

*J'intègre*

TOUT-  
EN-FICHES

**MPSI**

---

DANIEL **FREDON**

SAVÉRIO **CALLÉA**

DIDIER **MAGLOIRE**

# Toute la MPSI en fiches

**Maths • Physique • Chimie**

DUNOD

### Crédits photographiques :

Portrait de Leonhard Euler, 1753, par Jakob Handmann ; Max Planck, 1930, auteur inconnu ; Albert Einstein, 1921, photographié par Ferdinand Schmutzer ; Antoine Lavoisier, gravure de H. Rousseau et E. Thomas, *Album du centenaire*, 1889, Jouvett et cie.

Les figures des pages 443, 449 et 460 sont reprises des ouvrages ci-dessous, publiés aux Éditions Dunod :

Chimie tout en un, PC-PC\*, B. Fosset, J.-B. Baudin, F. Lahitète, V. Prévost, 2012

Le Formulaire PCSI-PTSI, L. Porcheron, D. Fredon, M. Descombes-Vasset, 2013

Conception et création de couverture : Atelier 3+

Collaboration technique : Thomas Fredon, ingénieur Télécom Bretagne

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2013  
ISBN 972-2-10-060059-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Avant propos

Pour chaque matière proposée dans cette ouvrage (mathématiques, physique, chimie), vous trouverez un résumé de cours pour vous aider dans vos révisions tout au long de l'année et, dans la dernière ligne droite, juste avant vos concours.



Ces résumés sont enrichis - non pas aux omega 3 comme dans la publicité -mais avec des conseils, des méthodes, des mises en garde, et des exercices types pour vous entraîner à manipuler les notions présentées.

Synthèse des programmes, ce livre vous accompagnera avant tout contrôle oral ou écrit. L'ordre de présentation des notions a été pensé en fonction de cet objectif. Ne soyez pas surpris que l'ordre pédagogique de votre cours soit différent : l'apprentissage n'est pas un processus linéaire. Mais il est normal que l'ordre pédagogique de votre cours soit différent : l'apprentissage n'est pas un processus linéaire.

Grâce au découpage en fiches et à la présence d'un index détaillé, vous retrouverez facilement, et à tout moment, les notions que vous souhaitez réviser.

Il vous sera également utile en deuxième année car, rappelez-vous, le programme des concours que vous passerez porte sur les deux années de classes préparatoires.

Dans chaque des fiches, certaines parties sont mises en valeur par un fond tramé :

- pour mettre en évidence un résultat important,
- avec le pictogramme  (prenez note !) pour des commentaires, remarques, méthodes,
- avec le pictogramme  (Attention, danger !) pour des mises en garde, des erreurs à éviter.

Un résumé de cours n'est pas un cours complet. Pour ceci, rien ne remplace le cours de votre professeur. Vous pouvez aussi consulter le catalogue Dunod, riche de nombreux manuels et ouvrages d'entraînement.

N'hésitez pas à nous communiquer vos critiques, vos propositions d'amélioration, et aussi vos encouragements.

**Daniel Fredon**  
daniel.fredon@laposte.net  
mathématiques

**Didier Magloire**  
didier.magloire@orange.fr  
physique

**Savério Calléa**  
saverio.callea@laposte.net  
chimie

Un grand merci à Matthieu Daniel pour le suivi attentif de la réalisation de ce livre et à Françoise Couty-Fredon pour son soutien sans faille.

# Table des matières

Avant-propos

3

## Mathématiques

### Analyse dans $\mathbb{R}$

1. Nombres réels	11
2. Généralités sur les fonctions	14
3. Limites et continuité	17
4. Fonctions dérivables	21
5. Logarithmes, exponentielles et puissances	25
6. Fonctions circulaires et hyperboliques	27
7. Suites numériques	31
8. Intégrales définies	36
9. Calcul des primitives	39
10. Comparaisons locales	42
11. Formules de Taylor	45
12. Équations différentielles linéaires	49
13. Séries numériques	52

### Algèbre générale

14. Rudiments de logique	55
15. Ensembles	58
16. Applications	60
17. Relations	63
18. Calculs algébriques	65
19. Nombres complexes	68
20. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	74
21. Structure de groupe	77
22. Structures d'anneau et de corps	80
23. Polynômes	82

24. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	86
25. Fractions rationnelles	88

## Algèbre linéaire et multilinéaire

26. Structure d'espace vectoriel	90
27. Espaces vectoriels de dimension finie	94
28. Applications linéaires	97
29. Espaces affines	102
30. Calcul matriciel	104
31. Matrices et applications linéaires	108
32. Systèmes linéaires	112
33. Déterminants	116
34. Espaces préhilbertiens réels	120
35. Isométries vectorielles	124

## Calcul des probabilités

36. Dénombrement	127
37. Espaces probabilisés finis	130
38. Probabilités conditionnelles	133
39. Variables aléatoires	136
40. Espérance et variance	141

Corrigés des mathématiques	144
----------------------------	-----

## Physique

1. Oscillateur harmonique	187
2. Propagation d'un signal	192

## Optique

3. Optique géométrique 1 : principes et lois	202
4. Optique géométrique 2 : formation des images	206

<b>5. Optique géométrique 3 : lentilles minces</b>	<b>209</b>
<b>6. Optique géométrique 4 : l'œil et les instruments d'optique</b>	<b>214</b>

## **Rudiments quantiques**

<b>7. Un monde quantique 1 : expériences et interprétations fondamentales</b>	<b>218</b>
<b>8. Un monde quantique 2 : introduction à la fonction d'onde</b>	<b>223</b>

## **Électricité ; traitement du signal**

<b>9. Notions fondamentales d'électricité 1 : charges, courants et tensions électriques</b>	<b>228</b>
<b>10. Notions fondamentales d'électricité 2 : les lois générales</b>	<b>233</b>
<b>11. Notions fondamentales d'électricité 3 : les dipôles</b>	<b>236</b>
<b>12. Notions fondamentales d'électricité 4 : circuits linéaires du premier ordre</b>	<b>245</b>
<b>13. Oscillateurs amortis</b>	<b>250</b>
<b>14. Filtrage linéaire</b>	<b>258</b>

## **Mécanique**

<b>15. Mécanique 1 : cinématique du point matériel et du solide</b>	<b>268</b>
<b>16. Mécanique 2 : dynamique du point matériel</b>	<b>277</b>
<b>17. Mécanique 3 : point de vue énergétique</b>	<b>284</b>
<b>18. Mécanique 4 : mouvement des particules chargées</b>	<b>296</b>
<b>19. Mécanique 5 : dynamique de rotation</b>	<b>302</b>
<b>20. Mécanique 6 : champs de force centrale</b>	<b>312</b>
<b>21. Mécanique 7 : champs newtoniens de force centrale</b>	<b>316</b>

## **Induction**

<b>22. Le champ magnétique et son action sur les courants électriques</b>	<b>321</b>
---	------------

23. Lois de l'induction	325
-------------------------	-----

## Thermodynamique

24. Thermodynamique 1 : description des systèmes à l'équilibre	335
25. Thermodynamique 2 : premier principe	343
26. Thermodynamique 3 : changements d'état	352
27. Thermodynamique 4 : second principe	359
28. Thermodynamique 5 : les machines thermiques	359

Corrigés de la physique	370
-------------------------	-----

## Chimie

### Transformation de la matière

1. Systèmes physico-chimiques	397
2. Transformation chimique	401
3. Cinétique chimique	405

### Architecture de la matière

4. Configuration électronique d'un atome	411
5. Classification périodique des éléments	418
6. Comment décrire les entités chimiques moléculaires ?	426
7. Les interactions intermoléculaires et les solvants moléculaires	431

### Solides cristallins

8. Le modèle du cristal parfait	437
9. Les cristaux métalliques	442
10. Solides macrocovalents et moléculaires	448
11. Solides ioniques	453

## **Transformations chimiques en solution aqueuse**

<b>12. Les réactions d'oxydo-réduction</b>	457
<b>13. Les réactions acide-base</b>	468
<b>14. Les réactions de complexation</b>	475
<b>15. Les réactions de dissolution</b>	479
<b>16. Les diagrammes E-pH</b>	484

<b>Corrigés de la chimie</b>	492
------------------------------	-----

<b>Index des mathématiques</b>	504
--------------------------------	-----

<b>Index de la physique</b>	507
-----------------------------	-----

<b>Index de la chimie</b>	511
---------------------------	-----



# Partie 1

## Mathématiques



Leonhard Euler, 1707-1783

Son oeuvre scientifique, qui comporte 886 titres (soit près de 80 volumes), est la plus vaste de l'histoire des sciences. Elle couvre tout le champ des mathématiques, de la mécanique céleste et de la physique de son époque.

Il est émerveillé par sa formule  $e^{i\pi} + 1 = 0$  qui relie les cinq nombres fondamentaux  $e$ ,  $i$ ,  $\pi$ ,  $1$  et  $0$ . Et vous ?



# 1 Nombres réels

## 1. Intervalles

### 1.1 Définitions

Pour  $a \leq b$ , le segment,  $[a; b]$  est défini par :

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}$$

On utilise souvent la propriété :

$$c \in [a, b] \iff \exists t \in [0, 1] \quad c = ta + (1 - t)b$$

On définit de même les autres types d'intervalles :

$$]a; b[, [a; b[, ]a, b], [a, +\infty[, [a, +\infty[, ]-\infty, b], ]-\infty, b], ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}.$$

### 1.2 Propriété caractéristique

Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si, et seulement si :

$$\forall a \in A \quad \forall b \in A \quad a < c < b \implies c \in A.$$

### 1.3 Voisinage d'un point

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Une partie  $V$  de  $\mathbb{R}$  est un voisinage de  $a$  si elle contient un intervalle ouvert centré sur  $a$ .

### 1.4 Parties denses dans $\mathbb{R}$

Une partie  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

**Exemples :** Les décimaux, les rationnels, les irrationnels sont des parties denses dans  $\mathbb{R}$ . Cela signifie que, entre deux réels distincts, il existe toujours un rationnel et un irrationnel.

Par conséquent, entre deux réels distincts, il existe une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

## 2. Approximations décimales

### 2.1 Valeurs approchées

Soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ . On dit que  $b$  est une *valeur approchée* de  $a$  à  $\varepsilon$  près si  $|a - b| < \varepsilon$ , c'est-à-dire si  $b \in ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ .

On parle de valeur approchée *par excès* si  $b > a$  et *par défaut* si  $b < a$ .

### 2.2 Partie entière

Étant donné un nombre réel  $x$ , il existe un plus grand entier relatif, noté  $\lfloor x \rfloor$ , tel que  $\lfloor x \rfloor \leq x$ . On l'appelle la partie entière de  $x$ .

On a donc, par définition :  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ .



Attention à ne pas confondre avec la suppression de la partie décimale quand  $x < 0$  ; par exemple  $\lfloor -4,3 \rfloor = -5$ .

## 2.3 Valeurs décimales approchées

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe un entier  $d$  unique tel que

$$d \times 10^{-n} \leq x < (d+1) \times 10^{-n}.$$

$d$  est la partie entière de  $10^n x$ .

$d \times 10^{-n}$  s'appelle la *valeur décimale approchée de  $x$  à  $10^{-n}$  près par défaut*, et  $(d+1) \times 10^{-n}$  celle *par excès*.

## 3. Ordre dans $\mathbb{R}$

### 3.1 Majoration, minoration

#### • Définitions

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $a$  est un majorant de  $A$  si  $x \leq a$  pour tout  $x$  de  $A$ .  
Si, en plus,  $a \in A$ , alors  $a$  est le plus grand élément de  $A$ , noté  $\max A$ .

Si  $A$  admet un majorant, on dit que  $A$  est majorée.

On définit de même : minorant, plus petit élément, partie minorée.

#### • Unicité

Si une partie non vide de  $\mathbb{R}$  admet un plus grand élément, ou un plus petit élément, il est unique. Mais il peut ne pas exister.



*Surveillez votre vocabulaire : **un majorant, le plus grand élément.***

#### • Cas particulier des entiers naturels

Toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément.

Toute partie non vide majorée de  $\mathbb{N}$  admet un plus grand élément.

### 3.2 Borne supérieure, inférieure

#### • Définitions

La borne supérieure de  $A$  est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de  $A$ .

La borne inférieure de  $A$  est le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble des minorants de  $A$ .

#### • Caractérisation

$M$  est la borne supérieure de  $A$  si, et seulement si, on a, à la fois :

$$\forall x \in A \quad x \leq M, \text{ c'est-à-dire que } M \text{ est un majorant ;}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x, \text{ c'est-à-dire que } M - \varepsilon \text{ n'est pas un majorant.}$$

$m$  est la borne inférieure de  $A$  si, et seulement si, on a, à la fois :

$$\forall x \in A \quad m \leq x, \text{ c'est-à-dire que } m \text{ est un minorant ;}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad x < m + \varepsilon, \text{ c'est-à-dire que } m + \varepsilon \text{ n'est pas un minorant.}$$

- **Remarque**

Si  $A$  admet un plus grand élément, alors c'est la borne supérieure de  $A$ .

Si  $A$  admet un plus petit élément, alors c'est la borne inférieure de  $A$ .

- **Théorème d'existence**

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure (resp. inférieure).

### 3.3 Droite numérique achevée

Pour ne pas avoir de restriction dans le théorème précédent, on considère un nouvel ensemble noté  $\overline{\mathbb{R}}$  obtenu à partir de  $\mathbb{R}$  par l'adjonction de deux éléments notés  $-\infty$  et  $+\infty$ .

On prolonge à  $\overline{\mathbb{R}}$  la relation d'ordre en posant pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :

$$-\infty < a < +\infty.$$

On définit ainsi la droite numérique achevée dont le plus grand élément est  $+\infty$ , le plus petit élément  $-\infty$ .

Et le théorème précédent se généralise :

Toute partie non vide de  $\overline{\mathbb{R}}$  admet une borne supérieure et une borne inférieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

## 2 Généralités sur les fonctions

### 1. Définitions

#### 1.1 Fonction numérique

Définir une fonction numérique  $f$  sur une partie non vide  $E$  de  $\mathbb{R}$ , c'est indiquer comment faire correspondre au plus un réel  $y$  à tout  $x$  de  $E$ .

Le réel  $y$  est l'image de  $x$  par  $f$  et s'écrit  $f(x)$ . On note :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

L'ensemble des réels qui ont effectivement une image par  $f$  est l'ensemble de définition de  $f$ . Il est noté  $D_f$ , ou  $D$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

#### 1.2 Représentation graphique

Le plan étant rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la représentation graphique de  $f$  est l'ensemble  $C_f$  des points de coordonnées  $(x, f(x))$  avec  $x \in D_f$ .

#### 1.3 Images et images réciproques d'ensembles

Soit  $A \subset D_f$ . L'image de  $A$  par  $f$  est l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x) ; x \in A\}.$$

Soit  $B \subset \mathbb{R}$ . L'image réciproque de  $B$  par  $f$  est l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in D_f ; f(x) \in B\}.$$



Cette notation permet de ne pas confondre avec la réciproque d'une bijection, car, ici, on ne suppose rien sur  $f$ . Quand la distinction sera installée, on utilisera  $f^{-1}(B)$ .

#### 1.4 Restriction, prolongement

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  et  $g$  une fonction définie sur  $J$ . Si  $I \subset J$  et si  $f(x) = g(x)$  pour tout  $x$  de  $I$ , on dit que  $f$  est une restriction de  $g$ , ou que  $g$  est un prolongement de  $f$ .

La restriction de  $f$  à  $I$  se note :  $f|_I$ .

## 2. Premières propriétés

#### 2.1 Parité

- $f$  est paire si :

$$\forall x \in D_f \quad (-x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x).$$

Son graphe est symétrique par rapport à  $(Oy)$ .

- $f$  est impaire si :

$$\forall x \in D_f \quad (-x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Son graphe est symétrique par rapport à  $O$ .

## 2.2 Périodicité

$f$  est périodique, de période  $T$  (ou  $T$ -périodique), si

$$\forall x \in D_f \quad (x + T) \in D_f \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Son graphe est invariant par les translations de vecteurs  $kT\vec{t}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 2.3 Sens de variation

- $f$  est croissante sur  $I$  si  $I \subset D_f$  et

$$\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

- $f$  est décroissante sur  $I$  si  $I \subset D_f$  et

$$\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

- $f$  est monotone sur  $I$  si elle est croissante sur  $I$ , ou décroissante sur  $I$ .
- Avec des inégalités strictes, on définit :  $f$  strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone, sur  $D_f$ .

## 2.4 Extrémum

- $f$  admet un maximum (resp. minimum) global en  $x_0$  si :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

- $f$  admet un maximum (resp. minimum) local en  $x_0 \in D_f$ , s'il existe un intervalle ouvert  $I \subset D_f$ , tel que :

$$\forall x \in I \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Un maximum ou un minimum local est dit *extremum local* en  $x_0$ .

Un *extremum* est un maximum ou un minimum.

## 3. Relation d'ordre

### 3.1 Comparaison de fonctions

$f$  et  $g$  étant deux fonctions, à valeurs réelles, définies sur le même ensemble de définition  $D$ , on note  $f \leq g$  (resp.  $f \geq g$ ) si :

$$\forall x \in D \quad f(x) \leq g(x) \quad (\text{resp. } f(x) \geq g(x)).$$

Si  $f \geq 0$ ,  $f$  est dite *positive*.

### 3.2 Majorant, minorant

Si l'ensemble des images  $f(D)$  est majoré, ou minoré, ou borné, on dit que  $f$  est *majorée*, ou *minorée*, ou *bornée*.

Si l'image  $f(I)$  de  $I$  admet une borne supérieure, ou une borne inférieure, on parle de *borne supérieure*, de *borne inférieure*, de  $f$  sur  $I$  et on note :

$$\sup_{x \in I} f(x) ; \inf_{x \in I} f(x).$$

### 3.3 Propriétés

$$\inf_{x \in I} f(x) = -\sup_{x \in I} (-f(x)).$$

Si, pour tout  $x \in I$ , on a  $f(x) \leq g(x)$ , alors  $\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in I} g(x)$ .

Si  $I \subset J$ , on a :  $\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in J} f(x)$ .

## 4. Opérations sur les fonctions

### 4.1 Valeur absolue d'une fonction

$f$  étant définie sur  $D$ , la fonction  $|f|$  est définie sur  $D$  par  $x \mapsto |f(x)|$ .

Une fonction  $f$  est bornée si, et seulement si,  $|f|$  est majorée.

### 4.2 Opérations algébriques

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques et  $\lambda$  un réel.

La fonction  $\lambda f$  est définie sur  $D_f$  par :  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ .

La fonction  $f + g$  est définie sur  $D_f \cap D_g$  par :  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ .

La fonction  $f g$  est définie sur  $D_f \cap D_g$  par :  $(f g)(x) = f(x) g(x)$ .

La fonction  $\frac{f}{g}$  est définie sur  $D_f \cap \left[ D_g \setminus \{x ; g(x) = 0\} \right]$  par :  $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

### 4.3 Composition

On appelle composée de  $f$  par  $g$  la fonction, notée  $g \circ f$ , définie sur  $D_f \cap f^{-1}(D_g)$  par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



# 3 Limites et continuité

## 1. Définitions

Soit  $f$  une fonction, à valeurs réelles, définie sur un intervalle  $I$ .

### 1.1 Limite d'une fonction en $a$

Soit  $a$  un point appartenant à  $I$ , ou extrémité de  $I$ . On dit que  $f$  admet une limite finie  $l$  en  $a$ , et on note  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$



*Cette limite peut exister même si  $f$  n'est pas définie en  $a$ . Mais si  $f$  est définie en  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe, alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .*

Si une fonction admet une limite  $l$  en  $x_0$ , cette limite est unique.

### 1.2 Limite à gauche, limite à droite

- $f$  admet une limite à droite  $l$  en  $a$  si la restriction de  $f$  à  $I \cap ]a, +\infty[$  admet pour limite  $l$  en  $a$ . On note :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ .
- $f$  admet une limite à gauche  $l$  en  $a$  si la restriction de  $f$  à  $I \cap ]-\infty, a[$  admet pour limite  $l$  en  $a$ . On note :  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ .

- Si  $f$  est définie sur un intervalle de la forme  $]a - \alpha, a + \alpha[$ , sauf en  $a$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l.$$

Si  $f$  est définie en  $a$ , ces deux limites doivent aussi être égales à  $f(a)$ .

### 1.3 Limite infinie en $a$

- On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$  si :

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leq \delta \implies f(x) \geq A.$$

On note :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .

- On dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$  si :

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leq \delta \implies f(x) \leq -A.$$

On note :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

### 1.4 Limite de $f$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

- On dit que  $f$  a pour limite  $l$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x \geq B \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On note :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .

On définit de manière analogue  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ .

- On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si :

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x \geq B \implies f(x) \geq A.$$

On note :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

On définit de manière analogue  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \dots$



Toutes ces définitions peuvent se regrouper en considérant  $a$  et  $l$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

## 2. Propriétés des limites

### 2.1 Caractérisation séquentielle

Soit  $f$  définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un point de  $I$ .

$f$  a pour limite  $l$  au point  $a$  si, et seulement si, pour toute suite  $(x_n)$  convergeant vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $l$ , finie ou non.



Pour démontrer qu'une fonction  $f$  n'a pas de limite lorsque  $x$  tend vers  $a$ , il suffit de fournir un exemple de suite  $(x_n)$  qui tende vers  $a$  et telle que  $(f(x_n))$  soit divergente ; ou encore deux suites qui tendent vers  $a$  et dont les suites images aient des limites différentes.

### 2.2 Opérations sur les limites

- Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a$  et admettant des limites  $l$  et  $m$  en  $a$ , et  $\lambda$  un réel.

Alors les fonctions  $f + g$ ,  $\lambda f$  et  $f g$  admettent respectivement pour limites en  $a$  :  $l + m$ ,  $\lambda l$  et  $lm$ .

Si de plus  $m \neq 0$ ,  $\frac{1}{g}$  a pour limite  $\frac{1}{m}$ .

- Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$  avec  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = u_0$  et  $g$  définie au voisinage de  $u_0$  telle que  $\lim_{u \rightarrow u_0} g(u) = v$ .

Alors  $g \circ f$  est définie au voisinage de  $x_0$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = v$ .

### 2.3 Propriétés liées à l'ordre

- Si  $f$  admet une limite finie en  $a$ , alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .
- Si  $f$  admet une limite finie  $l > 0$  en  $a$ , alors il existe  $K > 0$  tel que  $f \geq K$  au voisinage de  $a$ .
- Si  $f$  est positive au voisinage de  $a$  et admet une limite finie  $l$  en  $a$ , alors  $l \geq 0$ .
- Si  $f \leq g$  au voisinage de  $a$ , et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ , alors  $l \leq m$ .

#### • Théorème d'encadrement

Soit  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies au voisinage de  $a$ , et vérifiant  $f \leq g \leq h$  au voisinage de  $a$ .

Si  $f$  et  $h$  ont la même limite  $l$  (finie ou infinie) en  $a$ , alors  $g$  a pour limite  $l$  en  $a$ .

- Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a$ , et vérifiant  $f \leq g$  au voisinage de  $a$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

## 2.4 Théorème de la limite monotone

Soit  $f$  une fonction monotone sur  $] \alpha, \beta[$ . Elle admet en tout point  $a$  de  $] \alpha, \beta[$  une limite à droite et une limite à gauche.

Lorsque  $f$  est croissante, si elle est majorée, elle admet en  $\beta$  une limite à gauche finie, si elle n'est pas majorée, elle tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $\beta^-$ .

Pour  $f$  décroissante, on a la propriété analogue en  $\alpha$ .

## 3. Continuité

### 3.1 Continuité en un point

- $f$  est continue en  $a$  si elle est définie en  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- $f$  est continue à droite (resp. à gauche) en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ).

### 3.2 Prolongement par continuité

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  et  $a \notin I$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , la fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $I \cup \{a\}$  par  $\tilde{f}(a) = l$  et  $\tilde{f}(x) = f(x)$  pour  $x \in I$ , est la seule fonction continue en  $a$  dont la restriction à  $I$  soit  $f$ .

On l'appelle le prolongement par continuité de  $f$  en  $a$ .

### 3.3 Continuité sur un intervalle

Soit  $E$  un ensemble qui soit un intervalle ou une réunion d'intervalles. Une fonction  $f$ , définie sur  $E$ , est dite continue sur  $E$ , si  $f$  est continue en tout point de  $E$ .

## 4. Image d'un intervalle

### 4.1 Image d'un intervalle

Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ , alors  $f(I)$  est un intervalle.

### 4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Si  $f$  est continue, pour tout  $y$  tel que  $f(a) < y < f(b)$ , il existe  $c$  tel que  $y = f(c)$ .

En particulier, si une fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , et si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signe contraire, l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $[a; b]$ .

### 4.3 Image d'un segment

- Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

### 4.4 Cas d'une fonction strictement monotone

Soit  $f$  une fonction continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ , et sa bijection réciproque  $f^{-1}$  est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle  $f(I)$ .
- Dans un repère orthonormé, les graphes de  $f$  et de  $f^{-1}$  sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.

## 4.5 Continuité et injectivité

- Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone.
- La réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle est continue.

## 5. Continuité uniforme

### 5.1 Définition

Une fonction  $f$  est uniformément continue sur  $D$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D \quad \forall x' \in D \quad |x - x'| \leq \alpha \implies |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon.$$



Dans cette écriture logique,  $\alpha$  dépend de  $\varepsilon$ , mais pas de  $x$ ; d'où l'origine du mot *uniforme*.

La continuité uniforme sur  $D$  entraîne la continuité sur  $D$ .

### 5.2 Théorème de Heine

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Montrez que la fonction définie pour  $x \neq 0$  par  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  n'a pas de limite quand  $x$  tend vers 0.

**Exercice 2 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  par  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$ .

Montrez que :  $0 < f(x) < \tan \frac{x}{2}$ . Déduisez-en :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**Exercice 3 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ .

Est-elle prolongeable par continuité en  $x = \frac{\pi}{2}$  ?

**Exercice 4 :** Montrez que la fonction définie sur  $]0; 1]$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$  n'est pas uniformément continue.

# 4

## Fonctions dérivables

### 1. Définitions

#### 1.1 Dérivée en un point

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$  et  $x_0$  un élément de  $D$  tel que  $f$  soit définie au voisinage de  $x_0$ . On appelle dérivée de  $f$  au point  $x_0$  le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

On dit alors que  $f$  est dérivable en  $x_0$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe,  $f$  est dite dérivable à droite en  $x_0$ , et cette limite est appelée dérivée à droite de  $f$  en  $x_0$ , et notée  $f'_d(x_0)$ .

On définit de même la dérivée à gauche en  $x_0$ , notée  $f'_g(x_0)$ .

$f$  est dérivable en  $x_0$  si, et seulement si,  $f$  admet en  $x_0$  une dérivée à droite et une dérivée à gauche égales.

#### 1.2 Fonction dérivée

$f$  est dite dérivable sur  $E$ , si elle est dérivable en tout point de  $E$ .

On appelle fonction dérivée de  $f$  sur  $E$ , la fonction, notée  $f'$ , définie sur  $E$  par :  $x \mapsto f'(x)$ .

#### 1.3 Dérivées successives

Soit  $f$  dérivable sur  $E$ . Si  $f'$  est dérivable sur  $E$ , on note sa fonction dérivée  $f''$  ou  $f^{(2)}$ . On l'appelle dérivée seconde de  $f$ .

Pour  $n$  entier, on définit par récurrence la dérivée  $n^e$ , ou dérivée d'ordre  $n$ , de  $f$  en posant  $f^{(0)} = f$ , puis  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ , lorsque  $f^{(n-1)}$  est dérivable sur  $E$ .

$f$  est dite de classe  $C^n$  sur  $E$  si  $f^{(n)}$  existe sur  $E$ , et est continue sur  $E$ .

$f$  est dite de classe  $C^\infty$ , ou indéfiniment dérivable, si  $f$  admet des dérivées de tous ordres.

#### 1.4 Interprétation graphique

$f$  dérivable en  $x_0$  signifie que le graphe de  $f$  admet au point d'abscisse  $x_0$  une tangente de pente  $f'(x_0)$ . Son équation est :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ ,  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$ , mais le graphe de  $f$  admet au point d'abscisse  $x_0$  une tangente parallèle à  $Oy$ .

#### 1.5 Dérivabilité et continuité

Toute fonction dérivable en  $x_0$  est continue en  $x_0$ .



*Attention, la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction  $x \mapsto |x|$  est continue, et non dérivable, en 0, car elle admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite différentes.*

## 2. Opérations sur les fonctions dérivables

### 2.1 Opérations algébriques

Si  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $x_0$ , il en est de même de  $f + g$ , de  $fg$ , et de  $\frac{f}{g}$  si  $g(x_0) \neq 0$ ; et on a :

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

### 2.2 Fonction composée

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $x_0$  et  $g$  une fonction dérivable en  $f(x_0)$ , alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$ , et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0).$$

### 2.3 Dérivée d'une fonction réciproque

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur un intervalle  $I$ . On suppose que  $f$  est dérivable en  $f(x_0)$  et que  $f'(x_0) \neq 0$ .

Alors, la fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(x_0)$  et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

### 2.4 Cas des fonctions à valeurs complexes

- Pour une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par sa partie réelle et sa partie imaginaire :

$$f(x) = a(x) + i b(x)$$

on dit que  $f$  est dérivable si, et seulement si,  $a$  et  $b$  le sont et on a :

$$f'(x) = a'(x) + i b'(x)$$

- Les opérations algébriques se prolongent. On a le résultat (très utile en physique) : si  $\varphi$  est une fonction dérivable à valeurs complexes :

$$\left[ \exp(\varphi) \right]' = \varphi' \times \exp(\varphi).$$

## 3. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

### 3.1 Condition nécessaire d'extrémum local

Si  $f$  admet un extrémum local en  $x_0$  et si  $f$  est dérivable, alors  $f'(x_0) = 0$ .

### 3.2 Théorème de Rolle

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , et telle que  $f(a) = f(b)$ .

Alors il existe au moins un point  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Autre énoncé**

Si  $f$  est dérivable, entre deux valeurs qui annulent  $f$ , il existe au moins une valeur qui annule  $f'$ .

**3.3 Égalité des accroissements finis**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ . Alors il existe au moins un point  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$



Cette égalité, valable pour les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , ne se généralise pas aux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , ainsi que le théorème de Rolle.

**3.4 Inégalité des accroissements finis**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ .

Si  $m \leq f' \leq M$ , alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En particulier, si  $|f'| \leq K$ , alors, pour tous  $x$  et  $x'$  éléments de  $]a, b[$ ,

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|.$$

Dans ce cas, on dit que  $f$  est  $K$ -lipschitzienne. Cette inégalité se généralise aux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  en remplaçant la valeur absolue par le module.

**3.5 Limite de la dérivée**

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , et si  $f'$  a une limite finie  $l$  en  $a$ , alors  $f$  est dérivable à droite en  $a$  et  $f'_d(a) = l$ .



Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que  $f'_d(a)$  existe sans que  $f'$  ait une limite en  $a$ .

**4. Variations d'une fonction dérivable****4.1 Théorème**

Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) = 0$  alors  $f$  est constante sur  $I$ .

Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) \geq 0$  alors  $f$  est croissante sur  $I$ .

Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) > 0$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

Ce dernier résultat est encore valable si  $f'$  s'annule en des points isolés, c'est-à-dire tels que leur ensemble ne contienne pas d'intervalle.

**4.2 Condition suffisante d'extremum local**

$f$ ,  $f'$  et  $f''$  étant continues sur  $]a, b[$ , si en  $x_0 \in ]a, b[$ , on a  $f'(x_0) = 0$  et  $f''(x_0) \neq 0$ , la fonction  $f$  présente un extremum local en  $x_0$ .

C'est un maximum si  $f''(x_0) < 0$ , un minimum si  $f''(x_0) > 0$ .

**Sauriez-vous répondre ?**

**Exercice 1 :** Soit  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des réels tels que  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ .

Considérons la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ .

Montrez que l'équation  $f(x) = 0$  a, au moins, une solution dans  $]0; 1[$ .

**Exercice 2 :** Appliquez l'égalité des accroissements finis à la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $f(x) = e^{ix}$  entre  $a = 0$  et  $b = 2\pi$ . Concluez.

**Exercice 3 :** Montrez que  $|\sin x| \leq |x|$  pour tout  $x$  réel.



# 5 Logarithmes, exponentielles et puissances

## 1. Fonction logarithme népérien

### 1.1 Définition et graphe

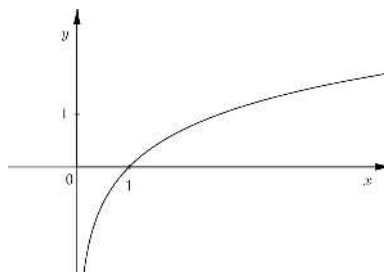
Elle est définie pour  $x > 0$  par :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0; \\ \forall x > 0 \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Elle est strictement croissante.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

L'unique solution de l'équation  $\ln x = 1$  est notée  $e$  ( $e \approx 2,718$ ).



### 1.2 Propriétés algébriques

$$\forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln(a^r) = r \ln a \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

## 2. Fonction exponentielle

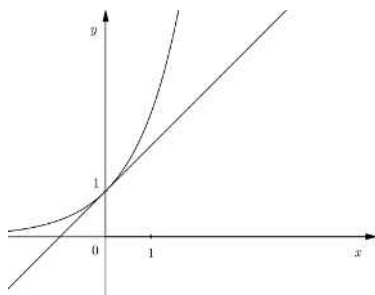
### 2.1 Fonction exponentielle

C'est la fonction réciproque de la fonction  $\ln$ . Elle est définie sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $]0, +\infty[$ , strictement croissante.

Elle est notée  $\exp$ , ou  $x \mapsto e^x$ .

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$



### 2.2 Propriétés algébriques

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad ; \quad e^{ra} = (e^a)^r \quad ; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad ; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

## 3. Logarithme et exponentielle de base $a$

### 3.1 Logarithme de base $a$

La fonction logarithme de base  $a$  ( $a > 0; a \neq 1$ ), est la fonction définie par :

$$\forall x > 0 \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Sa dérivée est :  $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}$ .

Ses propriétés algébriques sont les mêmes que celles de la fonction  $\ln$ .

Si  $a = 10$ ,  $\log_a$  est le logarithme décimal. On le note  $\log$ .

### 3.2 Exponentielle de base $a$

La fonction exponentielle de base  $a$  ( $a > 0$ ), est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

Pour  $a \neq 1$ ,  $c'$  est la fonction réciproque de la fonction  $\log_a$ .

$$y = a^x \iff \ln y = x \ln a \iff x = \log_a(y).$$

Sa dérivée est :  $(a^x)' = \ln a \times a^x$ .



