CLASSES PRÉPAS SCIENCES

SCIENCES INDUSTRIELLES



MÉCANIQUE

2e année

MP - PC - PSI - PT - ATS

Cours et exercices corrigés

Claude CHÈZE Michaël DELÈGUE
Françoise BRONSARD

531-23.1

ellipses

AVANT PROPOS

Pour affronter dans les meilleures conditions l'épreuve de mécanique -comme toutes les autres d'ailleurs- des concours d'entrée dans les Grandes Ecoles scientifiques, il faut avoir, non pas enregistré un grand nombre de formules plus ou moins obscures, mais avoir réellement compris les concepts, savoir les mettre en œuvre et s'être familiarisé avec les inévitables calculs usuels.

C'est donc dans cet esprit qu'a été conçu et réalisé cet ouvrage, conforme aux différents programmes de seconde année, pour aider le candidat à réussir son challenge. Il complète l'ouvrage de première année qui traitait les incontournables préliminaires que sont la cinématique et la statique.

Ici, pour toutes les secondes années des classes scientifiques, le livre débute logiquement en reprenant et complétant l'étude des systèmes mécaniques ou chaînes de solide : modélisation, analyses cinématique et des actions mécaniques, détermination du degré de mobilité ou d'hyperstatisme, thèmes qui sont actuellement au cœur de la plupart des sujets de concours.

Puis, toujours pour toutes les sections, l'ouvrage complète méthodiquement la construction de l'édifice que constitue la mécanique :
- D'abord est introduit le concept autonome d'inertie construit en associant les deux concepts préalables de masse et de géométrie.
- Puis, en associant les deux concepts indépendants de temps et d'inertie, on construit la cinétique, qui est en fait l'outil de calcul en mécanique.
- En disposant alors d'une part de cet outil et d'autre part du concept d'action mécanique, construits tous deux sur des bases totalement différentes et indépendantes, on peut enfin poser le principe fondamental de la mécanique. Comme son nom l'indique, il ne s'agit plus d'une construction mais d'une hypothèse posée a priori. Elle est simple : égalité de deux torseurs modélisant des grandeurs indépendantes. Elle est aussi fondamentale car elle contient toutes les relations entre paramètres forces et paramètres positions.

La mécanique (en l'occurrence la dynamique) est l'exploitation du principe fondamental ; exploitation qu'il ne faut d'ailleurs pas confondre avec les calculs de cinétique qui ne concernent que l'un des membres de la relation fondamentale.
A noter toutefois que le principe fondamental ne permet pas, à lui seul, de résoudre tous les problèmes de mécanique lorsqu'on manque d'informations sur le torseur des forces extérieures. Ces informations manquantes sont d'une autre nature : ce sont les lois du frottement entre certaines forces et les lois de comportement pour les systèmes réels déformables.

Par contre, le concept de travail et de puissance, qui est également traité ici, ne fournit pas de donnée nouvelle pour la résolution d'un problème de mécanique : le théorème de l'énergie cinétique qui le met en œuvre est, comme son nom l'indique un

théorème. Ce théorème est établi à partir du principe fondamental. Il en est une conséquence. Les équations qu'il peut permettre d'écrire ne s'ajoutent donc pas à celles qui traduisent directement le principe fondamental. Mais elles peuvent avantageusement en remplacer autant.

Enfin, en complément pour les classes PT et ATS, et conformément à leurs programmes, sont présentés les premiers éléments de mécanique des systèmes rigides (abusivement appelés couramment solides réels). D'une part sont traitées les poutres : cinématique, contraintes, diagrammes, lois de comportement, équations. Les poutres sont en effet les systèmes déformables les plus simples puisqu'elles sont constituées -par hypothèse- d'une infinité de solides : leurs sections droites. Et d'autre part, sont analysées les sollicitations simples : traction, torsion, flexion.

