

Vibrations et vibro-acoustique des structures minces

*bases physiques, analyse théorique
et méthodes numériques*

Paul J.T. Filippi

Table des matières

Préface	11
Chapitre 1. Equations régissant les vibrations des structures minces	15
1.1. Introduction	15
1.1.1. Généralités sur les structures minces	15
1.1.2. Principe de la méthode énergétique	16
1.2. Equation des plaques minces	18
1.2.1. Plaque d'épaisseur constante	18
1.2.2. Plaques d'épaisseur variable	25
1.2.3. Frontière avec un point anguleux	27
1.3. Equation des poutres	28
1.4. Equations des coques cylindriques circulaires	30
1.5. Equation des coques sphériques	38
1.5.1. Approximation du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes : application du théorème des travaux virtuels . .	39
1.5.2. Conditions de régularité aux apex	46
1.6. Forme variationnelle des équations régissant les vibrations harmoniques des plaques et des coques	49
1.6.1. Forme variationnelle de l'équation des plaques	50
1.6.2. Forme variationnelle des équations des coques	51
1.7. Exercices	52

Chapitre 2. Réponse vibratoire des structures minces dans le vide : modes de résonance, régimes harmoniques forcés, régimes transitoires	55
2.1. Introduction	55
2.2. Vibrations d'une poutre de section constante	58
2.2.1. Solutions indépendantes de l'équation homogène des poutres	58
2.2.2. Réponse d'une poutre de longueur indéfinie à une force ponctuelle harmonique	60
2.2.3. Modes de résonance d'une poutre de longueur finie	61
2.2.4. Réponse d'une poutre de longueur finie à une excitation harmonique	69
2.3. Vibrations des plaques	71
2.3.1. Oscillations libres d'une plaque indéfinie	71
2.3.2. Noyau de Green de l'équation des plaques en régime harmonique et réponse d'une plaque indéfinie à une excitation harmonique	73
2.3.3. Vibrations harmoniques d'une plaque de dimensions finies : définition et théorèmes généraux	76
2.3.4. Modes et fréquences de résonance des plaques circulaires soumises à des conditions aux limites uniformes	79
2.3.5. Modes de résonance et fréquences de résonance des plaques rectangulaires soumises à des conditions aux limites uniformes	87
2.3.6. Réponse d'une plaque à une excitation harmonique : représentation en série des modes de résonance	100
2.3.7. Equations intégrales de frontières et méthode d'éléments finis de frontières	103
2.3.8. Fréquences et modes de résonance des plaques d'épaisseur variable	121
2.3.9. Réponse transitoire d'une plaque indéfinie d'épaisseur constante	124
2.4. Vibrations des coques cylindriques	127
2.4.1. Oscillations libres d'une coque de longueur indéfinie	127
2.4.2. Tenseur de Green pour l'équation des coques cylindriques circulaires	131
2.4.3. Vibrations harmoniques d'une coque cylindrique de longueur finie : définition et théorèmes généraux	134
2.4.4. Modes de résonance d'une coque cylindrique à frontières sur appui simple	135
2.4.5. Modes de résonance d'une coque cylindrique à frontières encastrées	138

2.4.6. Réponse d'une coque cylindrique à une excitation harmonique : développement en série de modes de résonance	142
2.4.7. Equations intégrales de frontières et éléments finis de frontières	144
2.5. Vibrations des coques sphériques	147
2.5.1. Définitions et théorèmes généraux	147
2.5.2. Solution de l'équation des coques sphériques en régime harmonique	148
2.6. Exercices	151
Chapitre 3. Rayonnement acoustique des structures minces et transmission du son	155
3.1. Introduction	155
3.2. Transmission du son à travers un piston à l'intérieur d'un guide d'onde unidimensionnel	157
3.2.1. Equations du mouvement	157
3.2.2. Transformée de Fourier temporelle des équations – Réponse du système à une excitation harmonique	159
3.2.3. Réponse du système à une excitation transitoire du piston	165
3.3. Exemple unidimensionnel de cavité fermée par une paroi vibrante	167
3.3.1. Equations régissant les oscillations libres harmoniques du système et leur forme réduite	168
3.3.2. Transmission du son à travers la frontière vibrante	171
3.4. Quelques rappels d'acoustique	175
3.4.1. Forme variationnelle des équations des ondes et de Helmholtz.	175
3.4.2. Fonction de Green de l'équation de Helmholtz en champ libre	177
3.4.3. Développements en série de la fonction de Green de l'équation de Helmholtz en champ libre	178
3.4.4. Formule de Green pour l'opérateur de Helmholtz et représentation de Green de la solution de l'équation de Helmholtz	179
3.4.5. Difficultés numériques	182
3.5. Structures de dimensions infinies	183
3.5.1. Plaque indéfinie en contact avec un seul fluide ou deux fluides différents	183