Remarquez bien qu'ici, la variable est en exposant.

Ses propriétés algébriques sont les mêmes que celles de la fonction  $\exp$ .

## 4. Fonctions puissances et comparaisons

### 4.1 Fonctions puissances

La fonction  $x \mapsto x^r$ , pour  $x > 0$  et  $r \in \mathbb{Q}$ , est déjà connue. On la généralise, pour  $x > 0$  et  $a \in \mathbb{R}$ , en posant :

$$x^a = e^{a \ln x}.$$

Les propriétés des exposants rationnels sont prolongées ; en particulier  $(x^a)' = ax^{a-1}$ .



Remarquez bien qu'ici, l'exposant est constant.

### 4.2 Comparaison des fonctions logarithmes et puissances

Pour  $b > 0$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^b \ln x = 0.$$

### 4.3 Comparaison des fonctions puissances et exponentielles

Pour  $a > 1$  et  $b$  quelconque, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty.$$

### 4.4 Comparaison des fonctions logarithmes et exponentielles

Pour  $a > 1$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{a^x} = 0.$$

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1** : Résolvez dans  $\mathbb{R}$  chacune des équations :

- $\ln(x+1) + \ln(x+5) \ln 96$ .
- $\ln|x+1| + \ln|x+5| = \ln 96$ .

**Exercice 2** : Résolvez dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation : (I)  $e^{2x} - e^{x+2} - e^{2-x} + 1 < 0$ .

# 6

# Fonctions circulaires et hyperboliques

## 1. Fonctions circulaires et trigonométrie

### 1.1 Fonctions sinus et cosinus

Elles sont définies dans  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $[-1, 1]$ . Elles sont  $2\pi$ -périodiques. La fonction cos est paire ; la fonction sin est impaire.

**Dérivées :**

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x)' = \cos x \quad ; \quad (\cos x)' = -\sin x.$$



*Si  $x$  est la mesure d'un angle, ces expressions des dérivées ne sont correctes que si  $x$  est exprimé en radians.*

**Limites :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$

### 1.2 Fonction tangente

Elle est définie sur  $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$  par :  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$

Elle est impaire et  $\pi$ -périodique.

**Dérivée :**

$$\forall x \in D \quad (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

**Limite :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$

### 1.3 Angles associés

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad ; \quad \sin(\pi - x) = \sin x \quad ; \quad \tan(\pi - x) = -\tan x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \quad ; \quad \sin(\pi + x) = -\sin x \quad ; \quad \tan(\pi + x) = \tan x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad ; \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad ; \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$$

### 1.4 Formules d'addition

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad ; \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad ;$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

## 1.5 Formules de duplication

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad ; \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad ; \quad \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} .$$

## 1.6 Expressions en fonction de $\tan \frac{a}{2}$

En posant  $t = \tan \frac{a}{2}$  on a :

$$\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad ; \quad \sin a = \frac{2t}{1 + t^2} \quad ; \quad \tan a = \frac{2t}{1 - t^2} .$$

## 1.7 Transformation d'un produit en somme

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)] \quad ; \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

# 2. Fonctions circulaires réciproques

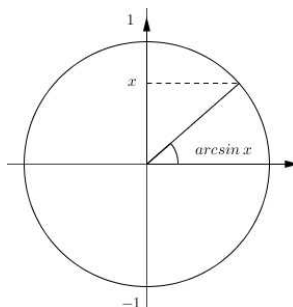
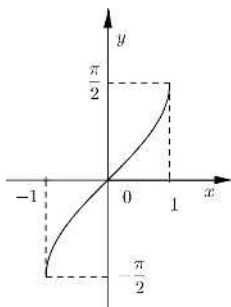
## 2.1 Fonction arc sinus

C'est la réciproque de la restriction à  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  de la fonction sinus.

$$\left. \begin{array}{l} y = \arcsin x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

La fonction arcsin est impaire.

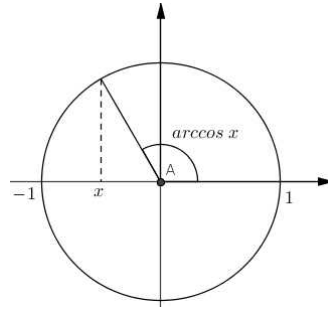
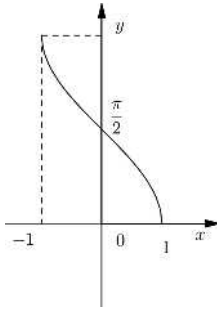
$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$



## 2.2 Fonction arc cosinus

C'est la réciproque de la restriction à  $[0, \pi]$  de la fonction cosinus.

$$\left. \begin{array}{l} y = \arccos x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{array} \right.$$



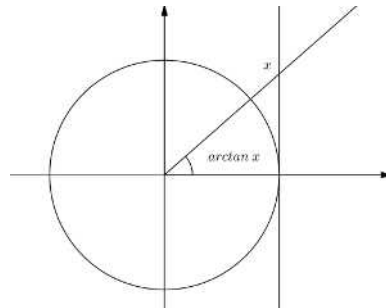
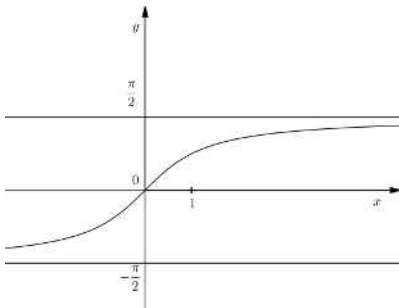
## 2.3 Fonction arc tangente

C'est la réciproque de la restriction à  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  de la fonction tangente.

$$\left. \begin{array}{l} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

La fonction arctan est impaire.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$



## 2.4 Propriétés

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin x)$$

$$\forall x > 0 \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x < 0 \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$



Votre programme prévoit d'utiliser les écritures Arcsin, Arccos, Arctan, bien que ces notations aient été abandonnées : normes AFNOR à partir de 1982.

### 3. Fonctions hyperboliques

#### 3.1 Définitions

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} ; \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} ; \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} .$$

$\operatorname{ch}$  est paire ;  $\operatorname{sh}$  et  $\operatorname{th}$  sont impaires.

#### 3.2 Propriétés algébriques

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x ; \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 ; \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} .$$

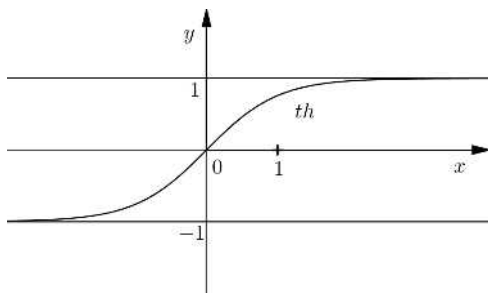
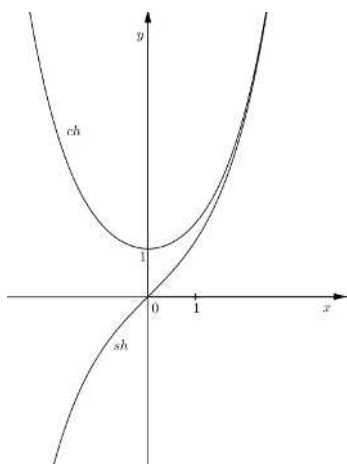
#### 3.3 Dérivées

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x ; (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x ; (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x .$$

#### 3.4 Graphes

Le graphe de  $\operatorname{ch}$  est situé au-dessus de celui de  $\operatorname{sh}$ .

Le graphe de  $\operatorname{th}$  est situé entre les deux asymptotes  $y = -1$  et  $y = 1$  :



### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Déterminez une primitive de  $f(x) = \cos 2x \sin 3x$ .

**Exercice 2 :** Montrez que l'équation  $\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$  a une racine unique et déterminez sa valeur exacte.

**Exercice 3 :** Montrez que  $\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$  pour tout  $x \neq 0$ .

# 7 Suites numériques

## 1. Généralités

Une suite numérique est une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ .

### 1.1 Suite bornée

Une suite  $(u_n)$  est majorée s'il existe un réel  $A$  tel que, pour tout  $n$ ,  $u_n \leq A$ . On dit que  $A$  est un majorant de la suite.

Une suite  $(u_n)$  est minorée s'il existe un réel  $B$  tel que, pour tout  $n$ ,  $B \leq u_n$ . On dit que  $B$  est un minorant de la suite.

Une suite est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe  $M$  tel que  $|u_n| \leq M$  pour tout  $n$ .

### 1.2 Suite convergente

La suite  $(u_n)$  est convergente vers  $l$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.



*La suppression d'un nombre fini de termes ne modifie pas la nature de la suite, ni sa limite éventuelle.*

Toute suite convergente est bornée. Une suite non bornée ne peut donc pas être convergente. Mais une suite bornée n'est pas toujours convergente.

### 1.3 Limites infinies

On dit que la suite  $(u_n)$  tend

vers  $+\infty$  si :  $\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \geq A$

vers  $-\infty$  si :  $\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \leq -A.$

### 1.4 Limites connues

Pour  $k > 1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k^n}{n!} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{k^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0.$$

## 2. Opérations sur les suites et propriétés

### 2.1 Opérations algébriques

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers  $l$  et  $l'$ , alors les suites  $(u_n + v_n)$ ,  $(\lambda u_n)$  et  $(u_n v_n)$  convergent respectivement vers  $l + l'$ ,  $\lambda l$  et  $ll'$ .

Si  $l' \neq 0$ ,  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  converge vers  $\frac{l}{l'}$ .

Si  $(u_n)$  tend vers 0 et si  $(v_n)$  est bornée, alors la suite  $(u_n v_n)$  tend vers 0.

## 2.2 Relation d'ordre

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont des suites convergentes telles que l'on ait  $u_n \leq v_n$  pour  $n \geq n_0$ , alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$



*Attention, pas de théorème analogue pour les inégalités strictes.*

## 2.3 Théorème d'encadrement

Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq x_n \leq v_n$  et si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite  $l$ , alors la suite  $(x_n)$  est convergente vers  $l$ .

## 2.4 Suites extraites

• La suite  $(v_n)$  est dite extraite de la suite  $(u_n)$  s'il existe une application  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , strictement croissante, telle que  $v_n = u_{\varphi(n)}$ .

On dit aussi que  $(v_n)$  est une sous-suite de  $(u_n)$ .

• Si une suite possède une limite (finie ou infinie), toutes ses suites extraites possèdent la même limite.



*Si une suite extraite de  $(u_n)$  diverge, ou si deux suites extraites ont des limites différentes, alors  $(u_n)$  diverge.*

*Si des suites extraites de  $(u_n)$  convergent toutes vers la même limite  $l$ , on peut conclure que  $(u_n)$  converge vers  $l$  si tout  $u_n$  est un terme d'une des suites extraites étudiées. Par exemple, si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers  $l$ , alors  $(u_n)$  converge vers  $l$ .*

## 2.5 Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

## 2.6 Caractérisation séquentielle de certaines propriétés

### • Partie dense de $\mathbb{R}$

Une partie  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, tout réel est limité d'une suite d'éléments de  $A$ . Comme, en particulier,  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , tout réel est la limite d'une suite de nombres rationnels.

### • Borne supérieure

Si  $A$  est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de  $\mathbb{R}$ , il existe une suite d'éléments de  $A$  de limite  $\sup A$  (resp.  $+\infty$ ).

## 3. Suites monotones

### 3.1 Définition

La suite  $(u_n)$  est croissante si  $u_{n+1} \geq u_n$  pour tout  $n$  ;

décroissante si  $u_{n+1} \leq u_n$  pour tout  $n$  ;

stationnaire si  $u_{n+1} = u_n$  pour tout  $n$  ;

monotone si elle est croissante ou si elle est décroissante ;

Avec des inégalités strictes, on définit de même : strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone.



### 3.2 Théorème de la limite monotone

Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.

Toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.

Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers  $+\infty$ .

Si une suite est décroissante et non minorée, elle diverge vers  $-\infty$ .

On peut donc résumer : toute suite monotone possède une limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

### 3.3 Suites adjacentes

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes si :

$$(u_n) \text{ est croissante ; } (v_n) \text{ est décroissante ; } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.



*Si  $(u_n)$  croissante,  $(v_n)$  décroissante et  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n$ , alors elles convergent vers  $l_1$  et  $l_2$ . Il reste à montrer que  $l_1 = l_2$  pour qu'elles soient adjacentes.*

## 4. Suites complexes

Soit  $z_n = x_n + iy_n$ . La définition de la convergence de  $(z_n)$  vers  $l = a + ib$  est la même que pour les suites réelles, en remplaçant la valeur absolue par le module. Elle est équivalente à la convergence à la fois de  $(x_n)$  vers  $a$  et de  $(y_n)$  vers  $b$ .

Les opérations algébriques sur les limites de suites convergentes sont les mêmes que dans le cas de suites réelles. Le théorème de Bolzano-Weierstrass se prolonge.



*Attention,  $\leq$  n'a aucun sens dans  $\mathbb{C}$ . N'inventez donc pas de théorèmes relatifs aux relations d'ordre.*

## 5. Exemples de suites

### 5.1 Suites arithmétiques

Une suite  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $r$  si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Terme général :  $u_n = u_0 + nr$  ou  $u_n = u_1 + (n-1)r$ .

$$\text{Somme des } n \text{ premiers termes : } \sum_{k=0}^{n-1} u_k = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^n u_k = n \frac{u_1 + u_n}{2}.$$

### 5.2 Suites géométriques

Une suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q \neq 0$  si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = q u_n.$$

Terme général :  $u_n = u_0 q^n$ .

$$\begin{aligned} \text{Somme des } n \text{ premiers termes : } \sum_{k=0}^{n-1} u_k &= u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1 \\ &= n u_0 \quad \text{si } q = 1. \end{aligned}$$

La suite  $(u_n)$  converge vers 0 si  $|q| < 1$ . Elle est stationnaire si  $q = 1$ . Elle diverge dans les autres cas.

### 5.3 Suites arithmético-géométriques

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = a u_n + b.$$

Si  $a = 1$ , elle est arithmétique de raison  $b$ .

Si  $a \neq 1$ ,  $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$  est géométrique de raison  $a$ .

## 5.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

- Une telle suite est déterminée par une relation du type :

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

et la connaissance des deux premiers termes  $u_0$  et  $u_1$ .

L'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation (1) est un espace vectoriel de dimension

2. On en cherche une base par la résolution de l'équation caractéristique :

$$a r^2 + b r + c = 0 \quad (E).$$

- Cas  $a, b, c$  complexes

Si  $\Delta \neq 0$ , (E) a deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ . Toute suite vérifiant (1) est alors du type :

$$u_n = K_1 r_1^n + K_2 r_2^n$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont des constantes que l'on exprime ensuite en fonction de  $u_0$  et  $u_1$ .

Si  $\Delta = 0$ , (E) a une racine double  $r_0 = -\frac{b}{2a}$ . Toute suite vérifiant (1) est alors du type :

$$u_n = (K_1 + K_2 n) r_0^n.$$

- Cas  $a, b, c$  réels

Si  $\Delta \geq 0$ , la forme des solutions n'est pas modifiée.

Si  $\Delta < 0$ , (E) a deux racines complexes conjuguées  $r_1 = \alpha + i\beta$  et  $r_2 = \alpha - i\beta$  que l'on écrit sous forme trigonométrique  $r_1 = \rho e^{i\theta}$  et  $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ . Toute suite vérifiant (1) est alors du type :

$$u_n = \rho^n (K_1 \cos n\theta + K_2 \sin n\theta) = \rho^n A \cos(n\theta - \varphi).$$

## 5.5 Exemples de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour étudier une telle suite, on détermine d'abord un intervalle  $I$  contenant toutes les valeurs de la suite.

- **Limite éventuelle**

Si  $(u_n)$  converge vers  $l$  et si  $f$  est continue en  $l$ , alors  $f(l) = l$ .

- **Cas  $f$  croissante**

Si  $f$  est croissante sur  $I$ , alors la suite  $(u_n)$  est monotone.

La comparaison de  $u_0$  et de  $u_1$  permet de savoir si elle est croissante ou décroissante. Mais vous devez le démontrer, par récurrence bien sûr.

- **Cas  $f$  décroissante**

Si  $f$  est décroissante sur  $I$ , alors les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones et de sens contraire.

On cherche ensuite si elles sont adjacentes ou non. Mais vous devez le démontrer, par récurrence bien sûr.

**Sauriez-vous répondre ?**

**Exercice 1 :** Montrez que la suite définie par  $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$  est bornée.

**Exercice 2 :** Montrez que la suite définie par  $v_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$  n'est pas bornée.

**Exercice 3 :** Montrez que la suite définie par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$  converge vers 1.

**Exercice 4 :** Montrez que la suite définie par  $u_n = \cos\left(n \frac{\pi}{3}\right)$  est bornée et divergente.

**Exercice 5 :** Montrez que les suites définies par  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$  sont adjacentes.

**Exercice 6 :** Montrez que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par leurs premiers termes tels que  $0 < u_0 < v_0$  et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

sont adjacentes.

**Exercice 7 :** Montrez que la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0 \quad ; \quad u_0 = 1 \quad u_1 = 0,5$$

a pour terme général :  $u_n = \cos\left(n \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(n \frac{2\pi}{3}\right)$ .

**Exercice 8 :** Montrez que la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0,5$  et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n^2 + 0,1875$$

converge vers  $l = 0,25$ .

## 8

# Intégrales définies

## 1. Intégrale d'une fonction en escalier

### 1.1 Subdivision

On appelle subdivision  $\sigma$  de  $[a, b]$ , la donnée d'un nombre fini de points  $x_0, \dots, x_n$  tels que  $x_0 = a, x_n = b$ , et  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$ .

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble de toutes les subdivisions de  $[a, b]$ .

Le pas d'une subdivision  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  est le nombre :  $\max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$ .

### 1.2 Fonction en escalier

Une fonction  $f$ , définie sur  $[a, b]$ , est une fonction en escalier sur  $[a, b]$  s'il existe  $\sigma \in \mathcal{S}$  telle que  $f$  soit constante, et égale à  $l_i$ , sur chaque intervalle ouvert  $]x_i, x_{i+1}[$ .

### 1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

On appelle intégrale de la fonction en escalier  $f$ , le nombre :

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} l_i (x_{i+1} - x_i) \quad \text{noté aussi} \quad \int_a^b f(t) dt.$$



Remarquez que le nombre  $I(f)$  est en fait une somme d'aires de rectangles et qu'il ne dépend pas de la valeur de  $f$  aux points  $x_i$  de la subdivision.

## 2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

### 2.1 Fonction continue par morceaux

Une fonction  $f$ , définie sur  $[a, b]$ , est continue par morceaux sur  $[a, b]$  s'il existe  $\sigma \in \mathcal{S}$  telle que :

- $f$  est continue sur chaque intervalle ouvert  $]x_i, x_{i+1}[$  ;
- $f$  admet en tout point de la subdivision une limite à gauche et une limite à droite finies.

$f$  est continue par morceaux sur un intervalle  $I$  si sa restriction à tout segment inclus dans  $I$  est continue par morceaux.

### 2.2 Approximation par une fonction en escalier

Soit  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b]$ .

Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\varphi$  et  $\psi$ , fonctions en escalier sur  $[a, b]$ , telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

### 2.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b]$ . Il existe un réel unique  $I$  tel que, pour toutes fonctions en escalier sur  $[a, b]$   $\varphi \leq f \leq \psi$ , on ait :

$$I(\varphi) \leq I \leq I(\psi).$$

Ce nombre  $I$  s'appelle l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$ , et se note  $\int_a^b f(x) dx$ , ou  $\int_{[a,b]} f$ .

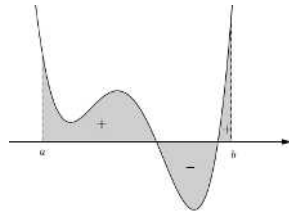
Ce nombre dépend de  $f$ , de  $a$ , de  $b$ , mais pas de la variable d'intégration, notée ici  $x$ , qui est une variable muette, ce qui signifie qu'on peut la noter par toute lettre non retenue pour un autre usage.

Pour  $a < b$ , on pose  $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$ .

## 2.4 Interprétation géométrique

$\int_a^b f(x) dx$  correspond à l'aire du domaine du plan situé sous le graphique de  $f$ , comptée

- positivement pour la partie située au-dessus de l'axe des abscisses,
- négativement pour la partie située en dessous.



## 3. Propriétés d'une intégrale

$f$  et  $g$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continues par morceaux sur les intervalles considérés.

### 3.1 Invariance

L'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  ne change pas si l'on modifie la valeur de  $f$  sur  $[a, b]$  en un nombre fini de points.

### 3.2 Linéarité

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

### 3.3 Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

### 3.4 Relation d'ordre

- Si  $a < b$ , et si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$ , alors :  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .
- Si  $f$  est continue et positive sur  $[a, b]$ , on a :

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \iff \forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0.$$

### 3.5 Majoration de l'intégrale

- Valeur absolue :

$$\text{Si } a < b \quad \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

- Si, pour tout  $x \in [a, b]$  (avec  $a < b$ ), on a  $m \leq f(x) \leq M$ , alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M.$$

Le nombre  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$  est la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$ .

- Inégalité de la moyenne :

$$\text{Si } a < b \quad \left| \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)| \, dx.$$

En particulier :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq |b-a| \sup |f|.$$

### 3.6 Sommes de Riemann

Si  $f$  est continue sur  $[a; b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Les sommes de Riemann, dont on considère la limite, sont des sommes d'aires de rectangles dont un côté est obtenu en subdivisant  $[a; b]$  en  $n$  segments de même longueur, et l'autre en considérant la valeur de  $f$  sur le bord de gauche de chaque segment.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Déterminez la limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n \operatorname{ch} x \, dx$ .

**Exercice 2 :** Déterminez la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

# 9 Calcul de primitives

## 1. Primitives d'une fonction continue

### 1.1 Définition

$f$  étant définie sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , une fonction  $F$ , définie sur  $I$ , est une primitive de  $f$ , si elle est dérivable sur  $I$  et si :

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x).$$

### 1.2 Théorèmes

- Deux primitives de  $f$  diffèrent d'une constante, c'est-à-dire que, si  $F$  est une primitive de  $f$  sur un intervalle  $I$ , toutes les primitives de  $f$  sur  $I$  sont de la forme :  $x \mapsto F(x) + C$  où  $C$  est une constante quelconque.

- Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  contenant  $a$ , la fonction  $F$  définie sur  $I$  par  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , est une primitive de  $f$ . C'est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

On note  $\int f(t) dt$  l'une quelconque des primitives de  $f$ .

- Pour toute primitive  $h$  de  $f$  sur  $I$ , on a :

$$\int_a^x f(t) dt = [h(t)]_a^x = h(x) - h(a).$$

Le calcul d'intégrales de fonctions continues se ramène donc à la recherche de primitives.

- Pour toute fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $I$ , on a :

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$


## 2. Primitives usuelles

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$e^{\lambda x} \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$
$\cos x$	$\sin x$	$\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$-\ln  \cos x $
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\ln x$	$x \ln x - x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\cot x$	$\ln  \sin x $

## 3. Méthodes de calcul

### 3.1 Linéarité

Si  $F$  et  $G$  sont des primitives respectives de  $f$  et de  $g$  sur  $I$  et  $k$  un réel, alors, sur  $I$ ,  $F + G$  est une primitive de  $f + g$  et  $kF$  une primitive de  $kf$ .

 Pour les fonctions trigonométriques, on linéarise avec les formules de transformation de produits en sommes (cf. fiche 6), ou avec les formules d'Euler (cf. fiche 19). On utilise en particulier :

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) & ; & \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \\ \cos^3 x &= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x) & ; & \quad \sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x).\end{aligned}$$

### 3.2 Intégration par parties

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$ , et  $a$  et  $b$  des réels de  $I$ . On a :

$$\int_a^b u'(t) v(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt.$$

ce qui s'écrit aussi, en terme de primitives :

$$\int u'(t) v(t) dt = u(t) v(t) - \int u(t) v'(t) dt.$$

### 3.3 Cas classiques d'utilisation

$P$  étant un polynôme et  $\alpha \neq 0$ ,

- pour  $\int_a^b P(t) \sin(\alpha t + \beta) dt$ , on pose  $v(t) = P(t)$  et  $u'(t) = \sin(\alpha t + \beta)$ ;
- pour  $\int_a^b P(t) \cos(\alpha t + \beta) dt$ , on pose  $v(t) = P(t)$  et  $u'(t) = \cos(\alpha t + \beta)$ ;
- pour  $\int_a^b P(t) e^{\alpha t + \beta} dt$ , on pose  $v(t) = P(t)$  et  $u'(t) = e^{\alpha t + \beta}$ ;
- pour  $\int_a^b P(t) \ln t dt$ , on pose  $v(t) = \ln t$  et  $u'(t) = P(t)$ .
- Pour calculer  $I = \int_a^b e^{\alpha t} \cos \beta t$  ou  $J = \int_a^b e^{\alpha t} \sin \beta t$ , on peut faire deux intégrations par parties « sans changer d'avis », c'est-à-dire en posant les deux fois  $v(t) = e^{\alpha t}$ , ou les deux fois  $v(t) = \cos \beta t$  ou  $\sin \beta t$ . Mais il est plus rapide d'utiliser l'exponentielle complexe.

### 3.4 Intégration par changement de variable

Soit  $u$  une fonction de classe  $C^1$  de  $[\alpha, \beta]$  dans  $[a, b]$ , et  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx.$$

Si, de plus,  $u$  est bijective, on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t)) u'(t) dt.$$





Dans les exercices, le symbole  $dx$  se transforme comme une différentielle :

$$x = u(t) \implies dx = u'(t) dt.$$

### 3.5 Primitives d'une fonction rationnelle

- On décompose la fraction rationnelle en éléments simples dans  $\mathbb{R}[X]$ , c'est-à-dire comme somme de sa partie entière (polynôme dont on connaît les primitives) et de fractions de la forme :

$$\frac{a}{(x - \alpha)^n} \quad \text{et} \quad \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^n} \quad \text{avec} \quad p^2 - 4q < 0.$$

On peut en calculer des primitives comme suit ( $n = 1$  dans le second cas).

- Sur un intervalle ne contenant pas  $\alpha$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{dt}{(t - \alpha)^n} &= \left[ -\frac{1}{n-1} \frac{1}{(t - \alpha)^{n-1}} \right]_a^x \quad \text{si } n \neq 1 \\ &= \left[ \ln |t - \alpha| \right]_a^x \quad \text{si } n = 1. \end{aligned}$$

- $\int_a^x \frac{at + b}{t^2 + pt + q} dt = \frac{a}{2} \int_a^x \frac{2t + p}{t^2 + pt + q} dt + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int_a^x \frac{1}{t^2 + pt + q} dt.$

La première primitive se calcule en utilisant le changement de variable  $u = t^2 + pt + q$ .

En écrivant sous forme canonique le trinôme  $t^2 + pt + q$ , le calcul de la deuxième primitive se ramène, après changement de variable, à :

$$\int_a^\beta \frac{1}{u^2 + 1} du = \left[ \arctan u \right]_a^\beta.$$

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** À l'aide d'une intégration par parties, déterminez une primitive de la fonction définie par  $\arctan x$ .

**Exercice 2 :** En utilisant l'exponentielle complexe, déterminez une primitive de la fonction définie par  $e^{2x} \sin 3x$ .

**Exercice 3 :** Utilisez le changement de variable  $u = \frac{1}{2}t - 1$  pour calculer :

$$I = \int_1^3 \frac{-1}{4t - t^2} dt.$$

**Exercice 4 :** En utilisant le changement de variable  $u = \sin x$ , calculez l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x} dx.$$

## 1. Comparaison de deux suites quand $n$ tend vers l'infini

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites.

### 1.1 Définitions

- On dit que  $(u_n)$  est **dominée** par  $(v_n)$  s'il existe  $A > 0$  tel que  $|u_n| \leq A |v_n|$  pour tout  $n$  à partir d'un certain rang.

notation :  $u_n = O(v_n)$  (lire  $u_n$  grand O de  $v_n$ ).

Si  $v_n$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang, cela signifie que  $\frac{u_n}{v_n}$  est bornée.

- On dit que  $(u_n)$  est **négligeable** devant  $(v_n)$ , ou que  $(v_n)$  est **prépondérante** devant  $(u_n)$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $n_0$  tel que l'on ait  $|u_n| \leq \varepsilon |v_n|$  pour tout  $n \geq n_0$ .

notation :  $u_n = o(v_n)$  (lire  $u_n$  petit O de  $v_n$ ).

Si  $v_n$  ne s'annule pas pour tout  $n \geq n_0$ , cela signifie :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{u_n}{v_n} \right) = 0.$$

- On dit que  $u_n$  et  $v_n$  sont **équivalentes** si on a  $u_n - v_n = o(v_n)$ .

Si  $g$  ne s'annule pas pour tout  $n \geq n_0$ , cela signifie :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{u_n}{v_n} \right) = 1.$$

notation :  $u_n \sim_{+\infty} v_n$  ou  $u_n \sim_{+\infty} v_n$ .

La relation  $\sim_{+\infty}$  est transitive. Si l'on sait que  $u_n \sim_{+\infty} v_n$  et  $v_n \sim_{+\infty} w_n$ , on en déduit que  $u_n \sim_{+\infty} w_n$ .

### 1.2 Exemples fondamentaux

Pour  $k > 1, \alpha > 0, \beta > 0$ , on a :

$$k^n = o(n!) \quad ; \quad n^\alpha = o(k^n) \quad ; \quad (\ln n)^\beta = o(n^\alpha).$$

### 1.3 Propriétés des suites équivalentes

Pour calculer la limite d'une suite, on peut remplacer une suite par une suite équivalente dans un produit, un quotient, une puissance.



Attention à ne pas effectuer un tel remplacement dans une somme, ni dans une fonction composée.

### 1.4 Formule de Stirling

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left[1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

## 2. Comparaison de deux fonctions au voisinage d'un point

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$ , et  $x_0$  un point, fini ou infini, appartenant à  $I$ , ou extrémité de  $I$ .

### 2.1 Définitions

- On dit que  $f$  est **dominée** par  $g$  au voisinage de  $x_0$  s'il existe  $A > 0$  tel que  $|f(x)| \leq A |g(x)|$  pour tout  $x$  d'un voisinage  $J$  de  $x_0$ .

notation :  $f = O(g)$  (lire  $f$  grand O de  $g$ ).

Si  $g$  ne s'annule pas sur  $J$ , cela signifie que  $\frac{f}{g}$  est bornée sur  $J$ .

- On dit que  $f$  est **négligeable** fonction négligeable @négligeable devant  $g$ , ou que  $g$  est **prépondérante** devant  $f$ , au voisinage de  $x_0$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $J$  de  $x_0$  tel que l'on ait  $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$  pour tout  $x$  de  $J$ .

notation :  $f = o(g)$  (lire  $f$  petit O de  $g$ ).

Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $x_0$ , cela signifie :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0.$$

- On dit que  $f$  et  $g$  sont **équivalentes** au voisinage de  $x_0$ , si on a  $f - g = o(g)$ .

Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $x_0$ , cela signifie :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = 1.$$

notation :  $f \sim_{x_0} g$  ou  $f \sim g$ .

La relation  $\sim$  est transitive. Si on sait que  $f \sim_{x_0} g$  et  $g \sim_{x_0} h$ , on en déduit que  $f \sim_{x_0} h$ .

### 2.2 Exemples fondamentaux

Au voisinage de  $+\infty$ , on a :

$$(\ln x)^\alpha = o(x^\beta) \text{ et } x^\beta = o(e^{\gamma x}) \text{ où } \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0.$$

Au voisinage de 0, on a :

$$|\ln x|^\alpha = o(x^\beta) \text{ où } \alpha > 0 \text{ et } \beta < 0.$$

### 2.3 Propriétés des fonctions équivalentes

Si  $f_1 \sim_{x_0} g_1$  et  $f_2 \sim_{x_0} g_2$ , alors  $f_1 f_2 \sim_{x_0} g_1 g_2$  et  $\frac{f_1}{f_2} \sim_{x_0} \frac{g_1}{g_2}$ .

Si  $f \sim_{x_0} g$  et si  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ , alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .



Des deux théorèmes précédents, il résulte que, lorsque l'on a à chercher la limite d'un produit ou d'un quotient, on peut remplacer chacune des fonctions par une fonction équivalente, choisie pour simplifier le calcul.

Mais attention à ne pas effectuer un tel remplacement dans une somme, ni dans une fonction composée.

## 2.4 Équivalents classiques

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\underset{0}{\sim} x & ; & \quad \sin x \underset{0}{\sim} x & \quad ; & \quad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} ; \\ \ln(1+x) &\underset{0}{\sim} x & ; & \quad \tan x \underset{0}{\sim} x & \quad ; & \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x. \end{aligned}$$

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Montrez que la suite de terme général  $u_n = \frac{x^n}{n!}$  est absolument convergente vers 0 pour tout  $x$ .

**Exercice 2 :** Déterminez, si elle existe, la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$ .

# 11

## Formules de Taylor

### 1. Formules de Taylor à valeur globale

#### 1.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$ ,  $x_0$  et  $x$  des points de  $I$ . On a :

$$f(x) = P_n(x) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt ,$$

$$\text{où } P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

est l'approximation de Taylor à l'ordre  $n$  ;

$$\text{et } R_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \text{ est le reste intégral d'ordre } n.$$

#### 1.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$ . On suppose de plus qu'il existe  $A > 0$  tel que, pour tout  $x \in I$ , on ait  $|f^{(n+1)}(x)| \leq A$ .

On obtient alors la majoration du reste :

$$|R_n(x)| \leq A \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} .$$

## 2. Étude locale des fonctions dérivables

#### 2.1 Formule de Taylor-Young

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$  jusqu'à l'ordre  $n$ . Alors la fonction  $\varepsilon$  définie au voisinage de 0 par :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

est telle que  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ .

#### 2.2 Développements limités

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $x_0$ . On dit que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$ , s'il existe une fonction polynôme  $P_n$  de degré inférieur ou égal à  $n$ , et une fonction  $\varepsilon$ , définies au voisinage de  $x_0$  telles que :

$$f(x) = P_n(x) + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

$P_n(x)$  est la partie régulière et  $(x-x_0)^n \varepsilon(x)$  le reste.

Dans ce cas, on a des fonctions équivalentes :  $f(x) \underset{x_0}{\sim} P_n(x)$ .



En posant  $x = x_0 + h$ , on peut toujours se ramener au voisinage de  $h = 0$ .

## 2.3 Propriétés des développements limités

### • Troncature

Si  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 dont la partie régulière est

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ et si } p \leq n, \text{ alors } f \text{ admet un développement limité d'ordre } p \text{ au voisinage}$$

de 0 dont la partie régulière est  $P_p(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$ .