Tous les points traités dans le livre le sont sobrement et avec rigueur, en s'attachant à faire comprendre les idées développées, qui d'ailleurs sont toutes des idées simples qui s'enchaînent logiquement.
Chaque chapitre est complété par un rappel synthétique de ce qu'il est nécessaire de retenir.
Puis, pour faciliter l'assimilation et pour entraîner le lecteur à la mise en application, de très nombreux exercices, de difficultés et de volumes divers, classiques ou extraits de problèmes de concours sont entièrement développés et commentés dans chaque chapitre.
Enfin, deux problèmes de concours récents (MP 2007 et PT 2004) sont également entièrement traités et analysés.

A noter enfin, que la mécanique est la même pour tous.
Ainsi, si cet ouvrage a été conçu et organisé pour aider le taupin dans son labeur spécifique, il peut aussi, par son approche et son contenu, aider à fixer les idées, pour tous ceux qui souhaitent comprendre ou qui ont à connaître la mécanique.

Les auteurs.

TABLE DES MATIERES

I - ETUDE DES SYSTEMES MECANIQUES 9

1 - Modélisation 9
1.1 - Systèmes mécaniques 9
1.2 - Les liaisons 9
1.3 - Graphe des liaisons 11
1.4 - Liaisons équivalentes 11
1.5 - Cas de la modélisation plane 15

2 - Schémas 16
2.1 - Nature – différents cas 16
2.2 - Tracés des schémas 16
2.3 - Exemple 18
2.4 - Compléments sur la modélisation plane et le schéma de mouvement 20

3 - Chaînes cinématiques – Staticité 22
3.1 - Hyperstaticité - mobilité. Les chaînes cinématiques 22
3.2 - Relation générale 25
3.3 - Chaîne ouverte 26
3.4 - Chaîne fermée simple 26
3.5 - Chaîne fermée complexe 27

A retenir 28

Exercices corrigés 31

II - ELEMENTS D'INERTIE 49

1 - Masse 49
1.1 - Notion de masse 49
1.2 - Masse spécifique : 49
1.3 - Point matériel 50

2 - Centre d'inertie 50
2.1 - Concept de barycentre 50
2.2 - Centre d'inertie 51
2.3 - Théorèmes de Guldin 53
2.4 - Recherche pratique d'un centre d'inertie 54

3 - Moments et produits d'inertie 55
3.1 - Moments d'inertie 55
3.2 - Produits d'inertie 55
3.3 - Expressions dans un repère orthonormé 56

4 - Matrice d'inertie 56
4.1 - Définition 56
4.2 - Théorème de Huygens 58
4.3 - Moment par rapport à un axe de direction quelconque 59
4.4 - Détermination pratique 60

5 - Moments et produits quadratiques 62
5.1 - Définitions 62

5.2 - Axes principaux 63
5.3 - Cercle de Mohr 64

A retenir 65

Exercices corrigés 69

III - CINETIQUE 86

1 - Torseur cinétique 86
1.1 - Définition 86
1.2 - Calcul de la résultante cinétique 87
1.3 - Relation entre les moments cinétiques en deux points 87

2 - Torseur dynamique 88
2.1 - Définition 88
2.2 - Calcul de la résultante dynamique 88
2.3 - Relation entre les moments dynamiques en deux points 88

3 - Relations entre les deux torseurs 89
3.1 - Relation entre les résultantes 89
3.2 - Relation entre les moments cinétique et dynamique en un point 89

4 - Cas particulier du solide 90

5 - Energie cinétique 92
5.1 - Définition 92
5.2 - Cas du solide 92

6 - Composition des mouvements - Théorèmes de koenig 94
6.1 - Cas général 94
6.2 - Théorèmes de Koenig 95

7 - Mouvements particuliers fréquents 96
7.1 - Translation d'un solide 96
7.2 - Rotation d'un solide autour d'un axe principal d'inertie 97
7.3 - Rotation d'un solide autour d'un point fixe 97

8 - Inertie équivalente 98

A retenir 100

Exercices corrigés 103

IV - PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE 110

1 - Enoncé du principe fondamental 110
1.1 - Repères d'espace galiléens approchés 110
1.2 - Changement de repère d'espace 111
1.3 - Cas particuliers 112