3.5.2. Oscillations libres d'une coque cylindrique circulaire immergée dans un fluide d'extension indéfinie et vide à l'intérieur	203
3.5.3. Quelques remarques sur les oscillations libres d'une coque cylindrique circulaire indéfinie contenant un fluide et immergée dans un second fluide	210
3.6. Plaque rectangulaire bafflée	211
3.6.1. Théorie générale : modes propres, modes de résonance, développement en série de la réponse du système	211
3.6.2. Plaque rectangulaire encastrée le long de sa frontière : approximation numérique des modes de résonance	217
3.6.3. Application : réponse transitoire d'une plaque excitée par un choc	230
3.7. Méthode générale en régime harmonique : formulation variationnelle classique et représentation de Green du déplacement de la plaque	233
3.8. Plaque bafflée fermant une cavité	237
3.8.1. Equations régissant le mouvement harmonique du système cavité-plaque-fluide externe	238
3.8.2. Equation intégrro-différentielle pour le déplacement de la plaque et développements asymptotiques raccordés	240
3.8.3. Représentation de la pression intérieure à l'aide d'intégrales de frontières	246
3.8.4. Comparaison entre prévisions numériques et résultats expérimentaux	247
3.9. Coque cylindrique de longueur finie bafflée excitée par un écoulement interne turbulent	252
3.9.1. Equations du mouvement et représentation de Green des pressions acoustiques extérieure et intérieure pour une force ponctuelle normale	254
3.9.2. Méthodes numériques pour résoudre les équations de la coque cylindrique bafflée	256
3.9.3. Comparaison entre résultats numériques et expérimentaux	258
3.10. Rayonnement d'une coque de longueur finie excitée par une source sonore intérieure	260
3.10.1. Enoncé du problème	261
3.10.2. Intégrales de frontière représentant la pression acoustique rayonnée et le déplacement de la coque	263
3.10.3. Représentation de Green de la pression acoustique intérieure et développements asymptotiques raccordés	265

3.10.4. Diagramme de directivité de la pression acoustique rayonnée	269
3.10.5. Méthode numérique, résultats et remarques	271
3.11. Diffraction d'une onde acoustique transitoire par une coque Line 2'	274
3.11.1. Enoncé du problème	276
3.11.2. Modes de résonance et réponse du système à une onde acoustique incidente transitoire	282
3.11.3. Méthode numérique et comparaison entre prédictions numériques et résultats expérimentaux	284
3.12. Exercices	288
 Bibliographie	 289
 Notations	 295
 Index	 297

Préface

Cette monographie a pour origine les cours que l'auteur a donnés à l'université d'Aix-Marseille aux étudiants du *Diplôme d'Etudes Approfondies de Mécanique* (aujourd'hui devenu *master de Mécanique*). Elle est principalement destinée aux étudiants du niveau de la licence, aux étudiants en thèse ainsi qu'aux scientifiques et ingénieurs en acoustique et vibrations.

Parmi les sources les plus répandues de pollution par le bruit, les moyens de transports – voitures, camions, trains, avions, bateaux – tiennent une place prépondérante. Tous ces véhicules sont, pour l'essentiel, composés de structures minces qui vibrent. C'est la raison pour laquelle ce manuel est consacré à la vibro-acoustique des structures minces uniquement.

La structure mince la plus simple est la plaque mince. Puis viennent les coques cylindriques circulaires et les coques sphériques. Ces structures de base fournissent un ensemble d'exemples qui permet de comprendre les bases physiques du phénomène de vibrations et de rayonnement acoustique. Bien sûr, dans la majorité des cas pratiques on rencontre des structures plus complexes. Mais leur comportement vibratoire et acoustique est tout à fait semblable à celui des structures décrites ici, et les outils mathématiques et numériques nécessaires à la prédiction de leur réponse sont les mêmes que ceux qui permettent de traiter les cas simples.

Un dernier objectif de cette monographie est de proposer une approche théorique homogène tant pour les problèmes de plaques que pour les problèmes de coques.

Le premier chapitre est consacré à l'établissement d'équations décrivant de façon approchée les vibrations de quelques solides minces, plus précisément : les plaques, les coques cylindriques circulaires et les coques sphériques. Les solutions analytiques ou numériques des équations de la mécanique sont toujours basées sur un principe variationnel, qui n'est rien d'autre que la transcription mathématique du principe de conservation de l'énergie sur lequel repose toute description des phénomènes de la physique. Aussi, pour établir les équations approchées qui régissent les phénomènes vibratoires des structures minces, nous partons des expressions de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique des solides élastiques tri-dimensionnels, exprimées dans un système de coordonnées adapté : coordonnées cartésiennes pour la plaque, cylindriques pour la coque cylindrique circulaire et sphériques pour la coque sphérique.

L'hypothèse *structure mince* permet de développer les trois composantes du déplacement et les six composantes du tenseur des contraintes en séries de Taylor formelles de la variable transversale, ce qui conduit à un système d'équations approchées. Dans chacun des cas, nous adoptons l'approximation la plus simple qui est tout à fait suffisante pour une bonne compréhension du phénomène physique. Néanmoins, la méthode développée dans cet ouvrage permet, si on le souhaite, d'accéder à des équations approchées plus précises, comme celles que l'on trouve dans les ouvrages fondamentaux qui sont cités au chapitre bibliographique.