### • Unicité

Si  $f$  possède un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0, il est unique.

### • Parité

Soit  $f$  une fonction admettant un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0, de partie

régulière  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Si  $f$  est paire (resp. impaire), alors les coefficients  $a_k$  d'indice impair (resp. pair) sont nuls.

### • Obtention d'un développement limité

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir de nombreux développements limités.



*Mais si  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  ( $n \geq 2$ ) au voisinage de  $x_0$ , elle n'admet pas forcément de dérivée seconde en  $x_0$ .*

## 2.4 Développements limités de base

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

avec les cas particuliers :

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\alpha = -1 \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1} x^{2p+1} + o(x^{2p+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

## 2.5 Opérations sur les développements limités

Considérons deux fonctions  $f$  et  $g$  admettant des développements limités de même ordre  $n$  au voisinage de 0, de parties régulières respectives  $A_n$  et  $B_n$ .

### • Combinaison linéaire

Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels, alors  $\lambda f + \mu g$  admet un développement limité au voisinage de 0 dont la partie régulière est  $\lambda A_n + \mu B_n$ .

### • Produit

$fg$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0, dont la partie régulière est formée des termes de degré inférieur ou égal à  $n$  du produit  $A_n B_n$ .

### • Quotient

Si  $B_n(0) \neq 0$  (soit  $g(0) \neq 0$ ),  $\frac{f}{g}$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0,

dont la partie régulière est obtenue à partir de  $A_n(x) \times \frac{1}{B_n(x)}$  en utilisant le développement

limité de  $\frac{1}{1+u}$  au voisinage de 0.

### • Composition


Si  $g \circ f$  est définie au voisinage de 0 et si  $f(0) = 0$ , alors  $g \circ f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0, dont la partie régulière s'obtient en remplaçant  $u$  dans  $B_n(u)$  par  $A_n(x)$  et en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

### • Primitive

Si  $f$  est continue, une primitive  $F$  de  $f$  admet le développement limité d'ordre  $n+1$ , au voisinage de 0, obtenu par intégration terme à terme de  $A_n(x)$ , le terme constant étant  $F(0)$ .

### • Dérivée

Si  $f$  admet des dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  ( $n \geq 2$ ) sur un intervalle ouvert  $I$  contenant 0, la fonction  $f'$  admet un développement limité d'ordre  $n-1$  dont la partie régulière s'obtient en dérivant terme à terme celle du développement limité de  $f$ .

 Dans les opérations sur les fonctions, l'ordre des développements limités intermédiaires doit être choisi de façon cohérente. À chaque étape, examinez si le terme suivant aurait eu de l'influence sur votre résultat.

Pour prévoir l'ordre d'un développement, il est aussi intéressant de mettre les développements limités sous forme normalisée où la première puissance de  $x$  à coefficient non nul est mise en facteur.

### 3. Applications des développements limités

#### 3.1 Recherche de limites

Pour obtenir une fonction équivalente à  $f(x)$  au voisinage de  $x_0$ , on peut calculer un développement limité de  $f(x_0 + h)$  pour  $h$  voisin de 0, et retenir le premier terme non nul.

#### 3.2 Allure locale d'une courbe

Si on peut écrire le développement limité au voisinage de  $x_0$  :

$$f(x_0 + h) = a + b h + c h^k + o(h^k) \text{ avec } c \neq 0,$$

la courbe représentative de  $f$  admet au point d'abscisse  $x_0$  une tangente dont une équation est  $y = a + b(x - x_0)$ .

La position (locale) de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par le signe de  $c h^k = c(x - x_0)^k$ .

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Déterminez le développement limité à l'ordre  $n + 1$ , au voisinage de 0, de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \ln \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right)$ .

**Exercice 2 :** Déterminez :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ .



# 12 Équations différentielles linéaires

## 1. Équations différentielles linéaires du premier ordre

### 1.1 Définition

Elles sont de la forme :

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (1)$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions données, continues sur un intervalle  $I$ , à valeurs réelles ou complexes.

### 1.2 Théorèmes dus à la linéarité

- Toute solution de (1) est de la forme  $y_P(x) + y_S(x)$  où  $y_P(x)$  est une solution particulière de (1) et  $y_S(x)$  la solution générale de l'équation homogène associée :

$$y' + a(x)y = 0 \quad (2)$$

- Les solutions complexes de (2) forment un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1.

- Principe de superposition

En additionnant une solution particulière de :

$$y' + a(x)y = b_1(x)$$

et une solution particulière de :

$$y' + a(x)y = b_2(x)$$

on obtient une solution particulière de :

$$y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$$

### 1.3 Résolution de l'équation homogène associée

Les solutions de l'équation (2) sont du type :

$$y_S(x) = K e^{-A(x)} \quad \text{où } A(x) = \int_{x_0}^x a(u) du \text{ est une primitive de } a(x)$$

avec  $K$  constante arbitraire et  $x_0$  élément quelconque de  $I$ .

### 1.4 Recherche d'une solution particulière de (1) par la méthode de Lagrange

$y_1$  étant une solution non nulle de (2), on introduit une fonction auxiliaire inconnue  $K(x)$  telle que  $y(x) = K(x)y_1(x)$  soit solution de (1).

Ceci conduit à  $K'(x) = \frac{b(x)}{y_1(x)}$  ce qui permet de calculer  $K(x)$  puis  $y(x)$ .

Cette méthode s'appelle aussi *méthode de variation de la constante*.

### 1.5 Résolution de l'équation (1) par la méthode du facteur intégrant

Considérons  $A(x)$  une primitive de  $a(x)$ , et multiplions les deux membres de l'équation donnée par  $e^{A(x)}$ . L'équation devient :

$$e^{A(x)} y'(x) + e^{A(x)} a(x) y(x) = \left( e^{A(x)} y(x) \right)' = e^{A(x)} b(x).$$

Après un calcul de primitive, on aboutit à :

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} b(x) dx.$$

## 2. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

### 2.1 Définition

Elles sont de la forme :

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (1)$$

où  $a$  et  $b$  sont des scalaires et  $f$  une fonction continue, à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 2.2 Théorèmes dus à la linéarité

- Toute solution de (1) est de la forme  $x_P(t) + x_S(t)$  où  $x_P(t)$  est une solution particulière de (1) et  $x_S(t)$  la solution générale de l'équation homogène associée :

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (2)$$

- Les solutions complexes de (2) forment un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2.

- **Principe de superposition**

En additionnant une solution particulière de :

$$y'' + ay' + by = f_1(x)$$

et une solution particulière de :

$$y'' + ay' + by = f_2(x)$$

on obtient une solution particulière de :

$$y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$$

### 2.3 Résolution de l'équation homogène associée

La fonction  $x \mapsto e^{rx}$  est solution de (2) si, et seulement si,  $r$  vérifie l'équation caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0,$$

ce qui conduit à calculer  $\Delta = a^2 - 4b$ .

- Si  $\Delta \neq 0$ , l'équation caractéristique a deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ . On a alors :

$$y_S(x) = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x},$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont des constantes quelconques.

- Si  $\Delta = 0$ , l'équation caractéristique a une racine double  $r_0$ . On a alors :


$$y_S(x) = (K_1 x + K_2) e^{r_0 x},$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont des constantes quelconques.

- Si  $a$  et  $b$  sont réels et si  $\Delta < 0$ , l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées  $\alpha \pm i\beta$ . On a alors :

$$y_S(x) = e^{\alpha x} (K_1 \cos \beta x + K_2 \sin \beta x),$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont des constantes réelles quelconques.

 En physique, on utilise la forme :

$$K_1 \cos \beta x + K_2 \sin \beta x = A \cos(\beta x - \varphi)$$

avec  $A = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$ ,  $\cos \varphi = \frac{K_1}{A}$  et  $\sin \varphi = \frac{K_2}{A}$  ( $A$  est une amplitude et  $\varphi$  un déphasage).

## 2.4 Recherche d'une solution particulière dans quelques cas

### • Cas où $f(x)$ est un polynôme $P(x)$ de degré $n$

Il existe une solution particulière de (1) sous la forme d'un polynôme de degré

$$n \quad \text{si } b \neq 0;$$

$$n + 1 \quad \text{si } b = 0 \text{ et } a \neq 0;$$

$$n + 2 \quad \text{si } a = b = 0.$$

La recherche de cette solution se fait par identification.

### • Cas où $f(x) = e^{kx} P(x)$ avec $P$ polynôme et $k$ constante

On effectue le changement de fonction inconnue

$$y(x) = e^{kx} z(x)$$

où  $z$  est une nouvelle fonction inconnue. En reportant  $y$ ,  $y'$  et  $y''$  dans (1), on est conduit à une équation en  $z$  du type précédent.

### • Cas où $f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x P(x)$ ou $f(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x P(x)$ avec $\alpha$ et $\beta$ réels, et $P$ polynôme à coefficients réels

Une solution particulière est la partie réelle, ou la partie imaginaire, de la solution particulière obtenue pour l'équation de second membre  $e^{(\alpha+i\beta)x} P(x)$ .

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Sur un intervalle ne contenant pas 0, résolvez :  $x^3 y' + 3x^2 y = 0$ .

**Exercice 2 :** Sur un intervalle ne contenant pas 0, utilisez la méthode de variation de la constante pour résoudre :  $x^3 y' + 3x^2 y = 1$ .

**Exercice 3 :** Sur un intervalle ne contenant pas 0, utilisez la méthode du facteur intégrant pour résoudre :  $x^3 y' + 3x^2 y = 1$ .

**Exercice 4 :** Résolvez l'équation différentielle :  $y'' - 2y' + y = 2x^2 - 8x + 5$ .

**Exercice 5 :** Résolvez l'équation différentielle :  $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$ .

# 13 Séries numériques

## 1. Séries à termes réels ou complexes

### 1.1 Définitions

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels ou complexes. On note  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

On dit que la série de terme général  $u_n$  est convergente lorsque la suite  $(S_n)$  est convergente vers  $S$ . Sinon, on dit qu'elle est divergente.

Dans le cas d'une série convergente, on note  $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ .

On dit que  $S$  est la somme de la série, que  $S_n$  est la somme partielle d'ordre  $n$  et que  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  est le reste d'ordre  $n$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $S = S_n + R_n$  et il est équivalent de dire que la série  $\sum u_n$  converge ou que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ .

### 1.2 Lien suite et série

Une suite  $(u_n)$  converge si, et seulement si, la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge.

### 1.3 Condition nécessaire de convergence

Si la série  $\sum u_n$  converge, alors le terme général  $u_n$  tend vers 0.



*Si le terme général  $u_n$  ne tend pas vers 0, alors la série  $\sum u_n$  diverge. On parle de divergence grossière.*

### 1.4 Espace vectoriel des séries convergentes

Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent et ont pour sommes respectives  $U$  et  $V$  alors, pour tous nombres  $a$  et  $b$ , la série  $\sum (au_n + bv_n)$  est convergente et a pour somme  $aU + bV$ .

### 1.5 Cas des séries complexes

Soit  $u_n = a_n + ib_n$  avec  $a_n \in \mathbb{R}$  et  $b_n \in \mathbb{R}$ . La série complexe  $\sum u_n$  converge si, et seulement si, les deux séries réelles  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  convergent, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

### 1.6 Séries géométriques

La série de terme général (réel ou complexe)  $u_n = aq^n$  est convergente (absolument) si, et seulement si,  $|q| < 1$  et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = a \frac{1}{1-q}.$$

## 2. Séries à termes positifs

### 2.1 Caractérisation

Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent et ont pour sommes respectives  $U$  et  $V$  alors, pour tous nombres  $a$  et  $b$ , la série  $\sum (au_n + bv_n)$  est convergente et a pour somme  $aU + bV$ .

### 2.2 Théorème de comparaison

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries telles que  $0 \leq u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang.

Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge.

Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge.

### 2.3 Utilisation d'équivalents

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes  $> 0$  telles que  $u_n \sim_{+\infty} v_n$ .

Les deux séries sont alors de même nature, c'est-à-dire qu'elles sont convergentes ou divergentes en même temps.



*Ce théorème s'applique aussi à des séries à termes  $< 0$ , mais il n'est pas vrai pour des séries quelconques.*

### 2.4 Comparaison d'une série à une intégrale d'une fonction monotone

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0; +\infty[$  et croissante. On a alors :

$$\int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx$$

d'où l'on déduit l'encadrement :

$$\int_0^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx$$

qui permet d'étudier la nature de la série  $\sum f(k)$  à l'aide d'un calcul d'intégrales.

### 2.5 Séries de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

En particulier, la série divergente  $\sum \frac{1}{n}$  est appelée *série harmonique*.

### 3. Convergence absolue

#### 3.1 Définition

Si  $\sum |u_n|$  converge, on dit que  $\sum u_n$  est absolument convergente.

#### 3.2 Théorème

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente et sa somme vérifie :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$



*La réciproque est fausse.*

### 4. Représentation décimale des réels

Pour tout  $x \in [0; 1]$ , il existe une unique suite d'entiers  $(a_n)$  de  $\llbracket 0; 9 \rrbracket$  telle que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \times 10^{-n} \text{ converge vers } x.$$

Un nombre réel est décimal si, et seulement si, son développement décimal ne comporte que des 0 à partir d'un certain rang.

Un nombre réel est rationnel si, et seulement si, son développement décimal est périodique.

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Étudiez la convergence de la série de terme général :  $u_n = \frac{2n+1}{3n+3}$ .

**Exercice 2 :** Quelle est la nature de la série de terme général  $u_n = \ln \left( \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)$  ?

**Exercice 3 :** Étudiez la convergence de la série de terme général :  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \left( \frac{1}{n} \right)$ .

# 14 Rudiments de logique

## 1. Proposition logique

C'est un assemblage de lettres et de signes qui a une syntaxe correcte (le lecteur sait le lire), une sémantique correcte (le lecteur comprend ce qu'il lit) et qui a une seule valeur de vérité : vrai (V) ou faux (F).

Deux propositions seront considérées comme égales si elles ont toujours la même valeur de vérité.

## 2. Connecteurs logiques

À partir de propositions  $p, q, \dots$  on peut former de nouvelles propositions définies par des tableaux de vérité.

- **Négation** : non  $p$  (noté aussi  $\neg p$ )

$p$	non $p$
V	F
F	V

- **Conjonction** :  $p$  et  $q$  (noté aussi  $p \wedge q$ )
- **Disjonction** :  $p$  ou  $q$  (noté aussi  $p \vee q$ )
- **Implication** :  $p \implies q$
- **Équivalence** :  $p \iff q$

$p$	$q$	$p$ et $q$	$p$ ou $q$	$p \implies q$	$p \iff q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V



Le ou a un sens inclusif, à ne pas confondre avec le sens exclusif qui figure dans «fromage ou dessert».

## 3. Propriétés des connecteurs

$$\text{non} (\text{non } p) = p$$

$$\text{non} (p \text{ ou } q) = (\text{non } p) \text{ et } (\text{non } q)$$

$$\text{non} (p \text{ et } q) = (\text{non } p) \text{ ou } (\text{non } q)$$

$$(p \implies q) = [(\text{non } p) \text{ ou } q]$$

$$\text{non} (p \implies q) = [p \text{ et } (\text{non } q)]$$




La négation d'une implication n'est donc pas une implication.

$$(p \Rightarrow q) = [( \text{non } q) \Rightarrow ( \text{non } p)]$$

 Cette seconde implication est la **contraposée** de la première. Faites attention à l'ordre des propositions.

$$(p \Longleftrightarrow q) = [(p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow p)]$$

 Pour démontrer une équivalence, on démontre souvent une implication et sa réciproque.

## 4. Quantificateurs

### 4.1 Notation

Les quantificateurs servent à indiquer la quantité d'éléments qui interviennent dans une proposition. On utilise :

le quantificateur universel  $\forall$

$\forall x$  signifie : pour tout  $x$  ;

le quantificateur existentiel  $\exists$

$\exists x$  signifie : il existe au moins un  $x$ .

### 4.2 Ordre

Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance. On peut permuter les quantificateurs dans des écritures du type :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad p(x, y)$$

$$\exists x \in E \quad \exists y \in E \quad p(x, y)$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important.

Dans l'écriture  $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad p(x, y)$   $y$  dépend de  $x$ .

Dans l'écriture  $\exists y \in E \quad \forall x \in E \quad p(x, y)$   $y$  est indépendant de  $x$ .

### 4.3 Négation


La négation de «  $\forall x \in E \quad x \text{ vérifie } p$  » est «  $\exists x \in E$  tel que  $x$  ne vérifie pas  $p$  ».

La négation de «  $\exists x \in E \quad x \text{ vérifie } p$  » est «  $\forall x \in E \quad x \text{ ne vérifie pas } p$  ».

## 5. Quelques méthodes de démonstration

### 5.1 Dédution

Si  $p$  est vraie et si l'on démontre  $p \Rightarrow q$ , alors on peut conclure que  $q$  est vraie.

 Si la démonstration d'une implication vous résiste, pensez à examiner la contraposée. Elle a le même sens, mais il est possible que sa démonstration soit plus facile.




## 5.2 Raisonnement par analyse-synthèse

Quand on a démontré  $p \Rightarrow q$ , on peut dire qu'on a fait l'analyse du problème. On dit que  $p$  est une **condition suffisante** pour que  $q$  soit vraie.

Quand on a démontré  $q \Rightarrow p$ , on peut dire qu'on a fait la synthèse du problème. On dit que  $p$  est une **condition nécessaire** pour que  $q$  soit vraie.

## 5.3 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer que  $p$  est vraie, on peut supposer que  $p$  est fausse et en déduire une contradiction.

 Comme vous partez de non  $p$ , ne vous trompez pas dans la négation, en particulier en ce qui concerne les quantificateurs.

## 5.4 Disjonction des cas

Elle est basée sur :

$$\left[ (p \Rightarrow q) \text{ et } (\text{non } p \Rightarrow q) \right] \Rightarrow q$$

## 5.5 Exemples et contre-exemples

Beaucoup de propositions mathématiques sont de type universel. Dans ce cas,

- un exemple est une illustration, mais ne démontre rien,
- un contre-exemple est une démonstration que la proposition est fausse.

## 5.6 Raisonnement par récurrence

- Soit  $E(n)$  un énoncé qui dépend d'un entier naturel  $n$ .

Si  $E(0)$  est vrai, et si, quel que soit  $k \geq 0$ , l'implication  $E(k) \Rightarrow E(k+1)$  est vraie, alors l'énoncé  $E(n)$  est vrai pour tout entier  $n$ .

- Ce principe a diverses variantes, par exemple :

si  $E(0)$  est vrai, et si, quel que soit  $k \geq 0$ , l'implication

$$\left[ E(0) \text{ et } E(1) \text{ et } \dots \text{ et } E(k) \right] \Rightarrow E(k+1)$$

est vraie, alors l'énoncé  $E(n)$  est vrai pour tout entier  $n$ .

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Exprimez sur le mode affirmatif une phrase synonyme d'une ancienne publicité : « Si vous n'êtes pas moderne, alors vous n'êtes pas client de la Société Générale ».

**Exercice 2 :** Exprimez la négation de la proposition : « Dans la partie commerciale de toute ville, à chaque carrefour il y a au moins une agence bancaire ».

**Exercice 3 :** Démontrez que  $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnel.

**Exercice 4 :** Montrez que pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a :  $\min(x, y) = \frac{1}{2} [x + y - |x - y|]$ .

**Exercice 5 :** Démontrez par récurrence que :  $\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{1}{3} n (4n^2 - 1)$ .

# 15 Ensembles

## 1. Notion d'ensemble

La notion d'ensemble est considérée comme primitive. Retenons que la caractérisation d'un ensemble  $E$  doit être nette, c'est-à-dire que, pour tout élément  $x$ , on doit pouvoir affirmer ou bien qu'il est dans  $E$  ( $x \in E$ ), ou bien qu'il n'y est pas ( $x \notin E$ ).

On note  $\emptyset$  l'ensemble vide, c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient aucun élément.

$E$  et  $F$  étant des ensembles, on dit que  $E$  est inclus dans  $F$  si, et seulement si, tous les éléments de  $E$  appartiennent aussi à  $F$ . On note  $E \subset F$ .

On dit aussi que  $E$  est une partie de  $F$ , ou que  $F$  contient  $E$ .

L'ensemble des parties de  $E$  se note  $\mathcal{P}(E)$ . Dire que  $A \in \mathcal{P}(E)$  signifie que  $A \subset E$ .

## 2. Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit  $E$  un ensemble.  $A$  et  $B$  étant des parties de  $E$ , on définit :

- Le **complémentaire** de  $A$  dans  $E$  :

$$\bar{A} = \{x \in E ; x \notin A\} \quad \text{noté aussi } E \setminus A \text{ ou } {}^c_E A.$$

- L'**intersection** de  $A$  et de  $B$  :

$$A \cap B = \{x \in E ; x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Si  $A \cap B = \emptyset$ , c'est-à-dire s'il n'existe aucun élément commun à  $A$  et  $B$ , on dit que les parties  $A$  et  $B$  sont disjointes.

- La **réunion** de  $A$  et de  $B$  :

$$A \cup B = \{x \in E ; x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Ce «ou» a un sens inclusif c'est-à-dire que  $A \cup B$  est l'ensemble des éléments  $x$  de  $E$  qui appartiennent à l'une au moins des parties  $A$  et  $B$ .

- La **différence ensembliste** :

$$A \setminus B = \{x \in E ; x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \bar{B}.$$

- La **différence symétrique** :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B).$$

$A \Delta B$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une, et une seule, des parties  $A$  et  $B$ .

## 3. Propriétés des opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Pour toutes parties  $A$ ,  $B$  et  $C$  de  $E$ , on a les propriétés qui suivent.

- **Complémentaire**

$$\bar{\bar{E}} = \emptyset \quad ; \quad \bar{\emptyset} = E \quad ; \quad \bar{\bar{A}} = A \quad ; \quad \text{si } A \subset B \text{ alors } \bar{B} \subset \bar{A}.$$

- **Lois de de Morgan**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad ; \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

- **Réunion**

$$A \cup B = B \cup A \quad ; \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cup A = A \quad ; \quad A \cup \emptyset = A \quad ; \quad A \cup E = E.$$

- **Intersection**

$$A \cap B = B \cap A \quad ; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap A = A \quad ; \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad ; \quad A \cap E = A.$$

- **Réunion et intersection**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

## 4. Produit cartésien

Le produit des ensembles  $A$  et  $B$  est l'ensemble, noté  $A \times B$ , des couples  $(a, b)$  où  $a \in A$  et  $b \in B$ .



*Attention, le couple  $(b, a)$  est différent du couple  $(a, b)$ , sauf si  $a = b$ .*

Plus généralement, le produit cartésien de  $n$  ensembles  $E_i$  est :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \ ; \ x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}.$$

Si  $E_1 = \cdots = E_n = E$ , on le note  $E^n$ .

## 5. Recouvrement, partition

- Un **recouvrement** d'une partie  $A$  de  $E$  est une famille de parties de  $E$  dont la réunion contient  $A$ .
- Une **partition** d'un ensemble  $E$  est une famille de parties non vides de  $E$ , deux à deux disjointes, et dont la réunion est  $E$ .

# 16 Applications

## 1. Généralités

### 1.1 Définitions

Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est définie par son ensemble de départ  $E$ , son ensemble d'arrivée  $F$ , et son graphe  $\Gamma$ .

$\Gamma$  est une partie de  $E \times F$  telle que, pour tout  $x \in E$ , il existe un seul couple  $(x, y) \in \Gamma$ . L'élément  $y$  est l'image de  $x$  par  $f$ . On le note  $f(x)$ .

L'application  $f$  se note :  $E \xrightarrow{f} F$  ou  $f : \begin{matrix} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{matrix}$ .

Les applications de  $E$  dans  $F$  forment un ensemble noté  $\mathcal{F}(E, F)$  ou  $F^E$ .

L'application identique de  $E$  est l'application de  $E$  dans  $E$  définie par  $x \mapsto x$ . On la note  $\text{Id}_E$ .

### 1.2 Famille indexée

Soit  $E$  et  $I$  deux ensembles. On appelle famille d'éléments de  $E$  indexée par  $I$  toute application de  $I$  dans  $E$ .

### 1.3 Fonction indicatrice d'une partie

#### • Définition

Soit  $A$  une partie de  $E$ . La fonction indicatrice (ou fonction caractéristique) de  $A$  est la fonction  $\mathbb{K}_A$  de  $E$  dans  $E$  définie par :

$$\mathbb{K}_A(x) = 1 \quad \text{si } x \in A \quad ; \quad \mathbb{K}_A(x) = 0 \quad \text{si } x \notin A.$$

#### • Théorème

$$\mathbb{K}_{E \setminus A} = 1 - \mathbb{K}_A \quad ; \quad \mathbb{K}_{A \cap B} = \mathbb{K}_A \mathbb{K}_B \quad ; \quad \mathbb{K}_{A \cup B} = \mathbb{K}_A + \mathbb{K}_B - \mathbb{K}_A \mathbb{K}_B.$$

### 1.4 Restriction, prolongement

Soit  $f$  une fonction de  $A$  dans  $F$ , et  $g$  une fonction de  $B$  dans  $F$ .

Si  $A \subset B$  et si, pour tout  $x$  de  $A$ , on a  $f(x) = g(x)$ , on dit que  $f$  est une **restriction** de  $g$ , ou que  $g$  est un **prolongement** de  $f$ .

### 1.5 Composition des applications

Soit  $E, F, G$  trois ensembles,  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ ,  $g$  une application de  $F$  dans  $G$ . La **composée** de  $f$  et de  $g$  est l'application de  $E$  dans  $G$  définie par :

$$x \mapsto g(f(x)).$$

On la note  $g \circ f$ . La composition des applications est associative.

## 2. Images directe et réciproque

### 2.1 Définitions

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

- Si  $A \subset E$ , on appelle **image** (directe) de  $A$  par  $f$ , la partie de  $F$  constituée par les images des éléments de  $A$  :

$$f(A) = \{f(x) ; x \in A\}.$$

- Si  $B \subset F$ , on appelle **image réciproque** de  $B$ , la partie de  $E$  constituée par les  $x$  dont l'image est dans  $B$  :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}.$$



*Attention à ne pas confondre avec la réciproque d'une bijection. Ici, on ne suppose rien sur  $f$ .*

### 2.2 Théorèmes

$$A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2) ; B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) ; f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) ; f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

## 3. Applications injectives, surjectives, bijectives

### 3.1 Définitions

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

- $f$  est dite **injective** (ou est une injection) si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$



*Ne confondez pas avec la définition d'une application qui s'écrit :*

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad x = x' \implies f(x) = f(x')$$

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) \neq f(x') \implies x \neq x'.$$

- $f$  est dite **surjective** (ou est une surjection) si tout élément  $y$  de  $F$  est l'image d'au moins un élément  $x$  de  $E$ , soit :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

- $f$  est dite **bijjective** (ou est une bijection) si elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, tout élément  $y$  de  $F$  est l'image d'un, et un seul, élément  $x$  de  $E$ . À tout  $y$  de  $F$ , on associe ainsi un  $x$  unique dans  $E$  noté  $f^{-1}(y)$ .  $f^{-1}$  est la bijection réciproque de  $f$ . On a donc :

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x),$$

ce qui entraîne  $f \circ f^{-1} = Id_F$  et  $f^{-1} \circ f = Id_E$ .

### 3.2 Théorèmes

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ , et  $g$  une application de  $F$  dans  $G$ . On a les implications qui suivent.

- Si  $f$  et  $g$  sont injectives, alors  $g \circ f$  est injective.
- Si  $g \circ f$  est injective, alors  $f$  est injective.
- Si  $f$  et  $g$  sont surjectives, alors  $g \circ f$  est surjective.
- Si  $g \circ f$  est surjective, alors  $g$  est surjective.
- Si  $f$  et  $g$  sont bijectives, alors  $g \circ f$  est bijective, et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sin x$ .

Déterminez  $f(\{0\})$  et  $f^{-1}(\{0\})$ .

**Exercice 2 :** Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (X, Y)$  avec :

$$\begin{cases} X &= x + y \\ Y &= 2x + y^3 \end{cases}$$

$f$  est-elle surjective ? injective ?

# 17 Relations

## 1. Relation binaire

### 1.1 Définition

Choisir une partie  $\Gamma$  de  $E \times E$ , c'est définir une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $E$ . Si  $(x, y) \in \Gamma$ , on dit que  $x$  et  $y$  sont en relation, et on note  $x\mathcal{R}y$ .

### 1.2 Propriétés

Une relation binaire  $\mathcal{R}$ , définie sur un ensemble  $E$ , est :

- **réflexive** si elle vérifie :  $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$  ;
- **symétrique** si  $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$  ;
- **antisymétrique** si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :  
$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y,$$
$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } x \neq y) \implies \text{non } (y\mathcal{R}x).$$
- **transitive** si elle vérifie :  
$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z.$$



Attention, l'antisymétrie n'est pas le contraire de la symétrie. L'égalité est à la fois symétrique et antisymétrique. Une relation peut n'être ni symétrique, ni antisymétrique.

## 2. Relation d'équivalence

### 2.1 Définition

Une relation binaire  $\mathcal{R}$ , définie sur un ensemble  $E$ , est une relation d'équivalence si elle est, à la fois, réflexive, symétrique et transitive.

### 2.2 Classes d'équivalence

- Si  $x \in E$ , on appelle classe d'équivalence de  $x$ , modulo  $\mathcal{R}$ , l'ensemble des  $y$  de  $E$  tels que  $x\mathcal{R}y$ .
- L'ensemble des classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  constitue une partition de  $E$ .
- Réciproquement, si on se donne une partition de  $E$ , la relation «  $x$  et  $y$  appartiennent au même élément de la partition » est une relation d'équivalence.

### 2.3 Exemples

- Si  $f$  est une application de  $E$  dans  $F$ , la relation binaire  $x\mathcal{R}x'$  définie par  $f(x) = f(x')$  est une relation d'équivalence dans  $E$ .

Les classes d'équivalence sont les images réciproques  $f^{-1}(\{y\})$  des parties à un élément de  $f(E)$ .

- **Congruence dans  $\mathbb{Z}$**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La relation binaire dans  $\mathbb{Z}$  :

$aRb \iff n \text{ divise } a - b \iff a \text{ et } b \text{ ont le même reste dans la division par } n$   
est une relation d'équivalence. On la note  $a \equiv b \pmod{n}$  ; lire :  $a$  congrue à  $b$  modulo  $n$ .

• **Congruence dans  $\mathbb{R}$**

Soit  $r \in \mathbb{R}^*$ . La relation binaire dans  $\mathbb{R}$  :

$$aRb \iff a - b = kr \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

est une relation d'équivalence.



*Vous connaissez déjà les congruences modulo  $2\pi$  dans la mesure des angles.*

### 3. Relation d'ordre

#### 3.1 Définitions

• Une relation binaire  $\mathcal{R}$ , définie sur un ensemble  $E$ , est une relation d'ordre si elle est, à la fois, réflexive, antisymétrique et transitive.  
Notons la  $<$ .

• Une relation d'ordre  $<$  dans  $E$  est dite relation d'ordre total si deux éléments quelconques  $x$  et  $y$  de  $E$  sont toujours comparables, c'est-à-dire si l'on a  $x < y$  ou  $y < x$ .

Dans le cas contraire, l'ordre est partiel.

#### 3.2 Exemples

$\leq$  est un ordre total dans  $\mathbb{R}$ .  $\subset$  est un ordre partiel dans  $\mathcal{P}(E)$ .

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1** : Dans  $]0; +\infty[$ , montrez que la relation  $\mathcal{R}$  définie par :

$$xRy \iff x \ln y = y \ln x$$

est une relation d'équivalence. Pour chaque  $x$ , précisez le nombre d'éléments de sa classe d'équivalence.

**Exercice 2** : Dans  $\mathbb{R}^2$ , on définit la relation binaire :

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \iff x_1 \leq y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2$$

Montrez qu'il s'agit d'une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?



## 1. Sommes et produits

### 1.1 Notations

Dans  $\mathbb{R}$ , considérons une famille d'éléments  $a_1, \dots, a_n$ .

On note cette famille  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ , la somme des termes  $\sum_{i=1}^n a_i$  ou  $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$ , le produit des termes

$$\prod_{i=1}^n a_i \text{ ou } \prod_{1 \leq i \leq n} a_i.$$

Lorsque l'indice décrit, non plus  $\{1, \dots, n\}$ , mais un ensemble fini  $I$ , on note de même  $(a_i)_{i \in I}$ ,

$$\sum_{i \in I} x_i, \prod_{i \in I} x_i.$$

En particulier, on utilise souvent  $I = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$  avec un indice noté  $i, j$ , ou  $ij$ .

### 1.2 Quelques propriétés

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i + y_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i + \sum_{1 \leq i \leq n} y_i \quad ; \quad \sum_{1 \leq i \leq n} (kx_i) = k \sum_{1 \leq i \leq n} x_i ;$$

$$\prod_{1 \leq i \leq n} (x_i y_i) = \prod_{1 \leq i \leq n} x_i \times \prod_{1 \leq i \leq n} y_i \quad ; \quad \prod_{1 \leq i \leq n} (kx_i) = k^n \prod_{1 \leq i \leq n} x_i ;$$

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} x_{ij} = \sum_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{1 \leq j \leq p} x_{ij} \right) = \sum_{1 \leq j \leq p} \left( \sum_{1 \leq i \leq n} x_{ij} \right)$$

### 1.3 Sommes usuelles

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} .$$

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{si } x \neq 1 \quad ; \quad \sum_{k=0}^n x^k = n+1 \quad \text{si } x = 1.$$



Dans cette dernière somme, n'oubliez pas la discussion sur  $x$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  
$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

## 2. Formule du binôme

## 2.1 Coefficients binomiaux

• Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $n!$  (lire : factorielle  $n$ ) comme le produit des  $n$  premiers nombres entiers. On pose aussi, par convention,  $0! = 1$  pour que les formules qui suivent n'aient pas d'exception.

• Le coefficient binomial  $\binom{n}{p}$  est défini par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

## 2.2 Propriétés

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} ; \binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} ; \binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p} \binom{n}{p-1}.$$

La relation  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$  permet de construire le triangle de Pascal.

## 2.3 Formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

# 3. Systèmes linéaires

## 3.1 Définitions

• Un système de  $n$  équations linéaires à  $p$  inconnues, à coefficients dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , est de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

Les coefficients  $a_{ij}$  et les seconds membres  $b_i$  sont des éléments donnés de  $K$ .

Les inconnues  $x_1, \dots, x_p$  sont à chercher dans  $K$ .

- Le système homogène associé est le système obtenu en remplaçant les  $b_i$  par 0.
- Une solution est un  $p$ -uplet  $(x_1, \dots, x_p)$  qui vérifie (S). Résoudre (S), c'est chercher toutes les solutions.

Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.

Deux systèmes sont équivalents s'ils ont les mêmes solutions.

## 3.2 Opérations élémentaires sur les lignes

- L'addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne se code :  $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ .
- La multiplication d'une ligne par un scalaire non nul se code :  $L_i \leftarrow \alpha L_i$  ;
- L'échange de deux lignes se code :  $L_i \leftrightarrow L_j$ .

## 3.3 Systèmes en escalier

• **Définition**

Un système  $(S)$  est en escalier, ou échelonné, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

• **Réduction**

Quand un système contient une équation du type :

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = b,$$

si  $b \neq 0$ , le système est impossible ;

si  $b = 0$ , on peut supprimer cette équation, ce qui conduit au système réduit.

### 3.4 Méthode du pivot de Gauss

En permutant éventuellement deux inconnues on peut supposer que la première colonne de coefficients n'est pas nulle.

En permutant deux lignes si nécessaire, on peut supposer  $a_{11} \neq 0$ .

Pour  $i > 1$ , les transformations  $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$  éliminent l'inconnue  $x_1$  dans les lignes autres que  $L_1$ .

Le terme  $a_{11}$  est le pivot de l'étape de l'algorithme.

En répétant le procédé, on aboutit à un système triangulaire.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Déterminez  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$ .

Déduisez-en une expression simplifiée de  $S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ .

**Exercice 2 :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculez  $\sum_{p=0}^n \left[ \binom{n}{p} \right]^2$ .

Vous pouvez :

- soit partir de  $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$  avec la formule du binôme,
- soit compter les parties à  $n$  éléments dans un ensemble à  $2n$  éléments (cf. fiche 36).

**Exercice 3 :** Résolvez le système linéaire :

$$(S) \begin{cases} 3x - 5y + z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 1 \\ 5x - 12y + 5z &= 1 \end{cases}$$

# 19 Nombres complexes

## 1. Forme algébrique

### 1.1 Définitions


Tout nombre complexe  $z$  s'écrit, de manière unique, sous la forme algébrique  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels,  $i$  étant un nombre complexe particulier tel que  $i^2 = -1$ .

Le réel  $x$  s'appelle la partie réelle de  $z$ , et se note  $\operatorname{Re}(z)$ .

Le réel  $y$  s'appelle la partie imaginaire de  $z$ , et se note  $\operatorname{Im}(z)$ .


Si  $y = 0$ , alors  $z$  est réel, d'où  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

Si  $x = 0$ , alors  $z$  est un imaginaire pur.

 En physique, on note  $z = x + jy$  pour ne pas confondre avec la notation d'une intensité.

### 1.2 Égalité

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

 Attention, il n'y a pas d'inégalités dans  $\mathbb{C}$ . N'écrivez jamais qu'un nombre complexe est positif, ou négatif. Cela n'aurait aucun sens.

### 1.3 Opérations dans $\mathbb{C}$

Soit  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$ . On définit l'addition et la multiplication dans  $\mathbb{C}$  par :

$$z + z' = (x + x') + i(y + y') \quad ; \quad zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

### 1.4 Plan complexe

Soit  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  un repère orthonormal du plan.

L'application qui, à tout nombre complexe  $z = x + iy$ , fait correspondre le point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  est une bijection.  $M$  est l'**image** de  $z$ , et  $z$  l'**affixe** de  $M$ .

L'affixe du vecteur  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$  est le nombre complexe  $z = \alpha + i\beta$ .


Si  $z_A$  et  $z_B$  sont les affixes de  $A$  et  $B$ , le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour affixe  $z_B - z_A$ .

La somme des nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs.

## 2. Conjugué d'un nombre complexe

### 2.1 Définition

Le conjugué du nombre complexe  $z = x + iy$  est le nombre complexe  $\bar{z} = x - iy$ .

 Attention, vérifiez bien que  $x$  et  $y$  sont réels.

### 2.2 Images

Les images des nombres complexes  $z$  et  $\bar{z}$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

## 2.3 Propriétés

$$\overline{\bar{z}} = z \quad ; \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad ; \quad \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z'} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} .$$

$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$  ;  $z$  est imaginaire pur si, et seulement si,  $z = -\bar{z}$ .

$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$  ;  $z$  est réel si, et seulement si,  $z = \bar{z}$ .

## 2.4 Application au calcul de $\frac{1}{z}$

Comme  $z\bar{z} = x^2 + y^2$  est réel, on obtient la forme algébrique de  $\frac{1}{z}$ , ou de  $\frac{z_1}{z_2}$ , en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

# 3. Forme trigonométrique

## 3.1 Module d'un nombre complexe

### • Définition

Le module de  $z = x + iy$  (où  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ ) est le nombre réel positif

$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ . On le note  $|z|$ , ou  $\rho$ , ou  $r$ .

Si  $M$  est l'affixe de  $z$ ,  $|z|$  est la longueur  $OM$ .

### • Propriétés

Le module d'un nombre complexe a les mêmes propriétés que la valeur absolue d'un nombre réel.

$$|z| = 0 \iff z = 0 \quad ; \quad |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad ; \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z| ;$$

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'| ;$$

$$|zz'| = |z| |z'| \quad ; \quad |z^n| = |z|^n \text{ pour } n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ si } z' \neq 0.$$

## 3.2 Forme trigonométrique

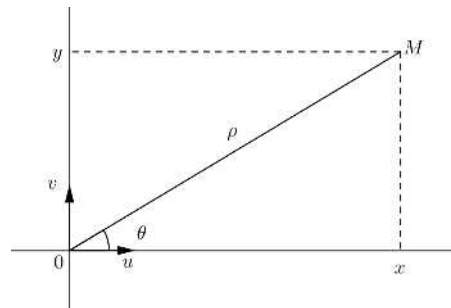
Tout nombre complexe non nul  $z$  s'écrit sous forme trigonométrique :

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \text{ avec } \rho > 0.$$

$\rho = |z|$  est le module de  $z$ .

$\theta$  est un argument de  $z$ . On le note  $\arg z$ . Il est défini, modulo  $2\pi$ , par :

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho} \text{ et } \sin \theta = \frac{y}{\rho} .$$



## 3.3 Propriétés de l'argument d'un nombre complexe non nul

Les égalités suivantes ont lieu à  $2k\pi$  près (avec  $k \in \mathbb{Z}$ ) :

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad ; \quad \arg(z^n) = n \arg z \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z};$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad ; \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'.$$

## 4. Équation du second degré

### 4.1 Résolution

- Pour résoudre une équation du second degré à coefficients complexes :

$$(E) \quad az^2 + bz + c = 0 \quad \text{avec } a \neq 0,$$

on calcule le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- On calcule les nombres complexes  $\pm\delta$  tels que  $\delta^2 = \Delta$ .

- Les racines sont :  $\frac{-b \pm \delta}{2a}$ .

### 4.2 Racine carrée d'un nombre complexe

- Pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe  $z = a + ib$ , il est commode de procéder par identification, c'est-à-dire de chercher les réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $(\alpha + i\beta)^2 = a + ib$ .

- L'égalité des parties réelles et des parties imaginaires donne :

$$\alpha^2 - \beta^2 = a \quad \text{et} \quad 2\alpha\beta = b.$$

- L'égalité des modules conduit à :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On en déduit  $\alpha^2$  et  $\beta^2$ , puis  $\alpha$  et  $\beta$  en utilisant le fait que  $\alpha\beta$  est du signe de  $b$ .

### 4.3 Somme et produit des racines

Les deux racines  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation (E) vérifient :

$$S = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad ; \quad P = z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$



*En cas de trou de mémoire, vous pouvez retrouver ces formules en partant de :*

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2),$$

*et en développant le second membre.*

## 5. Exponentielle complexe

### 5.1 Nombres complexes de module 1

L'ensemble  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1 a pour image dans le plan complexe le cercle trigonométrique.

Soit  $z \in \mathbb{U}$ . Si  $\theta$  est un argument de  $z$ , on a  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ .

On convient de noter  $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ .

### 5.2 Formule de Moivre

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

ce qui s'écrit avec la notation précédente :  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ .

### 5.3 Formules d'Euler

Pour tout réel  $x$  et tout entier  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} & ; & \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} ; \\ \cos nx &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} & ; & \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} . \end{aligned}$$



*On peut utiliser ces formules pour linéariser des polynômes trigonométriques.*

### 5.4 Exponentielle complexe

#### • Définition

On définit l'exponentielle du nombre complexe  $z = x + iy$  par :

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

#### • Équation $e^z = a$

Le nombre complexe  $e^z$  a pour module  $e^x$ , et pour argument  $y$ .

Si  $a$  est un nombre complexe non nul donné, les solutions  $z = x + iy$  de l'équation  $e^z = a$  vérifient donc :

$$e^x = |a| \quad \text{et} \quad y = \arg(a).$$

#### • Propriétés

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall z' \in \mathbb{C} \quad e^z e^{z'} &= e^{z+z'} . \\ \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (e^z)^n &= e^{nz} . \end{aligned}$$

Si  $z$  est une constante complexe et  $t$  une variable réelle, on a :  $\frac{d}{dt}(e^{zt}) = z e^{zt}$ .

$$e^z = e^{z'} \iff e^{z-z'} = 1 \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

### 5.5 Retrouver des formules de trigonométrie

• À partir de  $e^{ia} e^{ib} = e^{i(a+b)}$ , soit :

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$$

en égalant les parties réelles et les parties imaginaires, on retrouve :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad ; \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

• Transformation de  $a \cos t + b \sin t$

En posant  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ , le point  $\left(\frac{a}{A}; \frac{b}{A}\right)$  appartient au cercle trigonométrique.

Il existe donc un angle  $\varphi$  tel que :

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ; \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \dots$$

On obtient donc la transformation :

$$a \cos t + b \sin t = A \left[ \cos \varphi \cos t + \sin \varphi \sin t \right] = A \cos(t - \varphi).$$



*L'addition des deux signaux  $a \cos t$  et  $b \sin t$  est donc un signal d'amplitude  $A$  et de déphasage  $\varphi$ .*

## 6. Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe

### 6.1 Racines $n$ -ièmes de l'unité

#### • Description des racines

Soit  $\mathbb{U}_n$  l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de 1, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que  $z^n = 1$ . On a :

$$\mathbb{U}_n = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\} \quad \text{avec} \quad u_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = (u_1)^k.$$

#### • Propriété

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = 0.$$

### 6.2 Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe non nul

- Tout nombre complexe non nul  $a = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$  possède  $n$  racines  $n$ -ièmes :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{avec} \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

- À partir de l'une d'entre elles, on peut les obtenir toutes en la multipliant par les éléments de  $\mathbb{U}_n$ .

## 7. Nombres complexes et géométrie plane

### 7.1 Distances et angles

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points deux à deux distincts, d'affixes respectifs  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

- $|a - b|$  est la longueur  $AB$  ;  $\arg(b - a)$  est une mesure de l'angle  $(\vec{a}, \vec{AB})$ .
- $\frac{b - a}{c - a}$  a pour module  $\frac{AB}{AC}$  et pour argument une mesure de l'angle  $(\vec{AC}, \vec{AB})$ .



## 7.2 Applications

- Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés si, et seulement si,  $\frac{b-a}{c-a}$  est un réel.
- $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont orthogonaux si, et seulement si,  $\frac{b-a}{c-a}$  est un imaginaire pur.

## 7.3 Transformations géométriques

$a = a_1 + ia_2$  et  $b = b_1 + ib_2$  sont deux nombres complexes donnés.

- L'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C} : z \mapsto z + b$ , se traduit sur les images par la translation de vecteur  $b_1\vec{u} + b_2\vec{v}$ .
- Si  $a \neq 1$ , l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C} : z \mapsto az + b$ , se traduit sur les images par la similitude de rapport  $|a|$ , d'angle  $\arg a$ , et dont le centre  $\Omega$ , a pour affixe  $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ .

Cette transformation est la composée, dans n'importe quel ordre, de la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\arg a$ , et de l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $|a|$ .

- L'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C} : z \mapsto \bar{z}$ , se traduit sur les images par la symétrie axiale d'axe  $Ox$ .

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** On pose :  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  et  $z = z_1^3 z_2$ .

Écrivez  $z$  sous forme algébrique.

**Exercice 2 :** Reprenez l'exercice 1 et écrivez  $z$  sous forme trigonométrique.

Déduisez-en la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ .

**Exercice 3 :** Résolvez dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $(1 + i)z^2 - (7 + 13i)z + 2 + 60i = 0$ .

**Exercice 4 :** Calculez  $A = \sum_{k=0}^n \cos(kt)$ .

**Exercice 5 :** Calculez  $B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$ .

**Exercice 6 :** Soit  $a$  et  $b$  deux réels distincts et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Résolvez dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$(z - a)^n - (z - b)^n = 0 \quad (\text{E})$$

**Exercice 7 :** Déterminez l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que les images de  $1$ ,  $z$  et  $1 + z^2$  soient alignées.

**Exercice 8 :** Décrivez la transformation du plan qui associe au point  $M$  d'affixe  $z$  le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que  $3z' = iz + 1 + 3i$ .

## 1. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

### 1.1 Divisibilité

- Si  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , on dit que  $b$  divise  $a$  si, et seulement si, il existe  $q \in \mathbb{Z}$  tel que  $a = bq$ . On dit que  $a$  est un **multiple** de  $b$ , ou que  $b$  est un **diviseur** de  $a$ .
- La relation de divisibilité est une relation d'ordre partiel dans  $\mathbb{N}$ .

### 1.2 Nombres premiers

- Un entier  $p$  est premier si  $p \leq 2$ , et si ses seuls diviseurs sont 1 et  $p$ .
- Il y a une infinité de nombres premiers.
- Si  $n$  n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à  $\sqrt{n}$ , alors il est premier.
- Tout entier  $n$ , avec  $n \leq 2$ , s'écrit de façon unique comme produit de nombres premiers.



*Les nombres premiers jouent un grand rôle, en particulier en cryptologie. Le plus grand actuellement connu date de 2008 et comporte 12978189 chiffres. Mais tout record est destiné à être battu !*

### 1.3 Division euclidienne

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , il existe un élément unique  $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  tel que :

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b.$$

$q$  est le **quotient** et  $r$  le **reste** de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

## 2. PGCD

### 2.1 Définition

- Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls. L'ensemble des nombres de  $\mathbb{N}^*$  qui divisent à la fois  $a$  et  $b$ , admet un plus grand élément  $d$ , pour la relation d'ordre de divisibilité.

C'est le plus grand commun diviseur de  $a$  et de  $b$ . On le note  $\text{pgcd}(a, b)$ , ou  $a \vee b$ .

- Si  $a$  et  $b$  sont décomposés en produits de nombres premiers, leur  $\text{pgcd}$  est le produit de tous ces nombres premiers avec, pour chacun, la puissance la plus faible.
- La définition se généralise pour un nombre fini d'entiers.

### 2.2 Algorithme d'Euclide

Si  $q_1$  et  $r_1$  sont le quotient et le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ , on a :

$$a \vee b = b \vee r_1.$$

On recommence avec  $b$  et  $r_1$ . Le dernier reste non nul de ce processus est le  $\text{pgcd}$  de  $a$  et de  $b$ .

### 2.3 Nombres premiers entre eux

- Si  $a \vee b = 1$ , on dit que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.
- Si on considère un nombre fini d'entiers, on distingue :
  - premiers entre eux dans leur ensemble :  $a_1 \vee \dots \vee a_n = 1$  ;
  - premiers entre eux deux à deux :  $a_i \vee a_j = 1$  si  $i \neq j$ .
- Soit  $r = \frac{a}{b}$  un nombre rationnel. Si  $d$  désigne le pgcd de  $a$  et de  $b$ , on a  $a = da'$  et  $b = db'$ , avec  $a'$  et  $b'$  premiers entre eux. On peut alors écrire  $r = \frac{a'}{b'}$ . C'est la forme irréductible de  $r$ .

## 2.4 Relation de Bézout

Pour que deux entiers relatifs non nuls  $a$  et  $b$  soient premiers entre eux, il faut, et il suffit, qu'il existe  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que :

$$au + bv = 1.$$

On obtient  $u$  et  $v$  avec l'algorithme d'Euclide.

## 3. PPCM

### 3.1 Définition

- Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls. L'ensemble des nombres de  $\mathbb{N}^*$  qui sont multiples à la fois de  $a$  et de  $b$ , admet un plus petit élément  $m$ , pour la relation d'ordre de divisibilité.

C'est le plus petit commun multiple de  $a$  et de  $b$ . On le note  $\text{ppcm}(a, b)$ , ou  $a \wedge b$ .

- Si  $a$  et  $b$  sont décomposés en produits de nombres premiers, leur pgcd est le produit de tous ces nombres premiers avec, pour chacun, la puissance la plus élevée.

### 3.2 Théorème

$$(a \vee b) \times (a \wedge b) = |ab|.$$

### 3.3 Lemme de Gauss

Soit  $a, b, c$  trois entiers relatifs tels que  $a$  divise  $bc$ , et  $a$  premier avec  $b$ .

Alors  $a$  divise  $c$ .

## 4. Congruences

### 4.1 Définition

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La relation binaire dans  $\mathbb{Z}$  :

$$a \text{ et } b \text{ ont le même reste dans la division par } n \iff n/(a - b)$$

se note  $a \equiv b \pmod{n}$  ; lire :  $a$  congrue à  $b$  modulo  $n$ .

### 4.2 Opérations

Si  $a \equiv a_1 \pmod{n}$  et  $b \equiv b_1 \pmod{n}$ , alors :

$$a + b \equiv a_1 + b_1 \pmod{n} \quad ; \quad ab \equiv a_1 b_1 \pmod{n}.$$

### 4.3 Petit théorème de Fermat

Soit  $p$  un nombre premier. Pour tout entier  $a$ , on a :

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

## 5. Valuation p-adique

### 5.1 Définition

- Soit  $p$  un nombre premier et  $n$  un entier non nul. La valuation p-adique de  $n$  est le plus grand entier  $k$  tel que  $p$  divise  $n$ . On la note  $v_p(n)$ .
- Si  $n = 0$ , on convient que  $v_p(0) = +\infty$  pour tout nombre premier  $p$ .

### 5.2 Propriétés

- Si la décomposition de  $n \neq 0$  en facteurs premiers est  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ , alors  $v_{p_i}(n) = \alpha_i$  pour  $1 \leq i \leq k$  et  $v_p(n) = 0$  si  $p$  est distinct des  $p_i$ .
- Pour  $m$  et  $n$  entiers,  $m$  divise  $n$  si, et seulement si,  $v_p(m) \leq v_p(n)$  pour tout nombre premier  $p$ .
- Pour  $m$  et  $n$  entiers non nuls, on a :

$$\begin{aligned} v_p(m \vee n) &= \min(v_p(m), v_p(n)) \\ v_p(m \wedge n) &= \max(v_p(m), v_p(n)) \end{aligned}$$

## Sauriez-vous répondre ?

### Exercice 1

1. Démontrez que 143 et 100 sont premiers entre eux.
2. Déterminez tous les couples  $(u, v)$  d'entiers relatifs tels que :  
 $143u + 100v = 1.$

### Exercice 2

$a$  et  $b$  étant deux entiers naturels non nuls, on note  $d$  leur pgcd et  $m$  leur PPCM. Déterminez tous les couples  $(a, b)$  vérifiant le système :

$$\begin{cases} m &= d^2 \\ m + d &= 156 \\ a &\geq b \end{cases}$$

### Exercice 3

Quel est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de  $n = 2013^{2014}$  ?  
Quel est le dernier chiffre de cette écriture ?

## 1. Lois de composition interne

### 1.1 Définition

Une loi de composition interne sur un ensemble  $E$  est une fonction de  $E \times E$  dans  $E$ .

À un couple  $(x, y)$ , on associe donc un élément, noté  $x * y$ , ou  $x + y$ , ou  $xy$ , ..., appelé composé de  $x$  et de  $y$ .

### 1.2 Propriétés

- Une loi de composition interne  $*$  sur  $E$  est :

associative si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \quad (x * y) * z = x * (y * z);$$

commutative si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x * y = y * x.$$

Elle admet un élément neutre  $e$  si :

$$\forall x \in E \quad x * e = e * x = x.$$



*Attention,  $e$  ne dépend pas de  $x$ .*

Si l'élément neutre existe, il est unique.

- Un élément  $x$  est inversible, ou symétrisable, s'il existe  $x'$  tel que :

$$x * x' = x' * x = e.$$

$x'$  est dit alors inverse, ou symétrique, de  $x$ .

- Si  $*$  et  $\top$  sont deux lois de composition interne de  $E$ , on dit que  $*$  est distributive par rapport à  $\top$ , si l'on a toujours :

$$x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z) \quad \text{et} \quad (y \top z) * x = (y * x) \top (z * x).$$

## 2. Groupes

### 2.1 Définitions

- Un ensemble non vide  $G$ , muni d'une loi de composition interne  $*$ , est un groupe si :
  - la loi est associative ;
  - il existe un élément neutre  $e$  ;
  - tout élément de  $G$  possède un symétrique dans  $G$ .
- Si, de plus, la loi est commutative, on dit que le groupe est commutatif, ou abélien.
- Dans un groupe, tout élément est régulier (ou simplifiable), c'est-à-dire que l'on a toujours :

$$x * y = x * z \implies y = z \quad ; \quad y * x = z * x \implies y = z.$$

- Généralement, un groupe est noté additivement ou multiplicativement.

Le symétrique  $x'$  de  $x$  est alors noté  $-x$  dans le premier cas,  $x^{-1}$  dans le second.

Le composé de  $n$  fois le même élément  $x$  est alors noté  $nx$  dans le premier cas,  $x^n$  dans le second.

## 2.2 Exemples usuels

- Les ensembles de nombres  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  sont des groupes additifs.
- Les ensembles de nombres  $\mathbb{Q}^*$ ,  $\mathbb{Q}_+^*$ ,  $\mathbb{R}^*$ ,  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\mathbb{C}^*$  sont des groupes multiplicatifs.
- L'ensemble  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1 et l'ensemble  $\mathbb{U}_n$  des racines  $n$ -ièmes de l'unité sont des groupes multiplicatifs.

## 2.3 Sous-groupes

- Une partie stable  $H$  d'un groupe  $G$  est un sous-groupe de  $G$  si la restriction à  $H$  de la loi de  $G$  y définit une structure de groupe.
- Pour qu'une partie non vide  $H$  d'un groupe  $G$  soit un sous-groupe de  $G$ , il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \forall x \in H & \forall y \in H & xy \in H ; \\ \forall x \in H & x^{-1} \in H . \end{cases}$$

ou encore :

$$\forall x \in H \quad \forall y \in H \quad xy^{-1} \in H .$$

- Les sous-groupes du groupe additif  $\mathbb{Z}$  sont les ensembles :

$$n\mathbb{Z} = \{nx ; x \in \mathbb{Z}\} \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}.$$

- L'intersection d'une famille de sous-groupes est un sous-groupe de  $G$ .

## 3. Groupe symétrique

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments, avec  $n \geq 1$ .

### 3.1 Définitions

L'ensemble  $S_E$  des bijections de  $E$ , muni de la loi de composition des applications, est un groupe appelé groupe des permutations (ou substitutions) de  $E$ .

Le groupe des permutations de l'intervalle  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de  $\mathbb{N}$  est appelé groupe symétrique d'ordre  $n$  et noté  $S_n$ .

### 3.2 Décomposition d'une permutation en produit de cycles

#### • Définition

Un cycle (ou permutation circulaire) d'ordre  $p$  est une permutation  $\sigma$  de  $E$  qui laisse invariants  $n - p$  éléments de  $E$ , et telle que l'on puisse ranger les  $p$  éléments restants  $(a_1, \dots, a_p)$  de manière que :

$$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{p-1}) = a_p, \sigma(a_p) = a_1.$$

On note  $\sigma = (a_1, \dots, a_p)$ .

Les éléments  $\{a_1, \dots, a_p\}$  constituent le support de  $\sigma$ .

#### • Théorème

Toute permutation de  $E$  est décomposable en produit de cycles à supports disjoints, deux cycles quelconques étant permutables.

Cette décomposition est unique à l'ordre près.

### 3.3 Signature d'une permutation

#### • Transposition

On appelle transposition de  $E$  une permutation de  $E$  qui échange deux éléments de  $E$ , et qui laisse invariants tous les autres. C'est donc un cycle d'ordre 2.

#### • Parité d'une permutation

Toute permutation de  $E$  est décomposable en un produit de transpositions. Cette décomposition n'est pas unique, mais, pour une permutation donnée, la parité du nombre de transpositions est fixe.

Si ce nombre est pair, on dit que la permutation est paire.

Si ce nombre est impair, on dit que la permutation est impaire.

#### • Signature

La signature d'une permutation  $\sigma$  est le nombre, noté  $\varepsilon(\sigma)$ , égal à 1 si  $\sigma$  est paire, à  $-1$  si  $\sigma$  est impaire.



*Pour déterminer  $\varepsilon(\sigma)$ , la méthode la plus rapide consiste à décomposer  $\sigma$  en produit de cycles, en sachant qu'un cycle d'ordre  $p$  peut se décomposer en  $p - 1$  transpositions.*

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Démontrez que la réunion de deux sous-groupes de  $G$  est un sous-groupe de  $G$  si, et seulement si, l'un est inclus dans l'autre.

**Exercice 2 :** Déterminez la signature de la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 3 & 1 & 2 & 4 & 7 & 9 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

## 1. Structure d'anneau

### 1.1 Définition

Un ensemble  $A$ , muni d'une loi notée  $+$  (dite addition) et d'une loi notée  $\times$  (dite multiplication), possède une structure d'anneau pour ces opérations si :

- $A$  possède une structure de groupe commutatif pour l'addition ;
- La multiplication est associative et possède un élément neutre ;
- La multiplication est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition.

Si la multiplication est commutative, l'anneau est dit commutatif.

### 1.2 Exemples usuels.

Les ensembles de nombres  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  sont des anneaux pour les opérations habituelles.


### 1.3 Règles de calcul

$$x \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) = \sum_{i=1}^n x y_i \quad ; \quad \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) x = \sum_{i=1}^n y_i x.$$

Dans un anneau commutatif, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (\text{formule du binôme}),$$

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k.$$

 Si l'anneau n'est pas commutatif, ces formules restent vraies pour des éléments permutables, c'est-à-dire tels que  $xy = yx$ .

### 1.4 Sous-anneau

- On dit qu'une partie  $B$  d'un anneau  $A$ , stable pour  $+$  et  $\times$ , est un sous-anneau de  $A$ , si la restriction à  $B$  des deux lois de  $A$  y définit une structure d'anneau, avec le même élément neutre pour  $\times$  que dans  $A$ .
- Pour qu'une partie  $B$  d'un anneau  $A$  soit un sous-anneau de  $A$ , il faut et il suffit que  $1_A \in B$  et :

$$\forall x \in B \quad \forall y \in B \quad x - y \in B \quad \text{et} \quad xy \in B.$$



## 2. Structure de corps

### 2.1 Éléments inversibles d'un anneau

Si  $A$  est un anneau non réduit à  $\{0\}$ , l'ensemble de ses éléments inversibles (c'est-à-dire les éléments qui admettent un symétrique pour la multiplication) est un groupe multiplicatif.

### 2.2 Corps

Un corps est un anneau non réduit à  $\{0\}$  dont tous les éléments, sauf 0, sont inversibles. Il est dit commutatif si l'anneau est commutatif.

Dans cet ouvrage, tous les corps seront supposés commutatifs, sans avoir besoin de le préciser à chaque fois.

### 2.3 Sous-corps

On dit qu'une partie  $L$  d'un corps  $K$ , stable pour  $+$  et  $\times$ , est un sous-corps de  $K$ , si la restriction à  $L$  des deux lois de  $K$  y définit une structure de corps, c'est-à-dire si c'est un sous-anneau, et si l'inverse d'un élément non nul de  $L$  reste dans  $L$ .

Pour qu'une partie non vide  $L$  d'un corps  $K$  soit un sous-corps de  $K$ , il faut et il suffit que  $1 \in L$  et que :

$$\begin{cases} \forall x \in L \quad \forall y \in L & x - y \in L \quad \text{et} \quad xy \in L \\ \forall x \in L^* & x^{-1} \in L^* \end{cases} \quad \text{où } L^* = L \setminus \{0\}$$

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Soit  $A$  un anneau commutatif. On dit qu'un élément  $x$  est *nilpotent* s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x^n = 0$ .

- Montrez que, si  $x$  est nilpotent, alors  $1 - x$  est inversible.
- Montrez que, si  $x$  et  $y$  sont nilpotents, alors  $xy$  et  $x + y$  le sont aussi.

# 23 Polynômes

## 1. Généralités

### 1.1 Définitions

- Un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , est une suite de valeurs  $a_i$  de  $K$ , nulle à partir d'un certain rang  $p$ . Un tel polynôme se note  $P$ , ou  $P(X)$  :

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p.$$

Les nombres  $a_i$  sont les coefficients du polynôme  $P$ .

- Si  $P \neq 0$ , le plus grand entier  $p$  tel que  $a_p \neq 0$  est le **degré** du polynôme  $P$ . On le note  $d^\circ P$ , ou  $\deg P$ .

$a_p$  est le coefficient dominant de  $P$ . Lorsque  $a_p = 1$ , le polynôme est dit **unitaire**, ou normalisé.

- Pour le polynôme nul  $P = 0$ , on convient de poser  $d^\circ P = -\infty$ .
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans  $K$ , se note  $\mathbb{K}[X]$ .
- On note  $\mathbb{K}_n[X]$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

### 1.2 Structure algébrique

Soit  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  et  $Q = \sum_{j=0}^m b_j X^j$  deux éléments de  $\mathbb{K}[X]$ , et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- **Addition de deux polynômes**

$$P + Q = \sum_{k=0}^r c_k X^k \quad \text{avec } r = \max(m, n) \text{ et } c_k = a_k + b_k.$$

On a :  $d^\circ(P + Q) \leq \max(d^\circ P, d^\circ Q)$ . Si  $d^\circ P \neq d^\circ Q$ , il y a égalité.

- **Produit par un scalaire**

$$\lambda P = \sum_{i=0}^n (\lambda a_i) X^i. \quad \text{Si } \lambda \neq 0, \text{ on a : } d^\circ(\lambda P) = d^\circ P.$$

- **Produit de deux polynômes**

$$PQ = \sum_{k=0}^{m+n} d_k X^k \quad \text{avec } d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

On a :  $d^\circ(PQ) = d^\circ P + d^\circ Q$ .

- **Composé de deux polynômes**

Le polynôme composé de  $P$  et  $Q$  est :  $P \circ Q = \sum_{i=0}^n a_i Q^i$ . On a  $d^\circ(P \circ Q) = d^\circ P \times d^\circ Q$ .

On écrit souvent  $P(Q)$  au lieu de  $P \circ Q$ .

### 1.3 Fonctions polynomiales

$P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  étant un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ , la fonction polynomiale associée à  $P$  est l'application  $\tilde{P}$ , de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$ , définie par :

$$x \mapsto \tilde{P}(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$



Puisque  $\mathbb{K}$  est infini, vous pouvez confondre sans risque  $P$  et  $\tilde{P}$ .

## 2. Division dans $\mathbb{K}[X]$

### 2.1 Divisibilité

- Si  $A = BQ$  (avec  $Q \in \mathbb{K}[X]$ ), on dit que  $A$  est un **multiple** de  $B$ , ou que  $B$  est un **diviseur** de  $A$ .
- On dit que  $A$  et  $B$  sont des polynômes **associés** lorsque  $A = \lambda B$ , avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ .

### 2.2 Division euclidienne

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ , avec  $B \neq 0$ . Il existe des polynômes uniques  $Q$  et  $R$  dans  $\mathbb{K}[X]$ , tels que :

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad d^\circ R < d^\circ B.$$

On dit que  $Q$  est le **quotient**, et  $R$  le **reste**, dans la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

## 3. Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

### 3.1 Polynôme dérivé

- $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  étant un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ , son polynôme dérivé est :

$$P' = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}.$$

- Les propriétés de la dérivation des polynômes sont les mêmes que celles de la dérivation des fonctions.

### 3.2 Formule de Leibniz

$P$  et  $Q$  étant deux polynômes, la dérivée  $n$ -ième de leur produit est :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

### 3.3 Formule de Taylor polynomiale

Si  $P$  est de degré  $n$ , en écrivant la formule de Taylor jusqu'à l'ordre  $n$ , le reste (cf. fiche 11) est nul.

$$P = \sum_{i=0}^n \frac{P^{(i)}(a)}{i!} (X - a)^i$$

## 4. Racines d'un polynôme

### 4.1 Définition

- Les racines, ou zéros, d'un polynôme  $P$  sont les racines de l'équation  $\tilde{P}(x) = 0$ .
- Un zéro  $\alpha$  de  $P$  est dit d'ordre  $k$ , ou de multiplicité  $k$  (avec  $k \in \mathbb{N}^*$ ), si  $\alpha$  est racine d'ordre  $k$  de l'équation  $\tilde{P}(x) = 0$ . Cela signifie qu'il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P = (X - \alpha)^k Q$  avec  $Q(\alpha) \neq 0$ .

### 4.2 Caractérisation

- Un zéro  $\alpha$  de  $P$  est d'ordre au moins  $k$  si, et seulement si :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0.$$

- L'ordre est égal à  $k$  si, en plus,  $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$ .

### 4.3 Polynôme scindé

Un polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}[X]$  est scindé s'il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1, soit :

$$P = a_n \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{k_i}.$$

## 5. Décomposition d'un polynôme

### 5.1 Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  a au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .

On en déduit qu'un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ , de degré  $n$ , a exactement  $n$  racines dans  $\mathbb{C}$ , en comptant chaque racine autant de fois que son ordre de multiplicité.

### 5.2 Polynôme irréductible

Un polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}[X]$  est irréductible si  $d^\circ P \geq 1$ , et s'il n'est divisible que par les polynômes associés à 1 et à  $P$ .

### 5.3 Décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles

- Tout polynôme de degré  $\geq 1$  se factorise en un produit d'un élément de  $\mathbb{K}^*$  et de polynômes irréductibles unitaires.

Cette décomposition est unique, à l'ordre près.

- Dans  $\mathbb{C}[X]$ , les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.
- Dans  $\mathbb{R}[X]$ , les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1, et les polynômes  $aX^2 + bX + c$  avec  $b^2 - 4ac < 0$ .
- Si  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on peut le considérer dans  $\mathbb{C}[X]$ , et si  $\alpha$  est un zéro non réel de  $P$ , alors  $P$  admet aussi le conjugué  $\bar{\alpha}$  pour zéro, avec le même ordre de multiplicité que  $\alpha$ .

