dans une cavité	286
X.7. Ecrans de rayonnement	287
X.8. Température moyenne à l'intérieur du Soleil.....	289
X.9. Durée de rayonnement du Soleil.....	290
X.10. Énergie du rayonnement cosmique de l'Univers	291
X.11. Détente adiabatique d'un gaz de photons.....	292
X.12. Rayonnement du corps noir dans un univers à n dimensions.....	295
Chapitre XI - Diffusion et phénomènes de transport	297
XI.1. Équation de diffusion	297
XI.2. Coefficient de diffusion relatif.....	298
XI.3. Libre parcours moyen des molécules d'un gaz.....	300
XI.4. Coefficient de diffusion d'un gaz.....	302
XI.5. Libre parcours moyen d'un proton cosmique dans l'atmosphère.....	304
XI.6. Libre parcours moyen des électrons dans un métal.....	305
XI.7. Fuites d'un gaz à travers un trou et libres parcours moyens des molécules.....	306
XI.8. Fuite d'hydrogène hors de l'atmosphère	308
XI.9. Propriétés d'un jet atomique	310
XI.10. Diffusion d'un atome d'hélium dans l'air.....	313
XI.11. Diffusion d'une particule dans un liquide	314
XI.12. Mouvement d'une particule dans un fluide.....	316
XI.13. Conductibilité thermique d'un gaz.....	319
XI.14. Coefficient de conductibilité thermique d'un métal.....	321

XI.15. Diffusion de la chaleur avec des sources internes.....	322
XI.16. Viscosité d'un gaz.....	324
XI.17. Flux d'un liquide à travers un tube fin.....	327
XI.18. Mobilité de particules chargées dans un champ électrique.....	328
XI.19. Coefficient de diffusion et conductivité électrique d'un métal.....	329
XI.20. Conductivité électrique d'un métal pur à basse température.....	331
XI.21. Equation de transport de Boltzmann et coefficient de diffusion d'un gaz.....	332
Chapitre XII - Changements de phase	337
XII.1. Equilibre gaz-solide.....	337
XII.2. Température de Curie d'un ferromagnétique dans l'approximation du champ moyen.....	338
XII.3. Susceptibilité d'un ferromagnétique à haute température (approximation du champ moyen).....	341
XII.4. Modèle du champ moyen pour un ferromagnétique de type Ising.....	342
XII.5. Transition du premier ordre dans un cristal.....	347
Appendices	351
1. Intégrales eulériennes.....	351
1. La fonction factorielle et la fonction Γ	351
2. La fonction β	352
3. Relation entre les fonctions β et Γ	354
4. Applications aux intégrales gaussiennes.....	356
2. Formule de Stirling.....	357
3. La fonction d'erreur.....	359
4. Les nombres de Bernoulli - Série d'Euler-Maclaurin - Fonction Zéta de Riemann.....	362
1. Les nombres de Bernoulli.....	362
2. Développement de $\cotg z$ en série de fractions.....	363
3. Série $\zeta(p)$ de Riemann.....	364
4. Intégrales se ramenant aux nombres de Bernoulli.....	365
5. Formule d'Euler - Maclaurin.....	366
Constantes fondamentales.....	371
Références et bibliographie	373
Index	375
Table des matières	391