Le second chapitre traite des vibrations des structures minces dans le vide. Une partie importante concerne les poutres et les plaques. La méthode classique, basée sur la séparation des variables, utilisée pour résoudre les problèmes de vibrations des plaques minces d'épaisseur constante et de formes simples (plaques circulaires ou rectangulaires) est développée en détails. Puis, des méthodes analogues sont développées pour des plaques d'épaisseur variable. Finalement, la méthode d'*éléments finis de frontières* (en anglais *Boundary Elements Method*, abrégé *B.E.M.*) est décrite en détail et illustrée par une comparaison entre prévisions numériques et résultats expérimentaux.

Le chapitre se poursuit ensuite avec les problèmes de coques. Pour la coque cylindrique circulaire, quelques méthodes analytiques classiques sont proposées : elles permettent, entre autres, de donner l'expression des modes de résonance et de la réponse de la structure à une excitation harmonique. La méthode d'*éléments finis de frontières* est également décrite. Pour la coque sphérique, il semble que l'on ne dispose d'aucune méthode analytique. La principale raison est que les équations ne sont pas séparables. Nous nous bornons donc à écrire les équations variationnelles que satisfont les modes de résonance et les régimes harmoniques, et à décrire sommairement une méthode générale de résolution.

Le troisième et dernier chapitre est consacré au problème important en ingénierie acoustique qu'est la génération du bruit par les structures vibrantes et la transmission des sons à travers les structures élastiques. Il commence par un exemple tout à fait académique à une dimension : il s'agit de la génération du son et de sa transmission par un piston, suspendu élastiquement par un ressort, et qui sépare deux guides d'onde semi-infinis de même section. Bien que ce système ne soit pas réaliste – nous ne voyons pas comment le réaliser expérimentalement – les équations qui le décrivent présentent l'avantage de se résoudre entièrement analytiquement, autant dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel. Son intérêt est qu'il permet de mettre clairement en évidence les aspects majeurs des processus impliqués dans la génération et dans la transmission du son par les structures vibrantes.

Après un court paragraphe dans lequel sont rappelés les concepts de base et les équations de l'acoustique, divers problèmes de vibro-acoustique sont examinés en détail. Ils concernent les plaques et les coques cylindriques circulaires. La notion importante de *modes de résonance de structures chargées par un fluide* est introduite : ces modes sont caractéristiques du système structure-fluide et peuvent être utilisés dans la prédiction de sa réponse à une excitation quelconque (harmonique, transitoire, aléatoire). Des méthodes numériques de calcul, soit des modes de résonance d'une structure couplée à un fluide, soit de sa réponse à une excitation sont décrites. Des résultats numériques sont donnés et, dans la mesure du possible, comparés avec des résultats expérimentaux issus de thèses récentes.

A la fin de chacun des trois chapitres, quelques exercices sont proposés en complément de l'exposé lui-même. En fin d'ouvrage, figure une liste de références bibliographiques de deux sortes : des ouvrages fondamentaux sur la question, que le lecteur pourra consulter pour avoir plus de détails sur les différents aspects abordés ; des articles spécialisés sur le sujet, et d'où, pour la plupart, sont tirés les méthodes numériques et les résultats numériques et expérimentaux qui illustrent les développements théoriques.

Comme nous l'avons déjà mentionné, le but de cette monographie est de présenter les notions de base et les principales méthodes nécessaires à l'étude des phénomènes de la vibro-acoustique. Aussi, seules les méthodes analytiques et numériques les plus classiques sont exposées : méthode de séparation des variables, développements en séries de fonctions spéciales, développements asymptotiques raccordés, équations intégrales de frontières (B.E.M.). De nos jours, de nombreuses méthodes numériques, souvent plus performantes mais nécessitant des calculatrices plus puissantes, ont été développées. Citons, par exemple, la méthode d'analyse statistique de l'énergie (en anglais *Statistical Energy Analysis*, abréviation S.E.A.), les méthodes d'éléments finis (en anglais *Finite Ele-*

ments Methods, abréviation *F.E.M.*), les méthodes mixtes éléments finis de frontières-éléments finis (*B.E.M.-F.E.M.*), des méthodes spécifiques pour les moyennes fréquences ou les hautes fréquences. Les méthodes classiques, telles que les méthodes d'éléments finis et d'éléments finis de frontières sont rendues plus performantes par de nouvelles techniques de programmation (comme, par exemple, la méthode des multi-pôles rapides, ou *Fast Multi-Pole Method*), etc. Un certain nombre d'ouvrages spécialisés ont déjà été publiés sur ces sujets pointus. Un certain nombre de logiciels pour l'ingénierie en acoustique et en vibro-acoustique sont également disponibles de nos jours.