## 5.4 Relations entre les coefficients et les racines

Si  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  est de la forme ci-dessus, désignons par  $\sigma_p$  la somme des produits  $p$  à  $p$  des racines. On a la relation :

$$\sigma_p = (-1)^p \frac{a_{n-p}}{a_n}.$$

## 6. Polynôme d'interpolation de Lagrange

Soit  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  des éléments de  $\mathbb{K}$ , distincts deux à deux et des éléments  $(b_0, b_1, \dots, b_n)$  de  $\mathbb{K}$ .

Il existe un unique polynôme  $P$  de degré  $\leq n$  tel que :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P(a_i) = b_i.$$

Ce polynôme est :

$$P(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j \neq i} (x - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)} b_i.$$

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1** : Déterminez le reste de la division euclidienne de  $A_n = (\cos \alpha + \sin \alpha X)^n$  par  $(X^2 + 1)^2$ .

**Exercice 2** : Décomposez  $P = X^8 + X^4 + 1$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 3** : Déterminez trois nombres complexes dont la somme est 2, la somme des carrés 2, la somme des cubes 8.

## 1. PGCD

### 1.1 Définition

- Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes non nuls de  $K[X]$ . Tout diviseur commun à  $A$  et  $B$  de degré maximal est appelé *un* pgcd de  $A$  et de  $B$ .
- L'ensemble des diviseurs communs à  $A$  et à  $B$  est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs pgcd.
- Tous les pgcd sont associés. Un seul est unitaire. On le note  $A \vee B$ .

### 1.2 Algorithme d'Euclide

Si  $Q_1$  et  $R_1$  sont le quotient et le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ , on a :

$$A \vee B = B \vee R_1 .$$

On recommence avec  $B$  et  $R_1$  . Le dernier reste non nul (normalisé) de ce processus est le pgcd de  $A$  et de  $B$ .

### 1.3 Polynômes premiers entre eux

Si  $\text{pgcd}(A, B) = 1$ , on dit que  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux.

## 2. PPCM

### 2.1 Définition

- Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes non nuls de  $K[X]$ . Tout multiple commun à  $A$  et  $B$  de degré minimal est appelé *un* PPCM de  $A$  et de  $B$ .
- L'ensemble des multiples communs à  $A$  et à  $B$  est égal à l'ensemble des multiples d'un de leurs PPCM.
- Tous les PPCM sont associés. Un seul est unitaire. On le note  $A \wedge B$ .

### 2.2 Lien avec le pgcd

Si  $A$  et  $B$  sont unitaires, on a :

$$(A \vee B) \times (A \wedge B) = A B.$$

## 3. Théorèmes de Bézout et de Gauss

### 3.1 Relation de Bézout

- Pour que deux polynômes  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{K}[X]$  soient premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il existe deux polynômes  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{K}[X]$  tels que :

$$A U + B V = 1.$$

- Si  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux et non tous deux constants, il existe des polynômes  $U_0$  et  $V_0$  de  $\mathbb{K}[X]$  uniques tels que :

$$A U_0 + B V_0 = 1 \quad \text{avec} \quad d^\circ U_0 < d^\circ B \quad \text{et} \quad d^\circ V_0 < d^\circ A.$$

### 3.2 Lemme de Gauss

Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  tels que  $A$  divise  $BC$ , et  $A$  premier avec  $B$ , alors  $A$  divise  $C$ .

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Soit  $P = X^4 - 4X^3 + 16X - 16$ .

Déterminez le pgcd de  $P$  et de  $P'$ .

Déduisez-en la factorisation de  $P$  en polynômes irréductibles.

**Exercice 2 :** On considère dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes  $A = X^4 + 1$  et  $B = X^3 + 1$ .

1. Décomposez  $A$  et  $B$  en produit de polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Déterminez le pgcd de  $A$  et de  $B$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Trouvez tous les couples  $(U, V)$  de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  qui vérifient :

$$AU + BV = 1.$$

## 1. Décomposition en éléments simples

### 1.1 Définitions

- De façon analogue à un nombre rationnel quotient de deux entiers, on définit une fraction rationnelle  $\frac{A}{B}$  à partir des polynômes  $A$  et  $B \neq 0$ .
- On appelle **degré** de la fraction rationnelle  $F = \frac{A}{B}$ , le nombre  $d^\circ A - d^\circ B$ . On le note  $d^\circ F$ .
- $F = \frac{A}{B}$  étant une fraction rationnelle simplifiée, la fonction rationnelle associée à  $F$  est la fonction  $\tilde{F}$ , de  $K$  dans  $K$ , définie par :

$$x \mapsto \tilde{F}(x) = \frac{\tilde{A}(x)}{\tilde{B}(x)} \quad \text{quand } \tilde{B}(x) \neq 0.$$

$\tilde{F}$  n'est pas définie pour les zéros de  $B$ . Ce sont les **pôles** de  $F$ .

### 1.2 Forme générale de la décomposition

Une fraction rationnelle, de forme irréductible  $F = \frac{A}{B}$  (c'est-à-dire avec  $A$  et  $B$  premiers entre eux), s'écrit de façon unique, sous la forme :

$$F = E + \frac{R}{B} \quad \text{avec } d^\circ R < d^\circ B.$$

$E$  est la **partie entière**, et  $\frac{R}{B}$  la **partie fractionnaire** de  $F$ .

### 1.3 Partie polaire quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Si la factorisation de  $B$  en polynômes irréductibles comporte un terme  $(X - a)^k$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ , on appelle partie polaire de  $F$  relative à ce terme une somme d'éléments simples du type :

$$\frac{\alpha_k}{(X - a)^k} + \frac{\alpha_{k-1}}{(X - a)^{k-1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{X - a}.$$

Pour une fraction  $F$  donnée, les complexes  $\alpha_i$  existent et sont uniques.

### 1.4 Théorème de décomposition

Toute fraction rationnelle, écrite sous forme irréductible, est égale, de façon unique, à la somme de sa partie entière et des parties polaires relatives à chacun des facteurs irréductibles intervenant dans la décomposition de  $B$ .



## 2. Méthodes pratiques de décomposition

### 2.1 Plan d'étude

- On met  $F$  sous forme irréductible en simplifiant par le pgcd du numérateur et du dénominateur.
- On obtient  $E$  et  $R$  à l'aide de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .
- On factorise  $B$  en polynômes irréductibles.
- On écrit la forme littérale de la décomposition en éléments simples de  $F$ , ou de  $\frac{R}{B}$ .
- On détermine les coefficients à l'aide de diverses méthodes.

### 2.2 Détermination des coefficients

- La méthode la plus rudimentaire consiste à réduire au même dénominateur la forme décomposée, et à identifier les numérateurs.
- Vous pouvez remplacer  $X$  par des valeurs numériques, différentes des pôles.
- Sachant que la décomposition est unique, si  $F$  est paire, ou impaire, on obtient des relations entre les coefficients.
- En utilisant la fraction sans partie entière,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x F(x)$  donne une relation entre coefficients.
- En multipliant  $F$  par  $(X - a)^k$  et en remplaçant  $X$  par  $a$ , on obtient  $\alpha_k$ .
- Si  $a$  est un pôle simple, la partie polaire associée  $\frac{\alpha}{X - a}$  vérifie :

$$\alpha = \frac{A(a)}{B'(a)}.$$

- Soit  $P$  un polynôme dont les racines sont  $a_1, \dots, a_k$ , d'ordre de multiplicité respectifs  $m_1, \dots, m_k$ . On a :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{X - a_i}.$$

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Décomposez en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F = \frac{X}{(X + 1)^2 (X - 1)^2}.$$

**Exercice 2 :** Décomposez, dans  $\mathbb{C}(X)$ , la fraction  $F = \frac{X^{2n} + 1}{X^{2n} - 1}$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## 1. Définitions et premières propriétés

### 1.1 Espace vectoriel

Soit  $\mathbb{K}$  un corps d'éléments neutres notés 0 et 1. On dit qu'un ensemble non vide  $E$  est un **espace vectoriel** sur  $\mathbb{K}$ , ou  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, s'il est muni

- d'une loi de composition interne notée  $+$ ,
  - d'une loi de composition externe sur  $\mathbb{K}$ , c'est-à-dire d'une application de  $K \times E$  dans  $E$  :  $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ ,
- telles que :

$(E, +)$  est un groupe commutatif,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall \mu \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E \quad (\lambda \mu) x = \lambda (\mu x) \quad ;$$

$$(\lambda \mu) x = \lambda (\mu x) \quad ; \quad (\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x \quad ; \quad \lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y \quad ; \quad 1 x = x.$$

Les éléments de  $E$  sont des **vecteurs** ; les éléments de  $\mathbb{K}$  sont des **scalaires**.



$$\forall \lambda \in K \quad \forall x \in E \quad \lambda x = 0_E \iff \lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E.$$

De ce fait, les éléments neutres de  $K$  et de  $E$ ,  $0_K$  et  $0_E$ , seront représentés par le même symbole 0 sans inconvénient.

### 1.2 Exemples

- L'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .
- $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, mais aussi un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- Le produit  $E_1 \times \cdots \times E_n$  de  $n$  espaces vectoriels sur le même corps  $\mathbb{K}$  (en particulier  $\mathbb{K}^n$ ) est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

- L'ensemble  $\mathcal{F}(X, F)$  des applications d'un ensemble non vide  $X$  dans un espace vectoriel  $F$ , est un espace vectoriel pour les opérations  $f + g$  et  $\lambda f$ .
- L'ensemble  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  des suites d'éléments de  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- L'ensemble  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , l'ensemble  $\mathbb{K}_n[X]$  des polynômes de degré  $\leq n$ , sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

### 1.3 Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille finie de vecteurs. Une combinaison linéaire de ces vecteurs est un vecteur du type :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \quad \text{avec} \quad \lambda_i \in \mathbb{K} \quad \text{pour tout } i.$$

## 1.4 Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs. Une combinaison linéaire de ces vecteurs est un vecteur du type :

$$\sum_{i \in J} \lambda_i x_i \quad \text{avec } \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ et } J \text{ partie finie de } I.$$

## 2. Sous-espaces vectoriels

### 2.1 Définition

- Une partie non vide  $F$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si elle est stable pour les deux lois, et si la restriction à  $F$  des lois de  $E$  y définit une structure d'espace vectoriel.
- En fait, il faut et il suffit que  $F$  vérifie :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in F \quad \forall y \in F \quad x + y \in F \quad \lambda x \in F;$$

ou encore :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in F \quad \forall y \in F \quad x + \lambda y \in F.$$



Pour montrer que  $F$  n'est pas vide, on vérifie en général que  $0 \in F$ .

### 2.2 Exemples

- L'ensemble nul (ne pas dire : vide !)  $\{0\}$  est un sous-espace vectoriel.
- Les droites vectorielles de  $\mathbb{R}^2$  ; les droites et plans vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  sont des sous-espaces vectoriels.
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ .

### 2.3 Sous-espace engendré par une partie

- Toute intersection de sous-espaces vectoriels de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .



Attention, la réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

- L'intersection  $F$  de tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  contenant une partie  $A$  donnée est le sous-espace vectoriel engendré par  $A$ . C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant  $A$ .

On dit aussi que  $A$  est une partie génératrice de  $F$ . On note  $F = \text{Vect}(A)$ .

- Le sous-espace vectoriel engendré par  $A$  est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de  $A$ .

## 3. Familles de vecteurs

### 3.1 Familles et parties génératrices

- Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  est génératrice de  $E$  si  $F = \text{Vect}[(x_i)_{i \in I}]$ .
- Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

### 3.2 Familles et parties libres, liées

- On dit qu'une famille  $(x_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est une famille libre, ou que les vecteurs sont linéairement indépendants, si pour toute partie finie  $J$  de  $I$ , on a :

$$\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0 \implies \forall i \in J \quad \lambda_i = 0.$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée, ou que les vecteurs sont linéairement dépendants.

- Toute sous-famille non vide d'une famille libre est libre.
- Pour qu'une famille  $(x_i)_{i \in I}$  soit liée, il faut, et il suffit, que l'un de ses éléments soit combinaison linéaire des autres.



*Cas particuliers : une famille qui contient le vecteur 0 est liée ; deux vecteurs sont liés si, et seulement si, ils sont colinéaires.*

### 3.3 Bases

- On appelle base d'un espace vectoriel  $E$  toute famille libre de  $E$  qui engendre  $E$ .
- $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  si, et seulement si, tout vecteur  $x$  de  $E$  peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Les scalaires  $x_i$  sont les composantes, ou coordonnées, du vecteur  $x$ .

- Exemples**

- Dans  $\mathbb{K}^n$ , soit  $e_i$  le vecteur comportant un 1 à la  $i$ -ième place et 0 ailleurs. Les vecteurs  $\{e_1, \dots, e_n\}$  forment une base, dite base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , et on peut écrire :

$$(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

- Dans  $\mathbb{K}_n[X]$ , les monômes  $(X^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , forment une base, dite base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- Dans  $\mathbb{K}[X]$ , les monômes  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , forment une base, dite base canonique de  $\mathbb{K}[X]$ .

## 4. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

### 4.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

$E_1$  et  $E_2$  étant deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , on appelle somme de  $E_1$  et de  $E_2$ , et on note  $E_1 + E_2$ , l'ensemble des vecteurs du type  $x_1 + x_2$  où  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$ .

$E_1 + E_2$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $E_1 \cup E_2$ .

### 4.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

- Définitions**

Quand tout vecteur  $x$  de  $F = E_1 + E_2$  s'écrit, de façon unique, sous la forme  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$ , on dit que  $F$  est somme directe de  $E_1$  et de  $E_2$ , et on note  $F = E_1 \oplus E_2$ .

On dit aussi que  $E_1$  et  $E_2$  sont **supplémentaires** dans  $F$ .

- Théorème**

$$E = E_1 \oplus E_2 \iff E = E_1 + E_2 \text{ et } E_1 \cap E_2 = \{0\}.$$

### 4.3 Généralisation

#### • Somme de sous-espaces vectoriels

Soit  $(E_i)_{i \in I}$  une famille finie de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ . On appelle somme des  $E_i$ , et on note  $\sum_{i \in I} E_i$ , l'ensemble des vecteurs du type  $\sum_{i \in I} x_i$  où  $x_i \in E_i$  pour tout  $i \in I$ .


$\sum_{i \in I} E_i$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $\bigcup_{i \in I} E_i$ .

Si  $I = \{1, \dots, n\}$ , la somme se note aussi  $E_1 + \dots + E_n$ .

#### • Somme directe de sous-espaces vectoriels

Quand tout vecteur  $x$  de  $\sum_{i \in I} E_i$  s'écrit de façon unique sous la forme  $\sum_{i \in I} x_i$  avec  $x_i \in E_i$  pour tout  $i \in I$ , on dit que la somme des  $E_i$  est directe et on la note  $\bigoplus_{i \in I} E_i$ .

Si  $I = \{1, \dots, n\}$ , on note aussi  $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ .

 Pour démontrer que la somme des  $E_i$  est directe, la méthode la plus rapide est de partir d'une somme nulle  $x_1 + \dots + x_n = 0$  avec  $x_i \in E_i$  pour tout  $i$ , et de démontrer que cela entraîne que tous les  $x_i$  sont nuls.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Soit  $x_1, \dots, x_n$  des vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ .

On pose  $y_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  avec  $\lambda_1 \neq 0$ . Montrez que :

$$\text{Vect}(y_1, x_2, \dots, x_n) = \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

**Exercice 2 :** Montrez que si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont des nombres réels vérifiant :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \quad \text{avec } n \geq 2,$$

alors les fonctions  $(\varphi_k)_{0 \leq k \leq n}$  définies par  $\varphi_k(x) = e^{\alpha_k x}$  sont linéairement indépendantes dans l'espace  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 3 :** Soit  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On désigne par  $\mathcal{P}$  l'ensemble des fonctions paires et par  $\mathcal{I}$  l'ensemble des fonctions impaires.

Démontrez que  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ .

Quelle est la décomposition de la fonction exponentielle ?

# 27 Espaces vectoriels de dimension finie

## 1. Dimension d'un espace vectoriel

### 1.1 Définition

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

### 1.2 Existence de bases

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie non réduit à  $\{0\}$ .

- **Théorème de la base extraite**

De toute famille génératrice de  $E$  on peut extraire une base.

- **Théorème de la base incomplète**

Toute famille libre de  $E$  peut être complétée en une base de  $E$ .

- **Existence d'une base**

Tout espace vectoriel non réduit à  $\{0\}$  possède au moins une base.



*Attention à ne jamais dire la base de  $E$ , car il n'y a pas unicité.*

- **Dimension**

Si  $E$  a une base comportant  $n$  vecteurs, alors toute base de  $E$  comporte aussi  $n$  vecteurs. On dit que  $n$  est la dimension de  $E$  ; on la note  $\dim E$ .

On convient que l'espace vectoriel  $\{0\}$  est de dimension nulle.

### 1.3 Recherche de bases

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

- Toute famille libre de  $E$  a au plus  $n$  vecteurs. Si elle comporte  $n$  vecteurs, c'est une base.
- Toute famille génératrice de  $E$  a au moins  $n$  vecteurs. Si elle comporte  $n$  vecteurs, c'est une base.



*Si on connaît déjà la dimension  $n$  de  $E$ , et si on considère une famille de  $n$  vecteurs, pour démontrer que c'est une base, il suffit de démontrer : soit que la famille est libre, soit que la famille est génératrice.*

## 2. Autres dimensions

### 2.1 Dimension de $E \times F$

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies.

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , et  $(f_1, \dots, f_p)$  une base de  $F$ , alors l'ensemble des couples

$(e_i, 0)$  et  $(0, f_j)$  où  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ , est une base de  $E \times F$ .


Par conséquent  $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$ .

## 2.2 Dimension d'un sous-espace vectoriel


Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est de dimension finie, et

$$\dim F \leq \dim E.$$

D'autre part, si  $\dim F = \dim E$ , alors  $F = E$ .

 L'égalité des dimensions ne suffit pas pour conclure que  $F = E$ . Il faut aussi une inclusion.

Si  $\dim F = \dim E - 1$ , on dit que  $F$  est un hyperplan de  $E$ .

 Comme exemples d'hyperplans, vous pouvez penser à une droite dans le plan ou à un plan dans l'espace.

## 2.3 Dimension d'une somme

### • Relation de Grassmann

Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , on a :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$


En particulier, si  $F$  et  $G$  sont supplémentaires :

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

### • Sous-espaces supplémentaires

$F$  et  $G$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $E$  si, et seulement si, on a :


$$\dim E = \dim F + \dim G \quad \text{et} \quad \text{soit } E = F + G, \text{ soit } F \cap G = \{0\}.$$

 En dimension finie, pour démontrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires, le plus rapide est de vérifier la condition sur les dimensions puis que  $x \in F \cap G$  entraîne  $x = 0$ .

• Tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  admet des supplémentaires, qui ont tous pour dimension :  $\dim E - \dim F$ .

•  $F$  et  $G$  sont supplémentaires si, et seulement si, en réunissant une base de  $F$  et une base de  $G$ , on obtient une base de  $E$ .

On dit qu'on a choisi une base de  $E$  adaptée à la somme directe.

 Attention à ne pas partir d'une base de  $E$ , car il n'y a aucune raison de pouvoir en extraire une base de  $F$  et une base de  $G$ , ni même des vecteurs de  $F$  ou de  $G$ .

### • Généralisation

Si  $E$  est de dimension finie, on a :

$$\dim \bigoplus_{i \in I} E_i = \sum_{i \in I} \dim E_i.$$

Si la somme  $\bigoplus_{i \in I} E_i$  est directe, alors, pour que  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ , il faut et il suffit que :

$$\dim E = \sum_{i \in I} \dim E_i.$$

Si aucun  $E_i$  n'est réduit à  $\{0\}$ , la réunion d'une base de chaque  $E_i$  constitue une base de  $E$  si, et seulement si,  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ .

## 2.4 Rang d'une famille de vecteurs

- Le rang d'une famille finie de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.
- C'est aussi le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de la famille.

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + 2z = 0\}$  et  $G = \{(a, -a, 3a) ; a \in \mathbb{R}\}$ .

a) Montrez que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .

b) Montrez que :  $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ .

**Exercice 2 :** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère les vecteurs :

$$V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad V_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad V_4 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

Déterminez, suivant  $\alpha$  et  $\beta$ , le rang de  $(V_1, V_2, V_3, V_4)$ .



Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur le même corps  $\mathbb{K}$ .

## 1. Généralités

### 1.1 Définitions

- Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est dite **linéaire** si elle transporte les opérations des espaces vectoriels, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \quad ; \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

ou encore :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall \mu \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

La propriété précédente s'étend à toute combinaison linéaire finie :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

- Si  $f$  est bijective, c'est un **isomorphisme** ; si  $E = F$ , c'est un **endomorphisme** ; si  $f$  est bijective avec  $E = F$ , c'est un **automorphisme**.

- On note :

$\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ ,

$\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $E$ ,

$\text{GL}(E)$  l'ensemble des automorphismes de  $E$ .

### 1.2 Opérations algébriques

- La composée de deux applications linéaires est linéaire.
- Si  $f$  est un isomorphisme,  $f^{-1}$  est aussi un isomorphisme.
- $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel.

Si  $\dim E = n$  et  $\dim F = p$ , on a  $\dim \mathcal{L}(E, F) = np$ .

$(\text{GL}(E), \circ)$  est un groupe, appelé **groupe linéaire** de  $E$ .

## 2. Noyau et image d'une application linéaire

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

### 2.1 Définitions

- L'image d'un sous-espace vectoriel de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ . En particulier,  $f(E)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  appelé **image** de  $f$ , et noté  $\text{Im } f$ .

$$\text{Im } f = \{y \in F \quad ; \quad \exists x \in E \quad y = f(x)\}.$$

Il est engendré par les images des vecteurs d'une partie génératrice de  $E$ .

- L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . En particulier,  $f^{-1}(\{0\})$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . On l'appelle le **noyau** de  $f$ , et on le note  $\text{Ker } f$ .

$$\text{Ker } f = \{x \in E \ ; \ f(x) = 0\}.$$

## 2.2 Théorème

$$f \text{ surjective} \iff \text{Im } f = F \quad ; \quad f \text{ injective} \iff \text{Ker } f = \{0\}.$$

## 2.3 Noyau d'une restriction

- Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $E_1$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . La restriction de  $f$  à  $E_1$  a pour noyau :

$$\text{Ker } (f|_{E_1}) = \text{Ker } f \cap E_1.$$

- La restriction de  $f$  à tout supplémentaire  $G$  de  $\text{Ker } f$  définit donc un isomorphisme de  $G$  sur  $\text{Im } f$ .

## 2.4 Réflexe utile

$$f \circ g = 0 \iff \text{Im } g \subset \text{Ker } f.$$

# 3. Image d'une famille de vecteurs

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

## 3.1 Image d'une famille génératrice

Si  $G$  engendre  $E$ , alors  $f(G)$  engendre  $f(E)$ .

L'image d'une famille génératrice de  $E$  est une famille génératrice de  $F$  si, et seulement si,  $f$  est surjective.

## 3.2 Image d'une famille libre

Si  $A$  est une partie liée dans  $E$ , alors  $f(A)$  est une partie liée dans  $F$ , ou, par contraposition :

$$f(A) \text{ libre dans } F \implies A \text{ libre dans } E.$$

$f$  est injective si, et seulement si, pour toute partie libre  $L$  de  $E$ ,  $f(L)$  est une partie libre de  $F$ .

## 3.3 Image d'une base

L'image d'une base de  $E$  est une base de  $F$  si, et seulement si,  $f$  est bijective.

# 4. Rang d'une application linéaire

## 4.1 Théorème du rang

Si  $E$  est de dimension finie, on a :

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f.$$

$\dim \text{Im } f$  est appelé rang de  $f$ , et noté  $\text{rg } f$ .

## 4.2 Théorème

Si  $E$  et  $F$  sont de même dimension finie, on a :

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective.}$$



*N'oubliez pas l'hypothèse sur  $E$  et  $F$ .*

## 4.3 Forme linéaire et hyperplan

### • Forme linéaire

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle forme linéaire sur  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

### • Écriture d'une forme linéaire

Si  $E$  est de dimension finie et admet  $(e_1, \dots, e_n)$  pour base, toute forme linéaire  $f$  sur  $E$  est de la forme :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

où les  $\alpha_i = f(e_i)$  sont des scalaires qui caractérisent  $f$ .

### • Forme linéaire et hyperplan

– Étant donnée une forme linéaire  $\varphi$  sur  $E$  non nulle, le sous-espace vectoriel  $H = \text{Ker } \varphi$  est un hyperplan de  $E$ .

Toute forme linéaire  $\psi$  nulle sur  $H$  est colinéaire à  $\varphi$ .

– En dimension finie, un hyperplan admet donc une équation de la forme :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0.$$



*Vous avez déjà obtenu cette forme pour une droite vectorielle dans le plan et un plan vectoriel dans l'espace.*

## 5. Détermination d'une application linéaire

• Soit  $A = (a_1, \dots, a_n)$  une base de  $E$  et  $B = (b_1, \dots, b_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $F$ . Il existe une application linéaire unique  $f$  de  $E$  dans  $F$  telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad f(a_i) = b_i.$$

- On a :  $f$  injective  $\iff B$  libre dans  $F$  ;  
 $f$  surjective  $\iff B$  engendre  $F$  ;  
 $f$  bijective  $\iff B$  est une base de  $F$ .

• Conséquence : deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  de dimensions finies sont isomorphes si, et seulement si,  $\dim E = \dim F$ .

## 6. Applications linéaires particulières

### 6.1 Homothétie

Soit  $k \in \mathbb{K}^*$ . L'homothétie de rapport  $k$  est l'application :

$$\begin{aligned} h_k : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto kx \end{aligned}$$

 Dans cette définition, n'oubliez pas que  $k$  ne dépend pas de  $x$ .

### 6.2 Projections et symétries

- Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . Tout vecteur  $x$  de  $E$  s'écrit de façon unique sous la forme  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in F$  et  $x_2 \in G$ .
- L'application  $p$  de  $E$  dans  $E : x \mapsto p(x) = x_1$  est linéaire.  
C'est la projection sur  $F$ , parallèlement à  $G$ .
- L'application  $s_F$  de  $E$  dans  $E : x \mapsto s_F(x) = x_1 - x_2$  est linéaire.  
C'est la symétrie par rapport à  $F$ , parallèlement à  $G$ .
- On définit de même la projection  $q$  sur  $G$ , parallèlement à  $F$ , et la symétrie  $s_G$  par rapport à  $G$ , parallèlement à  $F$ .

### 6.3 Propriétés

$$p + q = \text{Id}_E \quad ; \quad p \circ q = q \circ p = 0 \quad ; \quad p^2 = p \quad ; \quad q^2 = q \quad ; \quad s_F^2 = \text{Id}_E.$$

$$\text{Ker } p = \text{Im } q = G \quad ; \quad \text{Ker } q = \text{Im } p = F.$$

$p$  et  $s_F$  sont liées par l'égalité :

$$s_F = 2p - \text{Id}_E.$$


### 6.4 Projecteurs

D'une façon générale, on appelle projecteur de  $E$  tout endomorphisme  $p$  de  $E$  tel que  $p \circ p = p$ .

On a alors :

$$E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p,$$

et  $p$  est la projection sur  $\text{Im } p$ , parallèlement à  $\text{Ker } p$ .

 Attention, l'égalité  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$  entraîne seulement que  $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ , et pas que  $f$  soit un projecteur.

### 6.5 Symétries

- D'une façon générale, on appelle symétrie de  $E$  toute application linéaire  $s$ , de  $E$  dans  $E$ , telle que  $s \circ s = \text{Id}_E$ .
- Alors  $F = \{x \in E ; s(x) = x\}$  et  $G = \{x \in E ; s(x) = -x\}$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $E$ , et  $s$  est la symétrie par rapport à  $F$ , parallèlement à  $G$ .

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :**  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  ;  $f$  et  $g$  sont des endomorphismes de  $E$ .

En considérant la restriction de  $g$  à  $\text{Im } f$ , montrez que :

$$\text{rg } f + \text{rg } g - n \leq \text{rg } (g \circ f) \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } g).$$

**Exercice 2 :** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Montrez que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$$(a) \text{ Im } f = \text{Im } f^2; \quad (b) \text{ Ker } f = \text{Ker } f^2; \quad (c) E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f.$$

**Exercice 3 :** On considère un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , deux projecteurs  $p$  et  $q$  de  $E$  vérifiant  $p \circ q = q \circ p$ .

Montrez que  $p \circ q$  est un projecteur.

Déterminez  $\text{Im } (p \circ q)$  et  $\text{Ker } (p \circ q)$ .

**Exercice 4 :** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que :

$$\forall x \in E \quad \exists k \in \mathbb{K} \quad f(x) = kx.$$

Montrez que  $f$  est une homothétie.

# 29 Espaces affines

## 1. Structure d'espace affine

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . On construit un espace affine (ensemble de points)  $V$  de direction  $E$  en se donnant une application :

$$\begin{aligned} V \times E &\longrightarrow V \\ (M, x) &\longmapsto M + x \end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{aligned} \forall A \in V \quad \forall (x, y) \in E^2 \quad A + (x + y) &= (A + x) + y \\ \forall A \in V, \text{ l'application } x &\mapsto A + x \text{ est une bijection de } E \text{ sur } V. \end{aligned}$$

Si  $A + x = B$ , on note  $x = \overrightarrow{AB}$ .

Une origine  $O$  étant fixée dans  $V$ , l'application de  $A$  dans  $E$  :

$$M \mapsto \overrightarrow{OM}$$

est une bijection.

Le choix d'une origine permet donc d'identifier espace affine et espace vectoriel. Les éléments de  $E$  seront alors indifféremment appelés vecteurs ou points.

## 2. Sous-espaces affines

### 2.1 Définitions

$A$  étant un point de  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , l'ensemble

$$W = A + F = \{A + x ; x \in F\}$$

est un sous-espace affine de  $E$ .

$W$  est de direction  $F$  et de dimension  $\dim F$ .

### 2.2 Parallélisme

Soit deux sous-espaces affines  $W = A + F$  et  $W' = A' + F'$ .

On dit que  $W$  est parallèle à  $W'$  si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $F'$ .

On dit  $W$  et  $W'$  sont parallèles entre eux si  $F = F'$ .

### 2.3 Intersection

Deux sous-espaces affines  $W = A + F$  et  $W' = A' + F'$  ont une intersection non vide si, et seulement si,  $\overrightarrow{AA'} \in F + F'$ .

Leur intersection est alors un sous-espace affine de direction  $F \cap F'$ .



*Deux sous-espaces affines peuvent avoir une intersection vide sans être parallèles. Pensez à deux droites dans l'espace.*

## 2.4 Solutions d'une équation linéaire

Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $u(x) = b$  d'inconnue  $x$ , est, soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par  $\text{Ker } u$ .

## 3. Repère affine

- Un repère affine  $\mathcal{R}$  de  $V$  est un couple  $(O, \mathcal{B})$  où  $O$  est un point de  $V$  appelé origine et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

- Les **coordonnées** de  $M \in V$  dans  $\mathcal{R}$  sont les composantes de  $\overrightarrow{OM}$  dans  $\mathcal{B}$ .

Si  $\mathcal{B}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{R}$  est le repère canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On écrit souvent les coordonnées de  $M$  sous forme d'une matrice-colonne  $X$ .

- Un repère affine d'un sous-espace affine  $W$  est formé par un point de  $W$  et une base de la direction de  $W$ .

# 30 Calcul matriciel

## 1. Définitions

### 1.1 Matrices

- Une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes sur un corps  $\mathbb{K}$  est un tableau d'éléments de  $K$  comportant  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

On note  $a_{ij}$  l'élément d'une matrice  $A$  situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$ . La matrice  $A$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{ou} \quad (a_{ij}).$$

On dit que  $A$  est de format  $(n, p)$ , ou de type  $(n, p)$ .



Attention à ne pas confondre la matrice  $(a_{ij})$  et le scalaire  $a_{ij}$ .

- L'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , est noté  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Si  $p = 1$ ,  $A$  est une **matrice colonne** que l'on peut assimiler à un vecteur de  $\mathbb{K}^n$ .

Si  $n = 1$ ,  $A$  est une **matrice ligne** que l'on peut assimiler à une forme linéaire.

Si  $n = p$ ,  $A$  est une **matrice carrée** d'ordre  $n$ .  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$  se note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les éléments  $a_{11}, \dots, a_{nn}$  forment la **diagonale principale** de  $A$ .

- Deux matrices  $A$  et  $B$  sont égales si elles sont de même format, et si  $a_{ij} = b_{ij}$  pour tout  $i$  et pour tout  $j$ .

### 1.2 Matrices particulières

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n$ .

- $A$  est **triangulaire supérieure** si  $a_{ij} = 0$  pour  $i > j$ .
- $A$  est **triangulaire inférieure** si  $a_{ij} = 0$  pour  $i < j$ .
- $A$  est **diagonale** si  $a_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$ . On peut la noter  $A = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ .

Elle est **scalaire** si  $A = a I_n$ .

## 2. Opérations sur les matrices

### 2.1 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , et  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

On définit :

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \quad \text{et} \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$



Attention, on ne peut additionner deux matrices que si elles sont de même format.

Pour ces deux lois,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est un espace vectoriel.



- Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, \dots, p\}$  fixés, on note  $E_{ij}$  la matrice dont le coefficient situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  est égal à 1, et dont les autres coefficients sont égaux à 0.

$(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , qui est donc de dimension  $np$ .

## 2.2 Produit de matrices

Si  $A$  est de format  $(n, p)$  et  $B$  de format  $(p, q)$ , on définit la matrice  $C = AB$ , de format  $(n, q)$ , par :

$$\forall i \quad \forall j \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$



Attention à la condition d'existence de  $AB$  :

nombre de colonnes de  $A$  = nombre de lignes de  $B$ .

Ce produit est la traduction de la composée des applications linéaires  $f \circ g$ . Il en a donc les propriétés : il est associatif, et non commutatif sauf si  $n = p = q = 1$ .



On peut avoir  $AB = 0$  avec  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$ .

## 2.3 Produits particuliers

- Base canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}.$$

où le **symbole de Kronecker**  $\delta_{ij}$  vaut 1 si  $i = j$  et 0 si  $i \neq j$ .

- Matrices triangulaires

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

- Matrices diagonales

Si  $A = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$  et  $B = \text{diag}(b_{11}, \dots, b_{nn})$  sont deux matrices diagonales, on a :

$$AB = BA = \text{diag}(a_{11} b_{11}, \dots, a_{nn} b_{nn}).$$

- Produit par blocs

Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  et  $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$  deux matrices décomposées en blocs de sous-matrices. Si tous les produits écrits sont possibles, on a :


$$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

## 3. Matrices carrées d'ordre $n$

### 3.1 Formule du binôme de Newton

Si  $A$  et  $B$  commutent, alors :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

 N'oubliez pas de vérifier la condition  $AB = BA$ .