2 - Théorèmes généraux 112
2.1 - Théorème de la résultante dynamique 112
2.2 - Théorème du moment dynamique 113

3 - Théorème des actions réciproques 114

4 - Résolution d'un problème de dynamique 115

A retenir 117

Exercices corrigés 118

V - APPLICATIONS 136

1 - Rotation d'un solide autour d'un axe fixe 136
1.1 - Equations 136
1.2 - Equilibrage d'un rotor - théorie 138
1.3 - Equilibrage en pratique 140

2 - Rotation d'un solide autour d'un point fixe 143
2.1 - Equations 143
2.2 – Exemple : la toupie 144

Exercices corrigés 147

VI - METHODES ENERGETIQUES 172

1 - Puissance et travail d'une force 172
1.1 - Puissance 172
1.2 - Travail élémentaire 173
1.3 - Travail pour un déplacement fini 174

2 - Fonction de force indépendante du temps 175
2.1 - Définition et propriété 175
2.2 - Champ de force et énergie potentielle 177

3 - Extension à un ensemble materiel 179
3.1 - Définitions 179
3.2 - Fonction de force indépendante du temps 180
3.3 - Cas du solide 181

4 - Interactions 181
4.1 - Interaction entre éléments d'un système indéformable 181
4.2 - Interaction entre deux solides 182
4.3 - Liaison élastique parfaite entre deux solides 184
4.4 - Interactions gravitationnelle et électrique 184
4.5 - Energie potentielle d'une interaction 185

5 – Théorème de l'énergie cinétique 186
5.1 - Systèmes de points matériels 186
5.2 - Cas des solides 187
5.3 - Forme intégrée 189
5.4 - Systèmes conservatifs - Intégrale première de l'énergie 190
5.5 - Théorème de l'énergie cinétique dans un repère non galiléen 190

A retenir 192

Exercices corrigés 195

VII - LES POUTRES 212

1 - Le concept poutre 212
1.1 - Solides, corps rigides et poutres 212
1.2 - Hypothèses de la théorie des poutres 213
1.3 - Conditions réelles 214

2 - Cinématique 215
2.1 - Torseur des petits déplacements 215
2.2 - Torseur des déformations linéiques (ou taux de déformation) 216

2.3 - Simplification résultant de l'hypothèse de Bernoulli 218
2.4 - Taux de déformation en un point quelconque 219
2.5 - Formules de Bresse 219

3 - Contraintes 221
3.1 - La notion de contrainte. Définition 221
3.2 - Torseur des contraintes ou torseur de cohésion 223
3.3 - Théorèmes fondamentaux 223

4 - Diagrammes des poutres droites 224
4.1 - Définition. Exemples simples 224
4.2 - Cas de charges uniquement normales à la poutre 225

5 - Loi de comportement 227
5.1 - Nécessité et choix d'une loi 227
5.2 - Comportement élastique. Loi de Hooke 229

6 - Equations générales des poutres 231
6.1 - Matrice d'élasticité 231
6.2 - Equations des déformations 232
6.3 - Répartition des contraintes 234

A retenir 236

Exercices corrigés 239

VIII - SOLLICITATIONS SIMPLES 243

1 - TRACTION 243
1.1 - Définition - Exemples 243
1.2 - Lois 244
1.3 - Calculs en traction 245

2 – TORSION 247
2.1 - Définition. Observation 247
2.2 - Lois pour des pièces à symétrie axiale 248
2.3 - Calculs en torsion (pièces à symétrie axiale) 250
2.4 - Ressort de torsion 251

3 - FLEXION PLANE 253
3.1 - Définition. Observation 253
3.2 - Lois de la flexion plane simple 254
3.3 - Caractéristiques des sections 256
3.4 - Calculs en flexion plane simple 258

A retenir 261

Exercices corrigés 263

IX - PROBLEMES DE SYNTHESES 276

1 - Etude d'un centre d'usinage « 5 axes » (MP E3A - 2007) 276

2 - Banc d'essai pour véhicule (d'après PT 2004 SI 1) 283

FORMULAIRE 299

INDEX 306