### 3.2 Matrices inversibles

- La matrice identité  $I_n = \text{diag}(1, \dots, 1)$  est l'élément neutre du produit dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible s'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que :

$$AB = BA = I_n.$$


Si  $B$  existe, elle est unique et on la note  $A^{-1}$ .

 Pour le calcul de  $A^{-1}$ , voir fiche 32.

- Les éléments inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  forment un groupe  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ . On a :

$$(A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

- Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , pour que  $A$  soit inversible, il suffit qu'elle soit inversible à droite, ou inversible à gauche.

 En général, la somme de deux matrices inversibles n'est pas inversible.

## 4. Transposition

### 4.1 Définition

La transposée d'une matrice  $A$  de format  $(n, p)$ , est la matrice de format  $(p, n)$ , notée  ${}^tA$  (ou  $A^T$ ), de terme général  $b_{ij}$  :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

Elle est donc obtenue à partir de  $A$  en échangeant les lignes et les colonnes.

### 4.2 Propriétés

$${}^t({}^tA) = A \quad ; \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA \quad ; \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB \quad ; \quad {}^t(A B) = {}^tB {}^tA.$$

### 4.3 Matrices symétriques, antisymétriques

- Une matrice carrée  $A$  est symétrique si  ${}^tA = A$ ,  
antisymétrique si  ${}^tA = -A$ .
- Les matrices symétriques et les matrices antisymétriques constituent des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathcal{M}_n(K)$ .

### 4.4 Inverse de la transposée

Si  $A$  est inversible,  ${}^tA$  l'est aussi et on a :

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

**Sauriez-vous répondre ?**

**Exercice 1 :** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrez que  $A^2 - A - 2I_3 = 0$  et déduisez-en que  $A$  est inversible.

**Exercice 2 :** Soit  $A = (a_{ij})$  la matrice carrée d'ordre  $n$  définie par son terme général :

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{si } i > j \\ a_{ij} = (-1)^{i-1} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j. \end{cases}$$

Calculez  $A^2$ .

**Exercice 3 :**  $a$  et  $b$  étant deux réels donnés, on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

Calculez  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## 1. Représentations matricielles

### 1.1 Matrice d'une application linéaire de $E$ dans $F$

- Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels de dimensions  $p$  et  $n$ , munis de bases respectives  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  et  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ .

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Elle est déterminée par la donnée des vecteurs :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i \quad \text{pour } 1 \leq j \leq p,$$

c'est-à-dire par la matrice  $A = (a_{ij})$  dont les vecteurs colonnes sont les composantes de  $f(e_j)$  dans la base de  $F$  qui a été choisie.

On dit que  $A$  est la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .



*A dépend donc à la fois de l'application linéaire qu'elle représente et des bases choisies dans les espaces vectoriels de départ et d'arrivée.*

- Si  $E$  est de dimension  $n$ , dans toute base l'identité de  $E$  est représentée par la matrice carrée  $I_n$  qui comporte des 1 sur sa diagonale principale et des 0 ailleurs.

### 1.2 Matrice d'un isomorphisme

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  où  $E$  et  $F$  sont de même dimension finie.

$f$  est bijective (c'est-à-dire est un isomorphisme) si, et seulement si, sa matrice dans des bases quelconques de  $E$  et de  $F$  est inversible.

### 1.3 Matrice de $f(x)$

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies munis de bases respectives  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ , et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

Soit  $x \in E$  et  $y \in F$ . Notons  $X$  la matrice colonne des composantes de  $x$  dans  $\mathcal{B}$ ,  $Y$  la matrice colonne des composantes de  $y$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $M$  la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .

L'égalité vectorielle  $y = f(x)$  est équivalente à l'égalité matricielle :

$$Y = MX.$$

### 1.4 Matrice d'une famille finie de vecteurs

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ , muni d'une base  $\mathcal{B}$ , et  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

À chaque vecteur  $x_i$ , on associe la matrice colonne  $X_i$  de ses composantes dans  $\mathcal{B}$ .

À la famille  $(x_1, \dots, x_n)$ , on associe la matrice de format  $(n, p)$  obtenue en juxtaposant les colonnes  $X_1 \dots X_p$ .

## 2. Changement de bases

## 2.1 Matrice de passage

• Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ . On appelle **matrice de passage** de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ , la matrice  $P$  dont les colonnes  $C_j$  sont les composantes des vecteurs  $e'_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

•  $P$  est la matrice de l'identité de  $E$  muni de  $\mathcal{B}'$ , dans  $E$  muni de  $\mathcal{B}$ .

Si  $P'$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ , on a  $P P' = P' P = I_n$ .

Toute matrice de passage est donc inversible.

• Réciproquement, toute matrice inversible peut être considérée comme une matrice de passage.

## 2.2 Effet d'un changement de bases

• **sur les coordonnées d'un vecteur**

Si  $X$  est la matrice colonne des composantes de  $x$  dans  $\mathcal{B}$ , et  $X'$  la matrice colonne des composantes de  $x$  dans  $\mathcal{B}'$ , on a :

$$X = P X', \quad \text{ou encore} \quad X' = P^{-1} X.$$

• **sur l'expression d'une forme linéaire**

Si une forme linéaire sur  $E$  est représentée par une matrice ligne  $U = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  dans une base  $\mathcal{B}$ , et par  $U'$  dans une base  $\mathcal{B}'$ , on a  $f(x) = UX = U'X'$ , soit :

$$U' = U P.$$

## 2.3 Matrices équivalentes, matrices semblables

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ .

Notons  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ ,

$Q$  la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{C}'$ ,

$A$  la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ ,

$A'$  la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{C}'$ .

On a alors :

$$A' = Q^{-1} A P.$$

Les matrices  $A$  et  $A'$  sont dites **équivalentes**. Elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Si  $E = F$  avec  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$  et  $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$ , alors  $P = Q$ , soit  $A' = P^{-1} A P$ .

Les matrices  $A$  et  $A'$  sont dites **semblables**.

## 3. Noyau, image et rang d'une matrice

### 3.1 Définitions

• Soit  $A$  une matrice de format  $(n, p)$ ,  $E$  un espace vectoriel de dimension  $p$ ,  $F$  un espace vectoriel de dimension  $n$ .

Quelles que soient les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  choisies dans  $E$  et  $F$ , le noyau, l'image et le rang de l'application linéaire  $f$  associée à  $A$  sont toujours les mêmes, ce qui permet de définir le noyau, l'image et le rang de  $A$ .

- Les colonnes de  $A$  engendrent l'image. Les lignes donnent un système d'équations du noyau.
- Le rang de  $A$  est aussi le rang des vecteurs colonnes de  $A$ , c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

### 3.2 Rang de la transposée

$A$  et  ${}^tA$  ont même rang. On peut donc définir le rang de  $A$  à partir de ses lignes.

### 3.3 Théorème

Une matrice de format  $(n, p)$  est de rang  $r$  (avec  $r \leq \min(n, p)$ ) si, et seulement si, elle est équivalente à la matrice  $J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  définie par son terme général :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq r, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

En particulier, une matrice carrée d'ordre  $n$  est inversible si, et seulement si, son rang est égal à  $n$ .

### 3.4 Rang et matrices extraites

À partir d'une matrice, on obtient des matrices extraites en supprimant des lignes et(ou) des colonnes.

Le rang de  $A$  est l'ordre maximal des matrices carrées inversibles que l'on peut extraire de  $A$ .

### 3.5 Calcul du rang

Les opérations élémentaires sur les lignes, ou les colonnes, d'une matrice ne modifient pas le rang. On les utilise pour se ramener à une matrice de rang connu (cf. fiche 32).

## 4. Trace

### 4.1 Trace d'une matrice

La trace d'une matrice  $A = (a_{ij})$ , carrée d'ordre  $n$ , est la somme de ses éléments diagonaux, soit :

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} \in \mathbb{K}.$$

### 4.2 Propriétés

$$\begin{aligned} \text{tr } (A + B) &= \text{tr } A + \text{tr } B & ; & \quad \text{tr } (\lambda A) = \lambda \text{tr } A \\ \text{tr } (AB) &= \text{tr } (BA) & ; & \quad \text{tr } (PMP^{-1}) = \text{tr } M. \end{aligned}$$



Attention, en général  $\text{tr } (ABC) \neq \text{tr } (BAC)$ .

### 4.3 Trace d'un endomorphisme

#### • Définition

Si  $f$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, toutes les matrices qui le représentent sont semblables et ont la même trace.

Cette trace commune est la trace de l'endomorphisme  $f$ .

• **Trace d'un projecteur**

Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ , tel que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .

Déterminez une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2 :** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On définit l'endomorphisme  $\psi$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par :

$$X \mapsto \psi(X) = AX + XA.$$

Calculez la trace de  $\psi$  en fonction de celle de  $A$ .

**Exercice 3 :** Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , quelles sont les racines de  $M^2 = 0$  ?

*La réponse est du type : toutes les matrices semblables à une matrice simple obtenue en choisissant une base adaptée à l'exercice.*

## 1. Systèmes linéaires

### 1.1 Définitions

- Un système de  $n$  équations linéaires à  $p$  inconnues, à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , est de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n. \end{cases}$$

Les coefficients  $a_{ij}$  et les seconds membres  $b_i$  sont des éléments donnés de  $\mathbb{K}$ .

Les inconnues  $x_1, \dots, x_p$  sont à chercher dans  $\mathbb{K}$ .

- Le **système homogène** associé à  $(S)$  est le système obtenu en remplaçant les  $b_i$  par 0.
- Une **solution** est un  $p$ -uplet  $(x_1, \dots, x_p)$  qui vérifie  $(S)$ . Résoudre  $(S)$ , c'est chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou **incompatible**, s'il n'admet pas de solution.
- Deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

### 1.2 Écriture matricielle

Si on note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix},$$

$(S)$  est équivalent à l'égalité matricielle :  $AX = B$ .



Attention à ce que les inconnues soient écrites dans le même ordre dans chaque équation.

### 1.3 Utilisation d'une application linéaire

- $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}^p$  étant munis de leurs bases canoniques,  
 $X$  est la matrice colonne des composantes d'un vecteur  $x \in \mathbb{K}^p$ ,  
 $B$  est la matrice colonne des composantes d'un vecteur  $b \in \mathbb{K}^n$ ,  
 $A$  est la matrice d'une application linéaire  $f$  de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$ ,  
 et le système  $(S)$  est équivalent à :

$$f(x) = b.$$

- Le système  $(S)$  a des solutions si, et seulement si,  $b$  appartient à  $\text{Im } f$ .

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est :

$$x_0 + \text{Ker } f,$$



où  $x_0$  est une solution particulière de  $(S)$ .

## 1.4 Écriture vectorielle

Désignons par  $C_1, \dots, C_p$  les colonnes de  $A$ . Elles représentent des vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ , et le système  $(S)$  se ramène à une égalité dans  $\mathbb{K}^n$  :

$$x_1 C_1 + \dots + x_p C_p = B.$$

$(S)$  est compatible si, et seulement si,  $B \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ .

## 2. Opérations élémentaires sur les matrices

### 2.1 Définitions

- Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont :
  - l'addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne, qui se code :  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  ;
  - la multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, qui se code :  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  ;
  - l'échange de deux lignes, qui se code :  $L_i \leftrightarrow L_j$ .
- Les opérations analogues sur les colonnes se codent :

$$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j \quad ; \quad C_i \leftarrow \lambda C_i \quad ; \quad C_i \leftrightarrow C_j.$$

### 2.2 Interprétation

- Les transformations élémentaires sur les lignes sont équivalentes à la prémultiplication (multiplication à gauche) par la matrice inversible obtenue en appliquant à  $I_n$  la transformation correspondante.

L'opération  $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$  revient à multiplier  $A$  à gauche par la **matrice de transvection** :

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}.$$

L'opération  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  revient à multiplier  $A$  à gauche par la **matrice de dilatation** :

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}.$$

- Les transformations élémentaires sur les colonnes sont équivalentes à la postmultiplication (multiplication à droite) de  $A$  par les mêmes matrices.

### 2.3 Théorème

En partant d'une matrice  $A$ , l'utilisation d'un nombre fini d'opérations élémentaires conduit à une matrice équivalente à  $A$ .

## 3. Méthodes de résolution

### 3.1 Matrice échelonnée

- **Dans le langage des systèmes**

Un système  $(S)$  est en escalier, ou échelonné, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

- **Dans le langage des matrices**

Une matrice est échelonnée par lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
- À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

### • Réduction

Quand un système contient une équation du type :

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = b,$$

si  $b \neq 0$ , le système est impossible ;

si  $b = 0$ , on peut supprimer cette équation, ce qui conduit au système réduit.

## 3.2 Méthode du pivot de Gauss

Soit  $A$  la matrice associée au système  $(S)$ .

En permutant éventuellement deux colonnes, on peut supposer que la première colonne de  $A$  n'est pas nulle.

En permutant deux lignes si nécessaire, on peut supposer  $a_{11} \neq 0$ .

Pour  $i > 1$ , les transformations  $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}L_1$  éliminent l'inconnue  $x_1$  dans les lignes autres que  $L_1$ .

Le terme  $a_{11}$  est le **pivot** de l'étape de l'algorithme.

En répétant le procédé, on aboutit à une matrice triangulaire.



*En calcul numérique, pour minimiser les erreurs d'arrondi, on choisit comme pivot le terme de plus grande valeur absolue (méthode du pivot partiel).*

## 3.3 Méthode de Gauss-Jordan

Dans cette variante du pivot de Gauss, à chaque étape on fait apparaître des zéros à la fois au-dessus et au-dessous du pivot.

# 4. Ensemble des solutions d'un système linéaire

## 4.1 Rang d'un système

Le nombre d'équations du système réduit en escalier obtenu par la méthode de Gauss est le rang  $r$  de la matrice  $A$ , ou du système  $(S)$ .

## 4.2 Inconnues principales, inconnues secondaires

Soit  $r$  le rang de  $(S)$  et  $p$  le nombre d'inconnues.

Si  $r = p$ ,  $(S)$  a une solution unique.

Si  $p > r$ ,  $(S)$  a une infinité de solutions. Les  $r$  inconnues qui figurent au début des  $r$  équations issues de la méthode de Gauss sont les inconnues principales. Elles peuvent se calculer de façon unique en fonction des  $p - r$  autres inconnues, dites inconnues secondaires.



*Le choix des inconnues principales et secondaires d'un système est largement arbitraire. Mais leur nombre est toujours le même.*

## 4.3 Systèmes de Cramer

- **Définition**

Un système est dit de Cramer s'il a une solution, et une seule.

Cette condition est équivalente à :

$$n = p \text{ et } A \text{ inversible.}$$

- **Application au calcul de  $A^{-1}$**

$A$  étant inversible, pour obtenir  $A^{-1}$ , il suffit de résoudre le système  $Y = AX$ , qui admet pour solution  $X = A^{-1}Y$ .

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1** : Calculez l'inverse de la matrice :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

## 1. Formes multilinéaires alternées

### 1.1 Définition

• Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une application  $f$ , de  $E^n$  dans  $\mathbb{K}$ , est une **forme  $n$ -linéaire** si chacune de ses applications partielles

$$x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

est linéaire.

• On dit de plus que  $f$  est **alternée** si  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p) = 0$  dès que deux coordonnées, au moins, sont égales.

•  $f$  étant une forme  $n$ -linéaire alternée,  $\sigma$  une permutation appartenant à  $S_n$ , de signature  $\varepsilon(\sigma)$ , on a :

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n) \varepsilon(\sigma).$$

### 1.2 Cas où $\dim E = n$

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

Pour toute base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , il existe une forme  $n$ -linéaire alternée unique  $f$  telle que

$$f(e_1, \dots, e_n) = \lambda.$$

$f$  étant une forme  $n$ -linéaire alternée non nulle, on a :

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ famille liée de } E \iff f(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

c'est-à-dire aussi :

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ base de } E \iff f(x_1, \dots, x_n) \neq 0,$$

## 2. Déterminants

### 2.1 Déterminant de $n$ vecteurs

#### • Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

On appelle **déterminant** de  $n$  vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  de  $E$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , la valeur notée  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$  de l'unique forme  $n$ -linéaire alternée  $\det_{\mathcal{B}}$  telle que  $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

#### • Expression dans une base

Si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on décompose  $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ , alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \times a_{1,\sigma(1)} \times \dots \times a_{n,\sigma(n)}.$$

### • Orientation

Une base de référence  $\mathcal{B}_0$  étant choisie directe, on dit que  $\mathcal{B}$  est une base directe si  $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$  et indirecte si  $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$ .

## 2.2 Déterminant d'une matrice carrée

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n$ .

On appelle déterminant de  $A$  le déterminant de ses  $n$  vecteurs colonnes, considérés comme éléments de  $\mathbb{K}^n$  rapporté à sa base canonique.

## 2.3 Déterminant d'un endomorphisme

Après avoir montré que deux matrices semblables ont le même déterminant, on appelle déterminant d'un endomorphisme  $f$ , le déterminant commun à ses matrices représentatives.

# 3. Propriétés des déterminants

## 3.1 Transposée

$$\det A = \det {}^t A.$$



*Les propriétés relatives aux colonnes sont donc aussi valables pour les lignes.*

## 3.2 Propriétés d'une forme multilinéaire alternée

- On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une de ses lignes (resp. colonnes) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes). Cette propriété est très utilisée pour faire apparaître des 0 sur une colonne (resp. ligne).
- Multiplier une ligne (ou une colonne) d'un déterminant par un scalaire, c'est multiplier le déterminant par ce scalaire.



*Si  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ , on a donc  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$  puisqu'on peut mettre  $\lambda$  en facteur dans chacune des  $n$  colonnes de  $A$ .*

- Toute transposition sur les lignes (ou les colonnes) transforme  $\det A$  en  $-\det A$ .

## 3.3 Produit

$$\det(A B) = \det A \times \det B.$$

## 3.4 Développement suivant une rangée

### • Définitions

On appelle mineur de l'élément  $a_{ij}$  de  $\Delta$ , déterminant d'ordre  $n$ , le déterminant d'ordre  $n - 1$  obtenu en supprimant la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne de  $\Delta$ , sans changer l'ordre des autres rangées.

Notation :  $D_{ij}$ .

On appelle **cofacteur** de l'élément  $a_{ij}$ , le nombre  $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ .

### • Théorème

Un déterminant est égal à la somme des produits deux à deux des éléments d'une rangée (ligne ou colonne) par leurs cofacteurs.

On utilise ce résultat après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéros.



*Ce mode de calcul peut aussi servir de définition par récurrence d'un déterminant après avoir démontré que le résultat du développement est indépendant de la ligne, ou de la colonne, considérée.*

*C'est une définition plus accessible pour tous ceux que rebute un trop grand formalisme mathématique.*

### • Application

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

## 3.5 Calcul par blocs

Soit  $M$  une matrice carrée de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où  $A$  et  $D$  sont des matrices carrées. On a :

$$\det M = \det A \times \det D.$$

## 3.6 Matrice carrée inversible

$$A \text{ inversible} \iff \det A \neq 0.$$

On a alors  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ .

# 4. Quelques applications des déterminants

## 4.1 Calcul possible pour $A^{-1}$

- On calcule la matrice des cofacteurs des éléments de  $A$ , appelée comatrice de  $A$  et notée  $\text{Com}(A)$ .
- On transpose la comatrice de  $A$ .
- On divise par  $\det A$ .



*Ce calcul est basé sur la relation :*

$$A^t \text{Com}(A) = {}^t \text{Com}(A)A = \det(A)I_n.$$

*Il est quasi-impraticable si  $n > 3$ .*

## 4.2 Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice quelconque  $A$ , est égal au plus grand entier  $s$  tel que l'on puisse extraire de  $A$  une matrice carrée d'ordre  $s$  inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul.

## 4.3 Cas $n = 3$

- Dans  $\mathbb{R}^3$ , le déterminant de 3 vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  est leur produit mixte :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot [\vec{v} \wedge \vec{w}].$$

- Le volume du parallélépipède d'arêtes  $OA$ ,  $OB$  et  $OC$  est égal à  $\left|(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})\right|$ .
- Trois vecteurs sont coplanaires si, et seulement si, leur produit mixte est nul.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Le système suivant de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  est-il une base ?

$$\vec{u} = (1, 1, -1) \quad ; \quad \vec{v} = (1, 2, 0) \quad ; \quad \vec{w} = (-1, 3, 2).$$

**Exercice 2 :** Les nombres 156, 169 et 221 sont divisibles par 13. Montrez que le déterminant suivant l'est aussi :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 9 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

**Exercice 3 :** Soit  $a, b, c$  et  $d$  des réels donnés. Calculez le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+d & d+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+d^2 & d^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+d^3 & d^3+a^3 \\ a^4+b^4 & b^4+c^4 & c^4+d^4 & d^4+a^4 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 4 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\omega = \exp(i \frac{2\pi}{n})$  et on considère la matrice carrée  $M$ , d'ordre  $n$ , dont le terme général situé sur la ligne  $p$  et la colonne  $q$  est :

$$m_{pq} = \omega^{(p-1)(q-1)}.$$

1. Calculez :  $M^2$ .

2. Déduisez-en  $|\det M|$ .

## 1. Produit scalaire

### 1.1 Définitions

- Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Une forme bilinéaire  $\varphi$  sur  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$ , linéaire par rapport à chaque variable.

Elle est symétrique si :  $\forall (x, y) \in E \times E \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ .

Elle est définie positive si :  $\forall x \in E \setminus \{0\} \quad \varphi(x, x) > 0$ .

- Un **produit scalaire** sur  $E$  est une forme bilinéaire  $\varphi$ , symétrique, définie, positive.

On dit que  $(E, \varphi)$  est un **espace préhilbertien réel**. Si, en plus, il est de dimension finie, c'est un **espace euclidien**.

$\varphi(x, y)$  se note  $\langle x | y \rangle$  ou  $(x | y)$  ou  $x \cdot y$ .

### 1.2 Exemples

- Dans  $\mathbb{R}^n$   $\langle X | Y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .
- Dans  $E = C([a, b], \mathbb{R})$   $\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$ .
- Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$   $\langle A | B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$

## 2. Norme associée à un produit scalaire

### 2.1 Norme euclidienne

$E$  étant un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, en posant

$$\forall x \in E \quad \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle},$$

on définit une norme sur  $E$ , c'est-à-dire qu'on a les propriétés :

$$\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \implies x = 0 \quad (\text{séparation})$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (\text{homogénéité})$$

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

On obtient aussi une distance en posant  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

### 2.2 Égalité de polarisation

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x | y \rangle,$$

ce qui permet d'obtenir le produit scalaire  $\langle x | y \rangle$  en fonction des normes.

### 2.3 Inégalité de Cauchy Schwarz



$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad | \langle x | y \rangle | \leq \|x\| \|y\|.$$

Dans cette inégalité, l'égalité a lieu si, et seulement si,  $x$  et  $y$  sont liés.



*Pour retenir ce théorème, pensez au cas de deux vecteurs du plan et à*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\angle(\vec{x}, \vec{y})).$$

## 3. Orthogonalité

### 3.1 Vecteurs orthogonaux

- **Définitions**

Deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont orthogonaux si  $\langle x | y \rangle = 0$ ; on note  $x \perp y$ .

Une famille de vecteurs  $(x_i)_{i \in I}$  est orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Une famille de vecteurs  $(x_i)_{i \in I}$  est orthonormale si elle est orthogonale et si les vecteurs sont tous unitaires.

- **Propriété**

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

- **Théorème de Pythagore**

Si  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille orthogonale finie, on a :

$$\left\| \sum_{i \in I} x_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|x_i\|^2.$$

### 3.2 Orthogonal d'une partie

Soit  $A$  une partie de  $E$ . L'orthogonal de  $A$  est le sous-espace vectoriel défini par :

$$A^\perp = \{x \in E ; \forall y \in A \quad \langle x | y \rangle = 0\}.$$

### 3.3 Méthode d'orthogonalisation de Schmidt

- **Orthogonalisation**

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille libre de  $E$ ; il existe une famille libre orthogonale  $(y_1, \dots, y_n)$  telle que  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$ .

Dans la méthode de Schmidt, elle se construit par récurrence en posant :

$$y_1 = x_1 \quad \text{puis} \quad y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i y_i \quad \text{avec} \quad \lambda_i = \frac{\langle y_i | x_k \rangle}{\langle y_i | y_i \rangle}.$$

- **Orthonormalisation**

Il reste à diviser chaque vecteur obtenu par sa norme pour obtenir une base orthonormale.

- **Corollaire**

Tout espace euclidien  $E$  admet une base orthonormale.

### 3.4 Bases orthonormales

Soit  $E$  muni d'une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$ .

$$\text{Si } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \text{ on a } x_i = \langle e_i | x \rangle.$$

$X$  et  $Y$  étant les matrices colonnes des coordonnées de  $x$  et de  $y$ , on a :

$$\langle x | y \rangle = {}^t \overline{X} Y ; \|x\| = \sqrt{{}^t \overline{X} X} ; d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}.$$

## 4. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

### 4.1 Supplémentaire orthogonal

Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont dits supplémentaires orthogonaux s'ils sont supplémentaires et si tout vecteur de  $F$  est orthogonal à tout vecteur de  $G$ . On note :

$$E = F \oplus G.$$

### 4.2 Projection orthogonale

- Dans l'hypothèse précédente, le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  s'appelle projecteur orthogonal  $p_F$  sur  $F$ .
- Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormale de  $F$ , on a :

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i | x \rangle e_i.$$



Cette expression simple du projeté orthogonal n'est vraie qu'en considérant une base orthonormale de  $F$ .

### 4.3 Distance d'un vecteur à un sous-espace

#### • Définition

La distance d'un élément  $x$  de  $E$  au sous-espace de dimension finie  $F$  est le nombre :

$$d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|.$$

#### • Théorème

$d(x, F)$  est un minimum atteint en un point, et un seul,  $z = p_F(x)$ , et l'on a :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2.$$



Il est important que  $F$  soit de dimension finie.

#### • Inégalité de Bessel

Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormale de  $F$ , on a :

$$\forall x \in E \quad \sum_{j=1}^p |\langle e_j | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

## 5. Hyperplans affines d'un espace euclidien

### 5.1 Hyperplan affine

Un hyperplan affine  $\mathcal{H}$  est défini par un point  $A$  et une direction qui est un hyperplan vectoriel  $H$ .

## 5.2 Équation d'un hyperplan

Dans un repère orthonormal,  $\mathcal{H}$  admet pour équation :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + h = 0.$$

Le vecteur  $\vec{n}$  de composantes  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est un vecteur normal à  $\mathcal{H}$ , c'est-à-dire normal à sa direction  $H$ .

## 5.3 Distance à un hyperplan

Si  $A$  est un point de  $\mathcal{H}$  et  $\vec{n}$  un vecteur normal, la distance d'un point  $M$  de  $E$  à  $\mathcal{H}$  est :

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|} \quad \text{soit } |\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}| \text{ si } \vec{n} \text{ est un vecteur normal unitaire.}$$

## 5.4 Orientation

### • Orientation de $E$

Une base orthonormale  $\mathcal{B}_0$  étant choisie, on dit que  $\mathcal{B}$  est une base directe si  $\det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B} > 0$  et indirecte si  $\det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B} < 0$ .

### • Orientation d'un hyperplan

Un hyperplan est orienté par le choix d'un vecteur normal  $\vec{n}$ .

Une base  $\mathcal{B}$  de  $H$  est dite directe si, et seulement si,  $(\mathcal{B}, \vec{n})$  est une base directe de  $E$ .

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** 1. On considère l'application  $\varphi$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\varphi(M, N) = \text{tr}({}^tMN).$$

Montrez que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est orthonormale.

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrez que  $|\text{tr } A| \leq \sqrt{n \text{tr}({}^tAA)}$ . Quand a-t-on l'égalité ?

**Exercice 2 :** Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace euclidien tel que :

$$\forall x \in E \quad \langle x | f(x) \rangle = 0.$$

Montrez que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires orthogonaux.

## 1. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

### 1.1 Définition

Dans un espace vectoriel euclidien  $E$ , un endomorphisme  $f$  est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme, soit

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\| \quad (1).$$

On dit aussi que  $f$  est un endomorphisme orthogonal.



En fait, la condition (1) entraîne  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

### 1.2 Conditions équivalentes

$f \in \mathcal{L}(E)$  est une isométrie vectorielle si, et seulement si, il vérifie l'une des conditions suivantes :

(2)  $f$  conserve le produit scalaire, soit :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

(3) Il existe une base orthonormale  $\mathcal{B}$  telle que  $f(\mathcal{B})$  soit une base orthonormale.

(4) Pour toute base orthonormale  $\mathcal{B}$ ,  $f(\mathcal{B})$  est une base orthonormale.

### 1.3 Exemples

Les symétries orthogonales et les réflexions sont des automorphismes orthogonaux.

Mais une projection orthogonale distincte de l'identité n'en est pas un ; si  $x \in \text{Ker } p$  avec  $x \neq 0$ , on a  $\|p(x)\| < \|x\|$ .

### 1.4 Groupe orthogonal

- Un endomorphisme orthogonal  $f$  appartient à  $\text{GL}(E)$ . Il est appelé automorphisme orthogonal de  $E$ .
- L'ensemble des automorphismes orthogonaux de  $E$  est noté  $\text{O}(E)$  et appelé **groupe orthogonal** de  $E$ . C'est un sous-groupe de  $\text{GL}(E)$ .

## 2. Matrices orthogonales

### 2.1 Définition

Une matrice carrée  $A$  est dite orthogonale si c'est la matrice de passage d'une base orthonormale  $\mathcal{B}$  à une base orthonormale  $\mathcal{B}'$ .

L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre  $n$  est le groupe orthogonal d'ordre  $n$  ; il est noté  $\text{O}(n)$ .

## 2.2 Conditions équivalentes

- Une matrice carrée est orthogonale si, et seulement si, ses vecteurs colonnes vérifient :

$$\forall i \quad \forall j \quad \langle C_i | C_j \rangle = \delta_{ij}.$$

- Une matrice carrée d'ordre  $n$  est orthogonale si, et seulement si :

$${}^t A A = I_n \iff {}^t A = A^{-1}.$$

## 2.3 Lien avec les endomorphismes

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormale d'un espace euclidien  $E$  et  $A$  la matrice de  $f \in \mathcal{L}(E)$  dans  $\mathcal{B}$ . On a :

$$A \in O(n) \iff f \in O(E).$$

## 2.4 Déterminant d'une matrice orthogonale

Si  $A$  est une matrice orthogonale, on a  $\det A = \pm 1$ .



*Attention, la condition est nécessaire mais non suffisante.*

## 2.5 Groupe spécial orthogonal

On appelle groupe spécial orthogonal  $SO(E)$ , ou groupe des rotations de  $E$ , le sous-groupe de  $O(E)$  formé des automorphismes orthogonaux de déterminant égal à 1.

De même pour les matrices :  $SO(n) = \{A \in O(n) ; \det A = 1\}$ .

# 3. Isométries vectorielles en dimension 2

## 3.1 Rotations

La rotation d'angle  $\theta$  appartient à  $SO(E)$ . Dans toute base  $\mathcal{B}$  orthonormale directe, sa matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

On a  $\det A = 1$  et  $\operatorname{tr} A = 2 \cos \theta$ .

## 3.2 Réflexions

La matrice de la réflexion d'axe  $\Delta$  dans une base  $\mathcal{B}$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

mais elle dépend de  $\mathcal{B}$ . Dans une base adaptée, elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Delta$  est l'ensemble des vecteurs invariants. On a  $\det B = -1$  et  $\operatorname{tr} B = 0$ .

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1** : Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $f$  une application de  $E$  dans  $E$  qui conserve le produit scalaire, soit :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

Montrez que  $f$  est linéaire.

**Exercice 2** : Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice orthogonale réelle d'ordre  $n$ . Montrez que :

$$\left| \sum a_{ij} \right| \leq n.$$

**Exercice 3** : Soit  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telle que  $\sum_{i=1}^n u_i^2 = 1$ .

Montrez que la matrice  $A = I_n - 2U^t U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est orthogonale.

## 1. Cardinal d'un ensemble fini

### 1.1 Ensembles finis

Un ensemble  $E$  est fini s'il existe une bijection d'un intervalle  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de  $\mathbb{N}$  sur  $E$ .

Le nombre  $n$  est le cardinal (ou nombre d'éléments) de  $E$ . On le note  $n = \text{card } E$ , ou  $|E|$ , ou  $\#E$ .

On convient que l'ensemble vide est fini et que  $\text{card } \emptyset = 0$ .

### 1.2 Inclusion

Soit  $E$  un ensemble fini. Toute partie  $A$  de  $E$  est finie et on a :

$$\text{card } A \leq \text{card } E ;$$

l'égalité ayant lieu si, et seulement si,  $A = E$ .

### 1.3 Applications

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles **finis** de **même** cardinal et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . On a l'équivalence des trois propriétés :

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}.$$



*Dans ce cas (n'oubliez pas les hypothèses sur les cardinaux), pour démontrer que  $f$  est bijective, il suffit de démontrer, soit que  $f$  est injective, soit que  $f$  est surjective.*

### 1.4 Réunion

- La réunion de 2 ensembles finis est un ensemble fini. On a :

$$\text{card } (E \cup F) = \text{card } E + \text{card } F - \text{card } (E \cap F).$$

- Dans le cas de  $n$  ensembles finis, deux à deux disjoints, on a :

$$\text{card } (E_1 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n \text{card } (E_i).$$

### 1.5 Produit cartésien

Le produit cartésien de deux ensembles finis est un ensemble fini et on a :

$$\text{card } (E \times F) = \text{card } E \times \text{card } F.$$

### 1.6 Bilan pour dénombrer

Quand une situation comporte plusieurs choix à réaliser,

- on effectue un produit quand on doit faire un choix, *puis* un autre ...
- on effectue une somme quand on doit faire un choix, *ou bien* un autre ...

## 2. Dénombrement de listes

### 2.1 Nombre d'applications

- Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles finis de cardinaux respectifs  $p$  et  $n$ . L'ensemble  $\mathcal{F}(E, F)$  des applications de  $E$  dans  $F$  est fini et a pour cardinal  $n^p$ .
- On peut assimiler une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  à la liste ordonnée des  $p$  images des éléments de  $E$ , c'est-à-dire un élément du produit cartésien  $F^p$ . On dit qu'il s'agit d'une  $p$ -liste d'éléments de  $F$ .
- Le nombre de  $p$ -listes d'éléments de  $F$  est  $n^p$ .
- C'est aussi le nombre de façons d'extraire  $p$  boules parmi  $n$  boules, avec remise et en tenant compte de l'ordre. On parle aussi d'arrangements avec répétition.

### 2.2 Arrangements

- Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles finis de cardinaux respectifs  $p$  et  $n$ . Le nombre d'applications injectives de  $E$  dans  $F$  est égal à :

$$A_n^p = n(n-1) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

où  $n!$  (lire factorielle  $n$ ) est défini pour  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et } 0! = 1.$$

On dit que  $A_n^p$  est le nombre d'arrangements de  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments.

- $A_n^p$  est aussi le nombre de  $p$ -listes d'éléments de  $F$ , distincts deux à deux.
- C'est aussi le nombre le nombre de façons d'extraire  $p$  boules parmi  $n$  boules, sans remise et en tenant compte de l'ordre.

### 2.3 Permutations

- Si  $E$  est un ensemble fini de cardinal  $n$ , toute application injective de  $E$  dans  $E$  est bijective. On dit qu'il s'agit d'une permutation de  $E$ .
- Il y a  $n!$  permutations de  $E$ .
- C'est aussi le nombre de listes ordonnées où tous les éléments de  $E$  figurent une fois et une seule

## 3. Nombre de parties

### 3.1 Dénombrement

Si  $p \leq n$ , le nombre de parties à  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments est noté  $\binom{n}{p}$  (cf. fiche 18). C'est aussi le nombre de façons de prélever  $p$  boules parmi  $n$  boules, sans remise et sans tenir compte de l'ordre.

On l'appelle le nombre de combinaisons de  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments. On a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

### 3.2 Propriétés



- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$  ;  $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$  ;  $\binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p} \binom{n}{p-1}$ .
- La relation  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$  permet de construire le triangle de Pascal.
- Le nombre total de parties d'un ensemble à  $n$  éléments étant  $2^n$ , on a :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n.$$

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Une urne  $A$  contient 3 boules noires et 2 boules blanches.

Une urne  $B$  contient 2 boules noires et 2 boules blanches.

On tire simultanément deux boules de  $A$  et une boule de  $B$ .

1. Quel est le nombre total de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages où les trois boules obtenues sont de la même couleur ?
3. Quel est le nombre de tirages comportant exactement 1 boule blanche ?
4. Quel est le nombre de tirages comportant exactement 2 boules blanche ?

**Exercice 2 :** On dispose de trois dés bien équilibrés, les faces de chaque dé sont numérotées de 1 à 6. On lance les trois dés, on lit les trois nombres  $a, b, c$  apparaissant sur les faces supérieures et on calcule la somme  $S = a + b + c$ .

Le prince de Toscane avait observé que la somme 10 était obtenue plus souvent que la somme 9, alors que ces deux sommes se décomposent exactement de 6 manières, par exemple :

$$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 3 + 4 = 2 + 2 + 5 = 3 + 3 + 3.$$

Il a interrogé Galilée qui lui a donné l'explication. À votre tour de chercher la raison.

## 1. Généralités

### 1.1 Expérience aléatoire

- Une expérience aléatoire  $\mathcal{E}$  est une expérience qui, répétée dans des conditions apparemment identiques, peut conduire à des résultats différents. L'ensemble de tous les résultats possibles est l'univers  $\Omega$  associé à  $\mathcal{E}$ .



*En première année, l'univers  $\Omega$  est supposé fini.*

- On dit qu'un événement est lié à  $\mathcal{E}$  si, quel que soit le résultat  $\omega \in \Omega$ , on sait dire si l'événement est réalisé ou non. On convient d'identifier un tel événement à l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  pour lesquels il est réalisé. Un événement lié à  $\mathcal{E}$  est donc identifié à une partie de  $\Omega$ .

### 1.2 Événements particuliers

Un singleton  $\{\omega\}$  est un événement élémentaire.

$\Omega$  est l'événement certain car il est toujours réalisé.

$\emptyset$  est l'événement impossible car il n'est jamais réalisé.

## 2. Opérations sur les événements

### 2.1 Événement contraire $\overline{A}$

$\overline{A}$  est réalisé si, et seulement si,  $A$  n'est pas réalisé.

### 2.2 Événement $A \cap B$

- $A \cap B$  est réalisé si, et seulement si,  $A$  et  $B$  sont simultanément réalisés.

Plus généralement,  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  est réalisé si, et seulement si, tous les événements sont réalisés.

- Si  $A \cap B = \emptyset$ , c'est-à-dire si la réalisation simultanée des événements  $A$  et  $B$  est impossible, les événements  $A$  et  $B$  sont incompatibles.

### 2.3 Événement $A \cup B$

$A \cup B$  est réalisé si, et seulement si, l'un au moins des événements est réalisé.

Plus généralement,  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  est réalisé si, et seulement si, au moins un des événements est réalisé.

### 2.4 Système complet d'événements

Une partition de  $\Omega$  est un système complet d'événements. Autrement dit, des événements

$(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  forment un système complet s'ils sont différents de  $\emptyset$ , deux à deux incompatibles et si  $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$ .

## 2.5 Inclusion

$A \subset B$  signifie que la réalisation de  $A$  implique la réalisation de  $B$ .

# 3. Probabilité

## 3.1 Définitions

$\Omega$  étant l'univers (fini) associé à une expérience aléatoire  $\mathcal{E}$ , on appelle probabilité définie sur  $\Omega$  toute application  $\mathbb{P}$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}_+$  qui vérifie les axiomes suivants :

(A<sub>1</sub>)  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(A<sub>2</sub>) Pour tous événements incompatibles  $A$  et  $B$ , on a  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .

On appelle alors espace probabilisé le couple  $(\Omega, \mathbb{P})$ .



$\mathbb{P}$  est une mesure des événements, l'unité étant telle que la masse totale est égale à 1.

## 3.2 Propriétés

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad ; \quad 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0 \quad ; \quad A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

$A$  et  $B$  étant des événements quelconques, on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Si  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  est un système complet d'événements, on a :

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_k) = 1.$$

## 3.3 Construction d'une probabilité sur un univers fini

### • Cas général

Toute probabilité  $\mathbb{P}$  est entièrement déterminée par la donnée des nombres réels  $p_k = \mathbb{P}(\{k\})$  vérifiant :

$$\forall k \in \omega \quad p_k \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_k p_k = 1.$$

### • Probabilité uniforme

Sur un univers fini  $\Omega$ , l'hypothèse d'équiprobabilité définit la probabilité uniforme donnée par :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card} A}{\text{card} \Omega}.$$

$\text{card} A$  est souvent appelé « nombre de cas favorables » et  $\text{card} \Omega$  « nombre de cas possibles ».

### • Détermination empirique

En sciences expérimentales, la probabilité  $\mathbb{P}(A)$  est souvent estimée par la fréquence observée de l'événement  $A$ .



*Il faut veiller à ce que cette démarche ait un sens : la population considérée est-elle homogène ? l'événement  $A$  est-il clairement défini ? l'échantillon observé est-il représentatif et prélevé de façon aléatoire ?*

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Soit  $A_1, \dots, A_n$  des événements d'un même espace probabilisé. Montrez que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

**Exercice 2 :** Quelle est la probabilité pour que, dans un groupe de  $n$  personnes choisies au hasard, deux personnes au moins aient la même date d'anniversaire (on considérera que l'année a 365 jours tous équiprobables) ?

**Exercice 3 :** Dans une loterie, on vend  $n$  billets et on donne  $k$  lots.  
Quelle est la probabilité pour que le détenteur de  $m$  billets gagne  $x$  lots ?

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

## 1. Probabilité conditionnelle

### 1.1 Définition

Soit  $A$  un événement tel que  $P(A) > 0$ . En posant, pour tout événement  $B$  :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

on définit une probabilité appelée probabilité conditionnelle relative à  $A$ .

$\mathbb{P}_A(B)$  se note aussi  $\mathbb{P}(B|A)$  et se lit probabilité de  $B$  sachant  $A$ .



*La notation  $\mathbb{P}_A$  est la plus correcte pour désigner une probabilité. La notation  $\mathbb{P}(B|A)$  est la plus pratique, surtout lorsque l'écriture de  $A$  se complique. Mais ne croyez surtout pas que  $(B|A)$  est un événement.*

### 1.2 Propriétés

$\mathbb{P}_A$  est une probabilité ; elle en a donc toutes les propriétés. Avec l'autre écriture en ligne, on a donc :

$$\mathbb{P}(\overline{B}|A) = 1 - \mathbb{P}(B|A)$$

$$\mathbb{P}(B \cup C|A) = \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(C|A) - \mathbb{P}(B \cap C|A)$$



*Veillez à avoir toujours le même conditionnement  $A$ . N'inventez pas de formule du type :  $\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(B|\overline{A}) = ??$*

### 1.3 Formule des probabilités composées

C'est l'égalité précédente écrite en ligne :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A)$$

et sa généralisation qui commence par :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(C|A \cap B).$$

### 1.4 Formule des probabilités totales


Soit  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  un système complet d'événements de probabilités toutes non nulles. Pour tout événement  $B$ , on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}(B|A_k).$$

### 1.5 Formule de Bayes

Soit  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  un système complet d'événements de probabilités toutes non nulles et  $B$  un événement tel que  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}(B|A_j)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}(B|A_k)}.$$

 Les  $A_k$  sont des hypothèses pour l'événement  $B$ . La formule de Bayes donne les probabilités des hypothèses après réalisation de  $B$ . Son utilisation peut être facilitée par des représentations graphiques, comme un arbre.

## 2. Indépendance

### 2.1 Événements indépendants

#### • Définition

On dit que deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Si  $\mathbb{P}(A) > 0$  et  $\mathbb{P}(B) > 0$ , cela correspond à la fois :

- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$ , soit  $A$  ne dépend pas de  $B$  ;
- $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)$ , soit  $B$  ne dépend pas de  $A$ .

 L'indépendance de deux événements dépend de la probabilité choisie.


#### • Propriété

Si  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors il en est de même pour  $A$  et  $\bar{B}$ , pour  $\bar{A}$  et  $B$  et pour  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ .

### 2.2 Indépendance mutuelle de $n$ événements

Des événements  $A_1, \dots, A_n$  sont mutuellement indépendants, ou indépendants dans leur ensemble, si pour toute partie  $I$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

 Cette notion est plus forte que l'indépendance deux à deux.

Par exemple, il peut arriver que trois événements  $A, B, C$  soient deux à deux indépendants, mais ne vérifient pas la condition supplémentaire  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$  pour l'indépendance d'ensemble.

### 2.3 Expériences indépendantes

Supposons que des expériences aléatoires successives soient réalisées dans des conditions telles qu'elles soient, a priori, indépendantes. Pour chaque expérience, une probabilité a été retenue.

Considérons alors un événement  $A$ , relatif à l'ensemble des  $n$  expériences, noté  $A = A_1 \times \dots \times A_n$ , ce qui signifie qu'on s'intéresse à la réalisation successive des événements :  $A_1$  pour la première expérience ...  $A_n$  pour la  $n$ -ième expérience.

Alors, pour traduire la situation, on est amené à choisir comme probabilité de  $A$  :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) \times \cdots \mathbb{P}(A_n).$$

Ce choix de probabilité produit définit l'indépendance des expériences aléatoires. On se place dans cette hypothèse quand on parle d'expériences aléatoires successives.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** On considère une population de poulets parmi lesquels certains sont atteints d'un parasite.

Après traitement d'une partie des poulets, on remarque que :

- sur les 70 % de poulets non traités, 25 % sont atteints du parasite ;
- sur les 30 % de poulets traités, 12,5 % sont encore atteints du parasite.

On prélève au hasard un poulet (on admet que chaque poulet a la même probabilité d'être prélevé).

1. Quelle est la probabilité que ce poulet soit parasité ?
2. Sachant le poulet parasité, quelle est la probabilité qu'il soit traité ?

**Exercice 2 :** Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait, de plus, qu'au cours de cette épidémie il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

Quelle était la probabilité de tomber malade pour un non vacciné ?

**Exercice 3 :** 1. En supposant qu'à chaque naissance les probabilités d'avoir un garçon ou une fille sont égales, étudiez, dans l'ensemble des familles de deux enfants, l'indépendance des événements :

- A* la famille a des enfants des deux sexes ;
- B* il y a au plus une fille.

2. Même question dans l'ensemble des familles de trois enfants.

**Exercice 4 :** Deux joueurs lancent un dé à tour de rôle. Le premier qui obtient un as a gagné.

Quelle est la probabilité de victoire de chaque joueur ?

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

## 1. Généralités

### 1.1 Définition

Une variable aléatoire réelle  $X$  est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , on définit sa probabilité par :

$$P_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$$

Cette probabilité se note  $\mathbb{P}(X = a)$  si  $A = \{a\}$ ,  $\mathbb{P}(a < X < b)$  si  $A = ]a, b[ \dots$

### 1.2 Loi de probabilité

Une variable aléatoire  $X$  est discrète quand son univers-image  $\Omega_1 = X(\Omega)$  est fini ou dénombrable. (Cette année on supposera  $\Omega_1$  fini.)

Dans ce cas, connaître la loi de probabilité (ou distribution de probabilité) de  $X$ , c'est connaître les probabilités élémentaires :

$$\forall x_i \in \Omega_1 \quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i.$$



Il est toujours utile de vérifier que  $p_i \geq 0$  et  $\sum_i p_i = 1$ .

### 1.3 Fonction d'une variable aléatoire

Soit  $g$  une fonction de  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $Y = g(X)$  est une variable aléatoire dont l'univers-image (fini) est  $Y(\Omega) = g(\Omega_1)$  et les probabilités élémentaires :

$$\forall y_i \in g(\Omega_1) \quad \mathbb{P}(Y = y_i) = \sum_{g(x_k)=y_i} \mathbb{P}(X = x_k).$$



On regroupe tous les  $x_k$  dont l'image par  $g$  est égale à  $y_i$ .

## 2. Couple de variables aléatoires

### 2.1 Loi du couple

Soit  $X$  et  $Y$  définies sur le même espace probabilisé.

Dans le cas de variables à univers finis, connaître la loi du couple, c'est connaître les probabilités élémentaires :


$$\forall x_i \quad \forall y_j \quad \mathbb{P}(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = p_{ij}.$$

### 2.2 Loïs marginales

À partir de la loi du couple  $(X, Y)$ , on déduit les loïs marginales



$$\text{de } X : P(X = x_i) = \sum_j p_{ij} = p_{i\bullet} \quad \text{de } Y : P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij} = p_{\bullet j}$$

 Le terme lois marginales vient de la présentation avec un tableau des  $p_{ij}$ , de l'addition suivant les lignes et suivant les colonnes, et du report des totaux dans les marges du tableau.


En général, les lois marginales ne permettent pas de reconstituer la loi du couple  $(X, Y)$ .

## 2.3 Lois conditionnelles

Soit  $y_j$  un élément fixé de  $Y(\Omega)$  tel que  $\mathbb{P}(Y = y_j) \neq 0$ .

La loi conditionnelle de  $X$  sachant que  $Y = y_j$  est définie par les probabilités élémentaires :

$$\forall x_i \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}.$$

 Dans le cas fini, les probabilités  $p_{ij}$  étant présentées dans un tableau, cela revient à se limiter à la colonne  $j$  et à diviser les probabilités de la colonne par leur total, pour que la somme des probabilités conditionnelles soit égal à 1.

On définit de même les lois conditionnelles de  $Y$  pour  $X$  fixé.


## 2.4 Indépendance de deux variables aléatoires

### • Définition

$X$  et  $Y$  sont dites indépendantes quand tous les événements élémentaires  $X = x_i$  et  $Y = y_j$  sont indépendants ;

Avec les notations précédentes des lois marginales, cela s'écrit :

$$\forall (i, j) \quad p_{ij} = p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}.$$

 Dans le cas fini, les probabilités  $p_{ij}$  étant présentées en tableau, cela veut dire que :

- toutes les lignes sont proportionnelles, c'est-à-dire que les lois conditionnelles de  $Y$  pour  $X$  fixé sont les mêmes, ou encore que  $Y$  ne dépend pas de  $X$  ;
- et de même que  $X$  ne dépend pas de  $Y$ .

### • Théorème

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, les variables aléatoires  $g(X)$  et  $g(Y)$  le sont aussi.

## 2.5 Somme et produit de deux variables aléatoires

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé. Comme il s'agit de fonctions de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , la somme  $X + Y$  et le produit  $XY$  se définissent immédiatement.

Mais pour connaître les lois de probabilité, il faut connaître la loi conjointe du couple  $(X, Y)$  et pas seulement les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .

### • Somme

L'univers-image de  $Z = X + Y$  est constitué par les réels  $z_k$  du type  $z_k = x_i + y_j$  et on a :

$$\mathbb{P}(Z = z_k) = \sum_{x_i + y_j = z_k} p_{ij}$$

la somme étant étendue à tous les couples  $(i, j)$  tels que la somme  $x_i + y_j$  soit égale au réel fixé  $z_k$ .

- **Produit**

L'univers-image de  $Z = XY$  est constitué par les réels  $z_k$  du type  $z_k = x_i y_j$  et on a :

$$\mathbb{P}(Z = z_k) = \sum_{x_i \times y_j = z_k} p_{ij}$$

la somme étant étendue à tous les couples  $(i, j)$  tels que le produit  $x_i y_j$  soit égale au réel fixé  $z_k$ .

## 2.6 Extension à $n$ variables aléatoires

- **Indépendance mutuelle**

Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes si, et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

- **Théorème**

Si  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_p$  sont mutuellement indépendantes, alors  $f(X_1, \dots, X_n)$  et  $g(X_{n+1}, \dots, X_p)$  sont indépendantes.

## 3. Loïs usuelles

### 3.1 Loi uniforme discrète

- **Loi de probabilité**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une variable aléatoire  $X$  suit une loi uniforme discrète si  $X$  prend  $n$  valeurs possibles avec la probabilité  $\frac{1}{n}$  pour chaque valeur.

- **Espérance et variance**

Si  $X$  suit la loi uniforme discrète sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad ; \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

### 3.2 Loi de Bernoulli

- **Loi de probabilité**

$X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0; 1[$ , notée  $\mathcal{B}(p)$  ou  $\mathcal{B}(1, p)$  si  $X(\Omega) = \{0, 1\}$  et si :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q.$$

- **Situation modélisée**

On considère une épreuve ayant deux issues possibles :  $A$  avec une probabilité  $p$ ,  $\bar{A}$  avec une probabilité  $1 - p$ .

La variable aléatoire qui vaut 1 si  $A$  est réalisé et 0 si  $A$  n'est pas réalisé suit la loi  $\mathcal{B}(p)$ .

- **Espérance et variance**

$$E(X) = p \quad ; \quad V(X) = pq.$$

- **Somme**

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes de loi  $\mathcal{B}(p)$ , alors  $X_1 + \dots + X_n$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ .

### 3.3 Loi binomiale

- **Loi de probabilité**

$X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ , notée  $\mathcal{B}(n, p)$ , si l'univers-image est  $\llbracket 0, n \rrbracket$  et si :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

- **Situation modélisée**

On obtient une loi binomiale quand :

- on répète  $n$  fois la même expérience aléatoire, les  $n$  répétitions étant indépendantes entre elles ;
- on s'intéresse seulement à la réalisation ou non d'un événement fixé  $A$  de probabilité  $p$ , et on pose  $q = 1 - p$  ;
- on considère la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de fois où  $A$  a été réalisé.

En langage imagé, on dispose d'une urne constituée de boules présentant un type  $A$  dans la proportion  $p$ . On effectue  $n$  tirages avec remise et on compte le nombre de boules de type  $A$  obtenues.

- **Espérance et variance**

$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = npq.$$

- **Somme**

Si  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(n_1, p)$  et  $Y$  la loi  $\mathcal{B}(n_2, p)$  et si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $X + Y$  suit  $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$ .

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1** : En terminant d'effeuiller la marguerite, on compte :

1 point pour *un peu*, 3 points pour *beaucoup*, 5 points pour *passionnément*,  
10 points pour *à la folie*, 0 point pour *pas du tout*.

On effeuille successivement deux marguerites. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de points obtenu avec la première marguerite. Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres obtenus.

1. Déterminez la loi du couple  $(X, Y)$ .
2. Précisez les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ . Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 2** : Reprenez les données de l'exercice 1. Déterminez la distribution de probabilité de  $Z = X + Y$ .

**Exercice 3 :** Reprenez les données de l'exercice 1. Déterminez la distribution de probabilité de  $T = XY$ .

**Exercice 4 :** Reprenez les données de l'exercice 1. Calculez :

$E(X)$ ,  $V(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $V(Y)$ ,  $E(X+Y)$ ,  $V(X+Y)$ ,  $E(XY)$ ,  $V(XY)$ ,  $\text{Cov}(X, Y)$ ,  $r$ .

**Exercice 5 : 1.** En égalant les coefficients de  $X^k$  dans les deux membres de l'égalité :

$$(X-1)^{n_1}(X-1)^{n_2} = (X-1)^{n_1+n_2},$$

démontrez la formule de Vandermonde :

$$\sum_{a+b=k} \binom{n_1}{a} \binom{n_2}{b} = \binom{n_1+n_2}{k}.$$

**2.** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes telles que  $X$  suive la loi binomiale  $\mathcal{B}(n_1, p)$  et  $Y$  la loi  $\mathcal{B}(n_2, p)$ .

Montrez que  $X+Y$  suit la loi  $\mathcal{B}(n_1+n_2, p)$ .

**Exercice 6 :** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement  $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{3}\right)$  et  $\mathcal{B}\left(4; \frac{1}{2}\right)$ .

Calculez la probabilité que  $X = Y$ .

## 40 Espérance et variance

Soit  $X$  une variable aléatoire finie dont l'univers-image est  $\{x_1, \dots, x_n\}$  et les probabilités élémentaires  $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ .

### 1. Espérance

#### 1.1 Définition

$$E(X) = \sum_i x_i p_i.$$

#### 1.2 Théorème du transfert

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

#### 1.3 Inégalité de Markov

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}.$$

### 2. Variance, covariance

#### 2.1 Variance

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$

L'écart type est défini par  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

#### 2.2 Variable centrée réduite

Pour  $a$  et  $b$  réels, on a toujours :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad ; \quad V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Si  $V(X) \neq 0$ , en posant  $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  on obtient  $E(Y) = 0$  et  $V(Y) = 1$ .

$Y$  est la variable centrée réduite associée à  $X$ .

#### 2.3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$



*La majoration fournie est assez médiocre. Mais c'est une étape préliminaire pour démontrer des résultats plus importants.*

#### 2.4 Moments d'ordre $k$

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On définit les moments  $m_k$  d'ordre  $k$  et les moments centrés  $\mu_k$  d'ordre  $k$  par :

$$m_k = E(X^k) = \sum_i x_i^k p_i \quad ; \quad \mu_k = E[(X - E(X))^k]$$

#### 2.5 Covariance

La covariance de  $X$  et de  $Y$  est définie par :

$$\text{Cov}(X, Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

On a :  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$  et  $\text{Cov}(X, X) = V(X)$ .

## 2.6 Somme et produit de deux variables aléatoires

### • Cas général

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

### • Cas où $X$ et $Y$ sont indépendantes

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$



*La réciproque est fautive : on peut avoir  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  sans que  $X$  et  $Y$  soient indépendantes.*

## 2.7 Cas de $n$ variables aléatoires

### • Espérance d'une somme

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n).$$

### • Variance d'une somme

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Dans le cas où les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes, on a :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n).$$

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1** : Un veilleur de nuit doit ouvrir 12 portes avec 12 clés différentes mais non discernables.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il ouvre la première porte au  $k$ -ième essai sachant qu'à chaque fois qu'il choisit une clé, il ne la remet pas dans le trousseau si elle ne convient pas.

2. Le nombre total d'essais effectués définit une variable aléatoire  $X$  dont on demande de déterminer la distribution de probabilité, l'espérance mathématique et l'écart type. Pour chaque porte, le processus recommence comme pour la première porte, mais avec seulement les clés restantes.

**Exercice 2** : Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi binomiale  $\mathcal{B}(1, p)$ .

Calculez la covariance  $\text{Cov}(X + Y, X - Y)$ .

Montrez que  $X + Y$  et  $X - Y$  ne sont pas indépendantes.

**Exercice 3** : Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires de même loi, d'espérance  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ , supposées deux à deux indépendantes.

On pose :  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$  et  $Z_n = \frac{S_n}{n}$ . Montrez que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Z_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0.$$

# Corrigés des mathématiques

## 3. Limites et continuité

### Exercice 1

La suite définie par  $u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$  tend vers 0 et la suite de terme général

$f(u_n) = (-1)^n$  n'a pas de limite. La fonction  $f$  n'a donc pas de limite en 0.

### Exercice 2

Sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  on a :  $\sin x < x < \tan x$ . On en déduit :  $0 < \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} < \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}$ .

Or :  $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$ . (cf. fiche 6)

Il en résulte que :  $0 < f(x) < \tan \frac{x}{2}$  puis  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} \tan \frac{x}{2} = 0$ .

### Exercice 3

Posons  $u = \frac{\pi}{2} - x$  pour nous ramener à une variable  $u$  qui tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ .

On a alors :  $f(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{\pi - \pi + 2u} = \frac{1}{2} \frac{\sin u}{u}$ .

On a donc :  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{1}{2}$  (cf. fiche 6)

On peut donc prolonger par continuité  $f$  en  $\frac{\pi}{2}$  en posant  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ .

### Exercice 4

Si  $f$  était uniformément continue, dans la définition on pourrait choisir  $x' = 2x$  ce qui donnerait  $|f(x) - f(x')| = \frac{1}{2x}$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x} = +\infty$  on aboutit alors à une contradiction.

## 4. Fonctions dérivables

### Exercice 1

Considérons la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

C'est une fonction continue sur  $[0; 1]$ , dérivable sur  $]0; 1[$ , et telle que  $g(0) = g(1) = 0$ . D'après le théorème de Rolle, il existe donc au moins un réel  $c \in ]0; 1[$  tel que  $g'(c) = 0 = f(c)$ .

### Exercice 2

Comme  $f'(x) = i e^{ix}$ , si on pouvait appliquer l'égalité des accroissements finis, on aurait :

$$\exists c \in ]0; 2\pi[ \quad f(2\pi) - f(0) = 2\pi i e^{ic}.$$



Le premier membre est nul, le second membre ne l'est pas : il y a contradiction, ce qui montre que l'égalité des accroissements finis ne se généralise pas.

### Exercice 3

Il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction sinus entre 0 et  $x$ .

## 5. Logarithmes, exponentielles et puissances

### Exercice 1

- Les expressions  $\ln(x+1)$  et  $\ln(x+5)$  sont définies si, et seulement si :

$$x+1 > 0 \text{ et } x+5 > 0 \iff x > -1.$$

Pour ces valeurs, l'équation est équivalente à :

$$\ln(x+1)(x+5) = \ln 96 \iff (x+1)(x+5) = 96 \iff x^2 + 6x - 91 = 0.$$

Cette équation du second degré a pour racines 7 et  $-13$ . Seule la racine  $x = 7$  convient.

- La deuxième équation est définie pour  $x \neq -1$  et  $x \neq -5$ .

Les deux racines  $x = -13$  et  $x = 7$  conviennent.

### Exercice 2

$$(I) \iff e^{2x} + 1 - e^{2-x}(e^{2x} + 1) < 0 \iff (e^{2x} + 1)(1 - e^{2-x}) < 0.$$

Comme on a toujours  $e^{2x} + 1 > 0$ , on a :

$$(I) \iff 1 < e^{2-x} \iff 0 < 2-x \iff x < 2.$$

## 6. Fonctions circulaires et hyperboliques

### Exercice 1

La méthode la plus simple consiste à linéariser c'est-à-dire à transformer le produit en somme :

$$f(x) = \frac{1}{2} [\sin 5x + \sin x]. \text{ On en déduit : } \int f(x) dx = -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x.$$

### Exercice 2

La fonction définie par  $f(x) = \arctan(2x) + \arctan x$  est continue et strictement croissante de  $-\pi$  à  $\pi$  quand  $x$  décrit  $\mathbb{R}$ . L'équation  $f(x) = \frac{\pi}{4}$  a donc une solution, et une seule, et cette racine est positive car  $f(0) = 0$ . L'équation implique :

$$\tan[f(x)] = \tan \frac{\pi}{4} \iff \frac{3x}{1-2x^2} = 1 \iff 2x^2 + 3x - 1 = 0.$$

La seule racine positive de cette équation est  $\frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \approx 0,28$ .

### Exercice 3

Pour démontrer une égalité de ce genre, il vaut mieux partir du membre le plus compliqué et chercher à obtenir l'autre.

$$\frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x} = 2 \frac{e^{4x} + 1}{e^{4x} - 1} - \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{2e^{4x} + 2 - e^{4x} - 2e^{2x} - 1}{(e^{2x} - 1)(e^{2x} + 1)}$$

$$= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \operatorname{th} x.$$

## 7. Suites numériques

### Exercice 1

On a  $|u_n| \leq n \times \frac{1}{n} = 1$  car  $|\sin u| \leq |u|$  (cf. fiche 4)

### Exercice 2

Lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $v_n \sim_{+\infty} n^2 \times \frac{1}{n} = n$  car  $\sin u \sim_0 u$  (cf. fiche 10)

### Exercice 3

Chacun des  $n$  termes de la somme peut être encadré par des termes indépendants de  $k$  :

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1} \quad \text{d'où} \quad \frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + n} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1}$  la suite  $(u_n)$  converge vers 1.

### Exercice 4

La suite est bornée car  $|u_n| = 1$ .

Les deux suites extraites  $u_{6n} = 1$  et  $u_{6n+3} = -1$  sont convergentes avec des limites différentes.

La suite  $(u_n)$  est donc divergente.

### Exercice 5

Comme  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ , la suite  $(u_n)$  est croissante.

Comme  $v_{n+1} - v_n = \frac{1-n}{(n+1)!} < 0$ , la suite  $(v_n)$  est décroissante.

Et on a bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$ .

### Exercice 6

On montre d'abord par récurrence que  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$  pour tout  $n$ .

Comme  $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geq 0$ , on a  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n$ .

Comme  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n} \geq 0$ , la suite  $(u_n)$  est croissante.

Comme  $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$ , la suite  $(v_n)$  est décroissante.

La suite  $(u_n)$  croissante et majorée par  $v_0$  est convergente vers  $l_1$ .

La suite  $(v_n)$  décroissante et minorée par  $u_0$  est convergente vers  $l_2$ .

De  $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$  on déduit  $l_2 = \frac{l_1 + l_2}{2}$  puis  $l_1 = l_2$  : les suites sont adjacentes.

### Exercice 7

L'équation caractéristique  $r^2 + r + 1 = 0$  a pour racines :

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } r_2 = \overline{r_1}.$$

Les suites qui vérifient la relation de récurrence sont donc de la forme :

$$u_n = K_1 \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) + K_2 \sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right). \text{ Les conditions initiales donnent :}$$

$$\begin{cases} 1 = u_0 = K_1 \\ 0,5 = u_1 = -\frac{1}{2}K_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}K_2 \end{cases} \iff \begin{cases} K_1 = 1 \\ K_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

### Exercice 8

Par récurrence, on a  $u_n > 0$  pour tout  $n$ . La fonction  $f$  définie par  $f(s) = x^2 + 0,1875$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ .

On a  $u_1 = 0,4375$ , soit  $u_1 < u_0$ . On en déduit par récurrence que  $(u_n)$  est décroissante :

$$u_{n-1} < u_n \implies f(u_{n-1}) < f(u_n) \text{ soit } u_n < u_{n+1}.$$

La suite  $(u_n)$  décroissante et minorée par 0 converge vers une limite  $l$  qui vérifie :

$$l = l^2 + 0,1875 \iff l = 0,25 \text{ ou } l = 0,75.$$

Comme la suite décroît en partant de 0,5, la valeur 0,75 est impossible et  $l = 0,25$ .

## 8. Intégrales définies

### Exercice 1

Pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a  $1 \leq \text{ch } x \leq \text{ch } 1$ , d'où  $0 \leq x^n \text{ch } x \leq x^n \text{ch } 1$ . On en déduit :

$$0 \leq \int_0^1 x^n \text{ch } x \, dx \leq \text{ch } 1 \int_0^1 x^n \, dx.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{ch } 1 \int_0^1 x^n \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{ch } 1 \frac{1}{n+1} = 0$ , on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n \text{ch } x \, dx = 0.$$

### Exercice 2

En écrivant  $u_n = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$  on reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction continue définie par  $f(x) = \cos x$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . La suite  $(u_n)$  est donc convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \frac{2}{\pi}.$$

## 9. Calcul des primitives

### Exercice 1

On utilise une intégration par parties qui fait apparaître une fonction rationnelle :

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 & ; & \quad v(x) = \arctan x \\ u(x) &= x & ; & \quad v'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

### Exercice 2

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \sin 3x \, dx &= \operatorname{Im} \left( \int e^{(2+3i)x} \, dx \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{e^{(2+3i)x}}{2+3i} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( \frac{e^{2x} (\cos 3x + i \sin 3x) (2-3i)}{13} \right) = \frac{1}{13} e^{2x} (-3 \cos 3x + 2 \sin 3x).\end{aligned}$$

**Exercice 3**

En posant  $u = \frac{1}{2}t - 1$  on a  $t = 2u + 2$  et donc  $dt = 2u \, du$ . En n'oubliant pas les bornes, on obtient :

$$I = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \left[ \arccos u \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}.$$

**Exercice 4**

Le changement de variable  $u = \sin x$  conduit à :  $I = \int_0^1 \frac{1}{u^2 - 5u + 6} du$ .

La fraction rationnelle se décompose :  $\frac{1}{u^2 - 5u + 6} = \frac{-1}{u-2} + \frac{1}{u-3}$

et on obtient :  $I = \left[ \ln \left| \frac{u-3}{u-2} \right| \right]_0^1 = \ln \frac{4}{3}.$

**10. Comparaisons locales****Exercice 1**

- Si  $|x| < 1$ ,  $|u_n| = |x|^n \times \frac{1}{n!}$  est le produit de deux suites qui tendent vers 0, donc tend vers 0.
- Si  $|x| = 1$ ,  $|u_n| = \frac{1}{n!}$  tend vers 0.
- Si  $|x| > 1$ ,  $|u_n|$  tend encore vers 0 car on sait que  $|x|^n = o(n!)$ .

**Exercice 2**

Posons  $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}} = e^{A(x)}$  avec  $A(x) = \frac{1}{\tan^2 x} \ln(\cos x) \underset{0}{\sim} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}.$

Par ailleurs  $\ln(\cos x) = \ln(1 + \cos x - 1) \underset{0}{\sim} \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$

Par conséquent  $A(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}.$  On a donc  $\lim_{x \rightarrow 0} A(x) = -\frac{1}{2}$ , puis, exp étant continue,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{-0,5} \approx 0,607.$

**11. Formules de Taylor****Exercice 1**

En calculant  $f'(x)$ , on obtient :

$$f'(x) = \frac{1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}} = 1 - \frac{\frac{x^n}{n!}}{1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}} = 1 - \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Comme  $f(0) = 0$ , on en déduit :  $f(x) = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}).$

## Exercice 2

$$\begin{aligned}\text{On a : } (1+x)^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right) = \exp\left(\frac{1}{x} \left[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]\right) \\ &= \exp\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) = e \left[1 - \frac{x}{2} + o(x)\right]\end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2} + o(1)$$

ce qui démontre que la limite demandée est égale à  $-\frac{e}{2}$ .

## 12. Équations différentielles linéaires

### Exercice 1

L'équation s'écrit sous forme normalisée :  $y' + \frac{3}{x}y = 0$ .

$$\text{On a } A(x) = \int \frac{3}{x} dx = 3 \ln x.$$

La solution générale s'écrit donc :  $y(x) = K e^{-A(x)} = K \frac{1}{x^3}$ .

### Exercice 2

Considérons une fonction auxiliaire telle que  $y(x) = K(x) \frac{1}{x^3}$  soit solution de l'équation proposée.

Après avoir calculé  $K'(x)$ , reporté dans l'équation et simplifié, il reste :  $K'(x) = 1$ . On obtient  $K(x) = x + K$ , ce qui entraîne la solution générale cherchée :  $y(x) = \frac{1}{x^2} + K \frac{1}{x^3}$ .

### Exercice 3

On multiplie les deux membres de l'équation normalisée par  $e^{A(x)} = x^3$ , ce qui donne :

$$x^3 y' + 3x^2 y = (x^3 y)' = 1, \text{ puis : } x^3 y = x + K, \text{ et enfin : } y(x) = \frac{1}{x^2} + K \frac{1}{x^3}.$$

### Exercice 4

• L'équation caractéristique  $r^2 - 2r + 1 = 0 = (r-1)^2$  a 1 comme racine double. La solution générale de l'équation homogène s'écrit donc :

$$y_S(x) = (K_1 x + K_2) e^x \text{ avec } K_1 \text{ et } K_2 \text{ constantes réelles.}$$

• On cherche une solution particulière sous la forme  $y(x) = ax^2 + bx + c$ . Après avoir calculé  $y'(x)$  et  $y''(x)$  on aboutit à l'égalité de deux polynômes, c'est-à-dire à l'égalité de leurs coefficients. On obtient ainsi la solution particulière  $y_p(x) = 2x^2 + 1$ .

• La solution générale de l'équation s'écrit donc :

$$y_G(x) = (K_1 x + K_2) e^x + 2x^2 + 1 \text{ avec } K_1 \text{ et } K_2 \text{ constantes réelles.}$$

### Exercice 5

• L'équation caractéristique  $r^2 - 4r + 3 = 0$  a deux racines réelles distinctes 1 et 3. La solution générale de l'équation homogène associée s'écrit donc :  $y(x) = K_1 e^x + K_2 e^{3x}$ .

• Pour obtenir une solution particulière de l'équation complète, **on peut** procéder en deux

phases.

– On effectue le changement de fonction inconnue

$$y(x) = e^x z(x)$$

où  $z$  est une nouvelle fonction inconnue.

En reportant  $y = e^x z$ ,  $y' = e^x z + e^x z'$  et  $y'' = e^x z + 2e^x z' + e^x z''$  dans l'équation donnée, on est conduit à :  $z'' - 2z' = 2x + 1$ .

La disparition de  $z$  correspond à 1 racine de l'équation caractéristique.

– On cherche  $z$  sous la forme  $z = ax^2 + bx$ .

Avec  $z' = 2ax + b$  et  $z'' = 2a$ , on aboutit à  $a = -\frac{1}{2}$  et  $b = -1$ .

On obtient donc  $z = -\frac{1}{2}x - 1$  puis la solution particulière  $y = e^x \left( -\frac{1}{2}x - 1 \right)$

- La solution générale de l'équation est donc :  $y = K_1 e^x + K_2 e^{3x} + e^x \left( -\frac{1}{2}x - 1 \right)$ .

## 13. Séries numériques

### Exercice 1

Pour qu'une série  $\sum u_n$  converge, il est nécessaire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{3n+3} = \frac{2}{3}$  la série  $\sum \frac{2n+1}{3n+3}$  est grossièrement divergente.

### Exercice 2

Pour  $n \geq 3$ ,  $u_n$  existe et est positif. Au voisinage de  $+\infty$ , on peut écrire :

$$u_n = \ln \left( 1 + \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \ln \left( 1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{\pi^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{n^2}.$$

La série  $\sum u_n$  est donc de même nature que  $\pi^2 \sum \frac{1}{n^2}$  qui est une série de Riemann convergente.

### Exercice 3

On a :  $|u_n| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ . La série de terme général  $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  est une série de Riemann convergente. La série proposée est donc absolument convergente, donc convergente.

## 14. Rudiments de logique

### Exercice 1

La publicité dit : pas moderne  $\implies$  pas client.

La phrase synonyme est la contraposée : Si vous êtes client, alors vous êtes moderne.

Le publicitaire utilise le ressort psychologique : le rétablissement de la forme affirmative conduit à une meilleure appropriation du message. Et si certains se trompent en pensant moderne  $\implies$  client, c'est plus fort, mais ce n'est pas dit !

### Exercice 2

Il existe au moins une ville dont la partie commerciale comporte au moins un carrefour sans agence bancaire.

### Exercice 3

Raisonnons par l'absurde, c'est-à-dire supposons que  $\sqrt{2}$  soit rationnel et montrons que cela entraîne une contradiction.

Supposons que  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  avec  $a$  et  $b$  premiers entre eux (. fiche 22).

On a alors  $a = b\sqrt{2}$  qui entraîne  $a^2 = 2b^2$ .

2 divise  $a^2$ , donc aussi  $a$  puisque c'est un nombre premier.

On peut donc écrire  $a = 2a'$  avec  $a' \in \mathbb{N}$ , ce qui donne  $b^2 = 2a'^2$ .

Comme ci-dessus  $b$  est alors pair. Comme on est parti de la fraction  $\frac{a}{b}$  simplifiée, en obtenant  $a$  et  $b$  pairs, il s'agit d'une contradiction.

On rejette donc l'hypothèse faite et on conclut que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

### Exercice 4

Soit  $x$  et  $y$  deux réels quelconques. Deux cas sont à envisager :

- $x \leq y$ . On a alors  $\min(x, y) = x$  et  $\frac{1}{2} [x + y - |x - y|] = \frac{1}{2} [x + y - (y - x)] = x$ .
- $x \geq y$ . On a alors  $\min(x, y) = y$  et  $\frac{1}{2} [x + y - |x - y|] = \frac{1}{2} [x + y - (x - y)] = y$ .

### Exercice 5

Soit  $\mathcal{P}(n)$  la propriété :  $\sum_{i=1}^n (2i - 1)^2 = \frac{1}{3} n (4n^2 - 1)$ .

- Comme  $1^2 = \frac{1}{3} (4 - 1)$ ,  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- Pour  $k \in \mathbb{N}$  quelconque, montrons que  $\mathcal{P}(k)$  entraîne  $\mathcal{P}(k + 1)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1)^2 &= \sum_{i=1}^k (2i - 1)^2 + (2k + 1)^2 \\ &= \frac{1}{3} k (4k^2 - 1) + (2k + 1)^2 && \text{en utilisant } \mathcal{P}(k) \\ &= \frac{1}{3} (2k + 1) [k(2k - 1) + 3(2k + 1)] \\ &= \frac{1}{3} (2k + 1) [2k^2 + 5k + 3] = \frac{1}{3} (2k + 1)(k + 1)(2k + 3) \\ &= \frac{1}{3} (k + 1) [(2k + 1)(2k + 3)] = \frac{1}{3} (k + 1) [4(k + 1)^2 - 1]. \end{aligned}$$

## 16. Applications

**Exercice 1**

$$f(\{0\}) = \{f(0)\} = \{0\}. \quad f^{-1}(\{0\}) = \{x; f(x) = 0\} = \pi\mathbb{Z}.$$

**Exercice 2**

- $f$  est surjective si, pour tout élément  $(X, Y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , il existe toujours  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f(x, y) = (X, Y)$ .

On a nécessairement  $x = X - y$ , puis, en reportant :

$$Y = 2(X - y) + y^3, \text{ soit } y^3 - 2y + 2X - Y = 0.$$

La fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(y) = y^3 - 2y + 2X - Y$  est continue, négative lorsque  $y$  tend vers  $-\infty$ , positive lorsque  $y$  tend vers  $+\infty$ . Il existe donc au moins un réel  $y$  tel que  $\varphi(y) = 0$ .

Comme il existe toujours  $x$  et  $y$ ,  $f$  est surjective.

- On a  $f(1, 0) = (1, 2)$ . Existe-t-il un autre couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f(x, y) = (1, 2)$  ? Ceci est équivalent à :

$$x = 1 - y \quad \text{et} \quad y^3 - 2y = 0.$$

Pour obtenir un nouvel élément, il suffit de prendre  $y = \sqrt{2}$  et  $x = 1 - \sqrt{2}$ . On obtient donc  $f(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(1, 0)$ .

Un exemple de deux éléments distincts ayant la même image démontre que  $f$  n'est pas injective.

**17. Relations****Exercice 1**

- Dans  $]0; +\infty[$ , on peut écrire :  $x\mathcal{R}y \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y} \iff f(x) = f(y)$

où  $f$  est la fonction de  $]0; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

$\mathcal{R}$  est donc la relation d'équivalence associée à  $f$ .

- Pour préciser le nombre d'éléments d'une classe d'équivalence, il faut dresser le tableau de variation de  $f$  et utiliser la théorème des valeurs intermédiaires. Vous obtenez ainsi :

– Si  $x \in ]0; 1]$ , ou si  $x = e$ , la classe de  $x$  est réduite à  $x$ .

– Si  $x \in ]1; e[ \cup ]e; +\infty[$ , la classe de  $x$  comporte deux éléments.

**Exercice 2**

- On a toujours  $x \leq x$  et  $y \leq y$ , soit  $(x, y) < (x, y)$ . La relation  $<$  est donc réflexive.
- Si  $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$  et  $(x_2, y_2) < (x_1, y_1)$ , alors  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ . La relation  $<$  est donc antisymétrique.
- Si  $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$  et  $(x_2, y_2) < (x_3, y_3)$ , de  $x_1 \leq x_2$  et  $x_2 \leq x_3$ , on déduit :  $x_1 \leq x_3$  ; de même  $y_1 \leq y_3$ . On a donc  $(x_1, y_1) < (x_3, y_3)$  et la relation  $<$  est transitive.
- $<$  est donc une relation d'ordre. Cet ordre est partiel car, par exemple,  $(1, 2)$  et  $(2, 1)$  ne peuvent pas être comparés.

**18. Calculs algébriques****Exercice 1**



- En partant de l'égalité donnée (cf. fiche 27) :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

la façon la plus rapide d'obtenir les valeurs des coefficients est :

- en multipliant les deux membres par  $k$ , avec  $k = 0$  on obtient  $a = \frac{1}{2}$  ;
- en multipliant les deux membres par  $k + 1$ , avec  $k = -1$  on obtient  $b = -1$  ;
- en multipliant les deux membres par  $k + 2$ , avec  $k = -2$  on obtient  $c = \frac{1}{2}$  .

- On a donc :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} . \end{aligned}$$

## Exercice 2

### Première solution

Pour tout réel  $x$ , on a :  $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$  .

On peut développer  $(1+x)^n$  et  $(1+x)^{2n}$  à l'aide de la formule du binôme.

Dans le second membre, le coefficient de  $x^n$  est  $\binom{2n}{n}$ .

Dans le premier membre, pour obtenir tous les termes en  $x^n$ , il faut multiplier chaque monôme  $\binom{n}{p}x^p$  (avec  $0 \leq p \leq n$ ) du premier développement par le monôme  $\binom{n}{n-p}x^{n-p}$  du deuxième développement.

L'égalité des coefficients de  $x^n$  conduit donc à :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \binom{n}{n-p} = \sum_{p=0}^n \left[ \binom{n}{p} \right]^2 ,$$

$$\text{car } \binom{n}{n-p} = \binom{n}{p} .$$

### Deuxième solution (avec fiche 36)

Soit  $E$  un ensemble à  $2n$  éléments. Le nombre de parties de  $E$  comportant  $n$  éléments est égal à  $\binom{2n}{n}$ .

Fixons dans  $E$  un sous-ensemble  $A$  à  $n$  éléments. Son complémentaire  $\bar{A}$  a aussi  $n$  éléments.

Toute partie  $X$  de  $E$  à  $n$  éléments est la réunion des deux ensembles disjoints  $X \cap A$  et  $X \cap \bar{A}$ .

$X \cap A$  peut avoir  $p$  éléments avec  $0 \leq p \leq n$ .  $X \cap \bar{A}$  a alors  $n - p$  éléments.

Dans  $A$ , il y a  $\binom{n}{p}$  façons de choisir une partie  $X \cap A$  à  $p$  éléments.

Dans  $\overline{A}$ , il y a  $\binom{n}{n-p}$  façons de choisir une partie  $X \cap \overline{A}$  à  $n-p$  éléments.

Pour  $p$  fixé, il y a donc  $\binom{n}{p} \times \binom{n}{n-p}$  façons de choisir  $X$ . Comme  $p$  peut varier de 0 à  $n$ , le

nombre de parties de  $E$  comportant  $n$  éléments est égal à  $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \binom{n}{n-p}$ . Donc

$$\binom{2n}{n} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \binom{n}{n-p} = \sum_{p=0}^n \left[ \binom{n}{p} \right]^2.$$

### Exercice 3

L'algorithme du pivot de Gauss permet d'écrire des systèmes équivalents :

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 11y - 10z = 1 \\ 22y - 20z = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 5L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 11y - 10z = 1 \\ 0 = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_2 - L_3 \end{array}$$

Le système est donc impossible.

## 19. Nombres complexes

### Exercice 1

$$z_1^3 = (1+i)^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i.$$

$$z = (-2 + 2i)(\sqrt{3} + i) = -2(1 + \sqrt{3}) - 2(1 - \sqrt{3})i.$$

### Exercice 2

Des formes trigonométriques :  $z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$  et  $z_2 = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$  on déduit :

$$z = 4\sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}.$$

Avec le résultat de l'exercice 1, on conclut :

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} ; \quad \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.$$

### Exercice 3

$$\text{On a : } \Delta = (7 + 13i)^2 - 4(1+i)(2+60i) = 112 - 66i \neq 0.$$

On cherche d'abord les racines carrées de  $\Delta$ , c'est-à-dire les réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$(a + ib)^2 = 112 - 66i.$$

En écrivant l'égalité des parties réelles, des parties imaginaires et des modules, on obtient :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 112 \\ 2ab = -66 \\ a^2 + b^2 = 130 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 121 \\ b^2 = 9 \\ ab < 0 \end{cases}$$

Les racines de  $\Delta$  sont  $-11 + 3i$  et  $11 - 3i$ . Les racines de (E) sont donc :

$$z_1 = \frac{7 + 13i + (-11 + 3i)}{2(1 + i)} = 3 + 5i ; z_2 = \frac{7 + 13i + (11 - 3i)}{2(1 + i)} = 7 - 2i.$$

### Exercice 4

$A$  est la partie réelle de  $B = \sum_{k=0}^n e^{ikt} = \sum_{k=0}^n (e^{it})^k$  qui est la somme des  $n + 1$  premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison  $e^{it}$ .

Si  $e^{it} = 1$ , soit  $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ , alors  $B = n + 1$  et  $A = n + 1$ .

$$\text{Si } e^{it} \neq 1, \text{ alors } B = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{-2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$\text{ce qui entraîne : } A = \frac{-\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

### Exercice 5

$$B \text{ est la partie réelle de : } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} = (1 + e^{ix})^n = e^{i\frac{x}{2}} \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)^n.$$

$$\text{On obtient donc : } B = 2^n \left(\cos \frac{x}{2}\right)^n \cos\left(n\frac{x}{2}\right).$$

### Exercice 6

Comme  $z = b$  n'est pas solution de (E) puisque  $a \neq b$ , l'équation est équivalente à :  $\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n = 1$  ; d'où les racines  $\frac{z_k - a}{z_k - b} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$  avec  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ .

Pour  $k = 0$ , on aurait  $a = b$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

$$\text{Pour } k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \text{ on obtient : } z_k = \frac{a - b e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par  $e^{-i\frac{k\pi}{n}}$  on aboutit à la forme plus simple :

$$z_k = \frac{a+b}{2} + i \frac{a-b}{2} \cot\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

### Exercice 7

Les images de 1,  $z$  et  $1 + z^2$  sont alignées si, et seulement si,  $\frac{z-1}{z^2}$  est réel.

En posant  $z = x + iy$ , on a  $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ , puis :

$$\frac{z-1}{z^2} = \frac{(x-1+iy)(x^2-y^2-2xyi)}{(x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2}$$

dont la partie imaginaire est nulle si, et seulement si :

$$y(x^2 - y^2) - 2xy(x-1) = 0 \iff y = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 - 2x = 0 = (x-1)^2 + y^2.$$

L'ensemble des solutions est donc constitué par l'axe des abscisses et le cercle de centre (1;0) et de rayon 1.

### Exercice 8

Nous pouvons écrire  $z' = \frac{i}{3}z + \frac{1}{3} + i$ . La transformation est la similitude :

- de rapport  $\left|\frac{i}{3}\right| = \frac{1}{3}$  ;
- d'angle  $\arg\left(\frac{i}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$  ;
- de centre  $S$  d'affixe  $z$  tel que  $3z = iz + 1 + 3i \iff z = i$ .

## 20. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

### Exercice 1

1. • La décomposition en facteurs premiers des deux nombres s'écrit :

$$143 = 11 \times 13 \quad ; \quad 100 = 2^2 \times 5^2.$$

Comme il n'y a aucun facteur premier commun à ces deux décompositions, les nombres 100 et 143 sont premiers entre eux.

- L'algorithme d'Euclide conduit à une deuxième démonstration de ce résultat. Il prouve l'existence de nombres  $u$  et  $v$  du théorème de Bézout, en fournissant explicitement une solution particulière.

Il s'agit de réaliser une suite de divisions euclidiennes : de 143 par 100, puis de 100 par le reste  $r_1$  obtenu, puis de  $r_1$  par  $r_2 \dots$  On obtient :

$$\begin{aligned} 143 &= 100 \times 1 + 43 \\ 100 &= 43 \times 2 + 14 \\ 43 &= 14 \times 3 + 1 \end{aligned}$$

Comme cet algorithme se termine par 1, c'est une nouvelle preuve que 143 et 100 sont premiers entre eux. Nous allons en déduire un exemple de nombres  $u$  et  $v$  tels que :

$$143u + 100v = 1,$$

par des substitutions successives des restes en partant de la dernière égalité où figure déjà le 1 du second membre.

$$\begin{aligned} 1 &= 43 - 14 \times 3 \\ &= 43 - (100 - 43 \times 2) \times 3 = (-3) \times 100 + 7 \times 43 \\ &= (-3) \times 100 + 7 \times (143 - 100) = 7 \times 143 + (-10) \times 100. \end{aligned}$$

Les nombres  $u_0 = 7$  et  $v_0 = -10$  vérifient donc  $143u_0 + 100v_0 = 1$ .

2. Considérons des entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $143u + 100v = 1$ .

En retranchant l'égalité précédente, on obtient :

$$143(u - u_0) = 100(v_0 - v).$$

143 divise donc  $100(v_0 - v)$ . Comme 143 est premier avec 100, on en déduit, d'après le théorème de Gauss, que 143 divise  $v_0 - v$ , c'est-à-dire qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $v_0 - v = 143k$ .

En reportant, on obtient aussi  $u - u_0 = 100k$ .

Réciproquement, tous les nombres  $u$  et  $v$  ainsi obtenus conviennent.

L'ensemble  $S$  des solutions  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  de l'équation  $143u + 100v = 1$  est donc :

$$S = \{(7 + 100k, -10 - 143k) ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

### Exercice 2

En reportant la première égalité dans la deuxième, on obtient :

$$m + d = d^2 + d = d(d + 1) = 156.$$

$d$  et  $d + 1$  sont donc des diviseurs de 156. Dans  $\mathbb{N}$ , les diviseurs de  $156 = 2^2 \times 3 \times 13$  sont :  
 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 26, 39, 52, 78, 156\}$ .

On a donc  $d = 12$  et  $m = 144$ .

On sait que  $md = ab$ . Introduisons les nombres  $a'$  et  $b'$ , premiers entre eux avec  $a' \geq b'$ , tels que  $a = 12a'$  et  $b = 12b'$ .

En reportant dans la dernière égalité, on obtient :

$$a'b' = 12.$$

Deux possibilités sont à envisager.

–  $a' = 12$  et  $b' = 1$ , qui conduit à la solution  $a = 144$  et  $b = 12$  ;

–  $a' = 4$  et  $b' = 3$ , qui conduit à la solution  $a = 48$  et  $b = 36$ .

### Exercice 3

- Si l'écriture décimale de  $n$  comporte  $k$  chiffres, on a :

$$n = a_{k-1} 10^{k-1} + a_{k-2} 10^{k-2} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 \quad \text{avec } a_{k-1} \neq 0.$$

On en déduit que :

$$10^{k-1} \leq n < 10^k.$$

La fonction  $\ln$  étant strictement croissante, ces inégalités sont équivalentes à :

$$(k - 1) \ln 10 \leq \ln n < k \ln 10,$$

soit  $k - 1 \leq \frac{\ln n}{\ln 10} < k$ . Par conséquent,  $k = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 10} \right\rfloor + 1$ .

Ici, avec  $n = 2013^{2014}$ , on a  $\frac{\ln n}{\ln 10} \approx 6653,9$ . Donc  $k = 6654$ .

- Déterminer le dernier chiffre de l'écriture décimale de  $n$ , c'est étudier des congruences modulo 10 puisqu'on va éliminer des multiples de 10.

On commence par :  $2013^{2014} \equiv 3^{2014}$ . Puis on écrit les puissances successives de 3 jusqu'à obtenir 1 :

$$3^1 \equiv 3 \quad ; \quad 3^2 \equiv 9 \quad ; \quad 3^3 \equiv 7 \quad ; \quad 3^4 \equiv 1$$

On fait alors la division euclidienne de 2014 par 4 :  $2014 = 503 \times 4 + 2$ .

On en déduit :  $n \equiv 3^{503 \times 4 + 2} \equiv (3^4)^{503} \times 3^2 \equiv 9$ . Le dernier chiffre de l'écriture décimale de  $n$  est donc 9.

## 21. Structure de groupe

### Exercice 1

Soit  $G_1$  et  $G_2$  deux sous-groupes de  $G$ .

- Si  $G_1 \subset G_2$  on a  $G_1 \cup G_2 = G_2$  qui est bien un sous-groupe de  $G$  ; de même si  $G_2 \subset G_1$ .
- Pour montrer que, si  $G_1 \cup G_2$  est un sous-groupe de  $G$ , alors il y a une inclusion, on va démontrer la contraposée et utiliser un raisonnement par l'absurde.

Supposons donc que  $G_1 \not\subset G_2$ , c'est-à-dire qu'il existe  $a \in G_1$  avec  $a \notin G_2$

et que  $G_2 \not\subset G_1$  c'est-à-dire qu'il existe  $b \in G_2$  avec  $b \notin G_1$ .

Utilisons un raisonnement par l'absurde pour démontrer que  $G_1 \cup G_2$  n'est pas un sous-groupe de  $G$ . Supposons donc que  $G_1 \cup G_2$  soit un sous-groupe. On a alors  $ab \in G_1 \cup G_2$ .

Si  $ab \in G_1$ , avec  $a \in G_1$ , on en déduit  $b = a^{-1}(ab) \in G_1$  ;

si  $ab \in G_2$ , avec  $b \in G_2$ , on en déduit  $a \in G_2$ .

Dans tous les cas on obtient une contradiction.  $G_1 \cup G_2$  n'est donc pas un sous-groupe de  $G$ .

## Exercice 2

Décomposons la permutation  $\sigma$  en produit de cycles à supports disjoints :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 & 10 & 5 \\ 8 & 9 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On peut en déduire une décomposition de  $\sigma$  en  $2 + 4 = 6$  transpositions. La permutation  $\sigma$  est donc paire.

## 22. Structures d'anneau et de corps

### Exercice 1

a) Supposons qu'il existe un entier  $n$  tel que  $x^n = 0$ .

$y = 1 + x + \dots + x^{n-1}$  est un élément de  $A$ .

En développant grâce aux propriétés d'un anneau, on obtient :

$$(1 - x)y = (1 - x)(1 + x + \dots + x^{n-1}) = 1 - x^n = 1.$$

L'élément  $1 - x$  est donc inversible, et a pour inverse  $y$ .

b) •  $x$  et  $y$  étant supposés nilpotents, il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $x^p = 0$ , et  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $y^q = 0$ . L'anneau étant commutatif, on a  $(xy)^p = x^p y^p$ .

Comme  $x^p = 0$ , on en déduit que  $(xy)^p = 0$ , ce qui prouve que  $xy$  est nilpotent.

• Considérons  $(x + y)^n$  avec  $n = p + q$ . On peut le développer en utilisant la formule du binôme car l'anneau est commutatif :

$$(x + y)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k y^{p+q-k}.$$

– Pour  $0 \leq k \leq p$ , on a  $p+q-k \geq q$ , qui entraîne  $y^{p+q-k} = y^q y^{p-k} = 0$ , puis  $\binom{p+q}{k} x^k y^{p+q-k} = 0$ .

– Pour  $p \leq k \leq p+q$ , on a  $x^k = x^p x^{k-p} = 0$ , et  $y^{p+q-k}$  existe puisque  $p+q-k \geq 0$ . Le terme correspondant est donc nul lui aussi.

Tous les termes de la somme sont donc nuls.

On a donc montré qu'il existe  $n = p+q$  tel que  $(x+y)^n = 0$ , c'est-à-dire que  $x+y$  est nilpotent.

## 23. Polynômes

### Exercice 1

Il existe des polynômes  $Q_n$  et  $R_n$  de  $\mathbb{R}[X]$  uniques tels que :

$$(*) \quad (\cos \alpha + \sin \alpha X)^n = (X^2 + 1)^2 Q_n + R_n \quad \text{avec} \quad \deg R_n \leq 3.$$

Si  $n \leq 3$ , alors  $R_n = A_n$ .

Supposons donc que  $n \geq 4$ , et écrivons  $R_n = a + bX + cX^2 + dX^3$ .

En donnant à  $X$  la valeur  $i$ , on obtient  $R_n(i) = e^{in\alpha} = a - c + (b - d)i$ .

On en déduit :

$$\begin{cases} a - c &= \cos n\alpha \\ b - d &= \sin n\alpha \end{cases}$$

Dérivons l'égalité (\*). Il vient :

$$n \sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha X)^{n-1} = (X^2 + 1) \left[ (X^2 + 1) Q'_n + 4X Q_n \right] + b + 2cX + 3dX^2.$$

En prenant la valeur en  $i$  des fonctions polynômes associées, on obtient :

$$n \sin \alpha e^{i(n-1)\alpha} = b - 3d + 2ci,$$

d'où :

$$\begin{cases} b - 3d &= n \sin \alpha \cos(n-1)\alpha \\ 2c &= n \sin \alpha \sin(n-1)\alpha \end{cases}$$

Des quatre équations obtenues, on déduit les coefficients cherchés :

$$\begin{cases} a &= \frac{n}{2} \sin \alpha \sin(n-1)\alpha + \cos n\alpha \\ b &= \frac{1}{2} (-n \sin \alpha \cos(n-1)\alpha + 3 \sin n\alpha) \\ c &= \frac{n}{2} \sin \alpha \sin(n-1)\alpha \\ d &= \frac{1}{2} (-n \sin \alpha \cos(n-1)\alpha + \sin n\alpha) \end{cases}$$

## Exercice 2

On peut chercher les racines de  $P$  dans  $\mathbb{C}$  et les regrouper par paires de racines conjuguées. Mais on va plus vite avec les transformations algébriques :

$$X^8 + X^4 + 1 = (X^4 + 1)^2 - X^4 = (X^4 + 1 + X^2)(X^4 + 1 - X^2)$$

$$(X^4 + 1 + X^2) = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + 1 + X)(X^2 + 1 - X)$$

$$(X^4 + 1 - X^2) = (X^2 + 1)^2 - 3X^2 = (X^2 + 1 + \sqrt{3}X)(X^2 + 1 - \sqrt{3}X)$$

Donc :

$$P = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1).$$

## Exercice 3

L'énoncé fait penser aux relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. On va donc chercher les nombres  $x_1, x_2, x_3$  comme racines de :

$$(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$$

où :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 \quad ; \quad \sigma_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 \quad ; \quad \sigma_3 = x_1 x_2 x_3.$$

On connaît  $\sigma_1 = 2$ , puis on calcule :

$$4 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\sigma_2 = 2 + 2\sigma_2 \quad \text{d'où : } \sigma_2 = 1.$$

$$\begin{aligned} 8 &= (x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) - 3x_1 x_2 x_3 \\ &= 8 + 6 - 3\sigma_3 \quad \text{d'où : } \sigma_3 = 2. \end{aligned}$$

Les nombres cherchés sont donc les racines du polynôme :

$$P = X^3 - 2X^2 + X - 2.$$

Comme  $P(2) = 0$ ,  $P$  est divisible par  $X - 2$ . Après avoir effectué la division on obtient :

$$P = (X - 2)(X^2 + 1).$$

Les nombres cherchés sont donc : 2, i, -i.

## 24.Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

### Exercice 1

- On calcule le pgcd de  $P$  et  $P'$  à l'aide de l'algorithme d'Euclide, ce qui conduit à réaliser des divisions euclidiennes successives :

$$P = P'Q_1 + R_1 \quad \text{avec} \quad Q_1 = \frac{1}{4}X - \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad R_1 = -3X^2 + 12X - 12,$$

$$P' = R_1Q_2 + R_2 \quad \text{avec} \quad Q_2 = -\frac{4}{3}X - \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad R_2 = 0.$$

Le pgcd de  $P$  et  $P'$  est le polynôme unitaire associé au dernier reste non nul, soit  $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$ .

- 2 est racine double de  $P$  et de  $P'$ . C'est donc une racine d'ordre au moins trois de  $P$ .

En mettant  $(X - 2)^3$  en facteur dans  $P$ , il vient :

$$P = (X - 2)^3(X + 2).$$

### Exercice 2

- Vous pouvez décomposer d'abord  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , et regrouper les racines non réelles, qui sont conjuguées car  $A$  et  $B$  sont dans  $\mathbb{R}[X]$ .

- Vous pouvez aussi obtenir directement :

$$A = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1),$$

$$B = (X + 1)(X^2 - X + 1).$$

Tous ces polynômes sont irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  car les trinômes sont à discriminants  $< 0$ .

2. • Comme les deux décompositions de la question précédente ne comporte aucun facteur commun ou associé, les polynômes  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux. Leur pgcd est donc égal à 1, puisqu'on a décidé qu'un pgcd serait unitaire pour avoir l'unicité.

- Mais, pour la question suivante, nous allons démontrer à nouveau ce résultat, en utilisant l'algorithme d'Euclide, et le théorème de Bézout.

On effectue des divisions euclidiennes successives :

$$A = BQ_1 + R_1 \quad \text{avec} \quad Q_1 = X \quad \text{et} \quad R_1 = -X + 1,$$

$$B = R_1Q_2 + R_2 \quad \text{avec} \quad Q_2 = -X^2 - X - 1 \quad \text{et} \quad R_2 = 2.$$

On en déduit :

$$2 = B - R_1Q_2 = B - (A - BQ_1)Q_2 = B(1 + Q_1Q_2) - AQ_2;$$

soit :

$$\frac{1}{2}(X^2 + X + 1)A - \frac{1}{2}(X^3 + X^2 + X - 1)B = 1.$$



Les polynômes  $U_0 = \frac{1}{2}(X^2 + X + 1)$  et  $V_0 = -\frac{1}{2}(X^3 + X^2 + X - 1)$  vérifient l'identité de Bézout, ce qui est une nouvelle preuve que  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux.

Il s'agit de l'unique couple vérifiant cette identité avec la condition sur les degrés :  $d^\circ U_0 < d^\circ B = 3$  et  $d^\circ V_0 < d^\circ A = 4$ .

3. Soit  $U$  et  $V$  des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  qui vérifient  $AU + BV = 1$ .

Comme  $AU_0 + BV_0 = 1$ , on a donc  $A(U - U_0) = B(V_0 - V)$ .

$A$  divise  $B(V_0 - V)$ , et il est premier avec  $B$ . D'après le théorème de Gauss, il divise  $V_0 - V$  ; il existe donc  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $V_0 - V = PA$ .

En reportant, on obtient  $U - U_0 = PB$  ; d'où  $U = U_0 + PB$  et  $V = V_0 - PA$ .

De plus, pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on a bien  $A(U_0 + PB) + B(V_0 - PA) = 1$ .

L'ensemble  $S$  des solutions  $(U, V)$  de  $AU + BV = 1$  est donc :

$$S = \{(U_0 + PB, V_0 - PA) ; P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

## 25. Fractions rationnelles

### Exercice 1

- Il n'y a pas de partie entière, puisque le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur.

- La décomposition de  $F$  en éléments simples est de la forme :

$$F = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{(X-1)},$$

où  $a, b, c, d$  sont des réels à déterminer.

- En remplaçant  $X$  par  $-1$  dans  $(X+1)^2 F$ , on obtient  $a = -\frac{1}{4}$ .

- En remplaçant  $X$  par  $1$  dans  $(X-1)^2 F$ , on obtient  $c = \frac{1}{4}$ .

- La fonction rationnelle associée à  $F$  est impaire. L'unicité de la décomposition en éléments simples entraîne alors :

$$a = -c \quad \text{et} \quad b = d.$$

- En multipliant par  $X$  et en faisant tendre  $X$  vers  $+\infty$ , nous obtenons de plus  $b + d = 0$ .

- Par conséquent  $b = 0$ . La décomposition est donc :

$$F = \frac{1}{4} \left( \frac{-1}{(X+1)^2} + \frac{1}{(X-1)^2} \right).$$

### Exercice 2

- Considérons la fraction rationnelle  $F = \frac{X^{2n} + 1}{X^{2n} - 1} = \frac{A}{B}$ .

Sa partie entière est égale au quotient de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ , soit 1.

- Dans  $\mathbb{C}$ ,  $B$  admet  $2n$  racines simples  $\alpha_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right)$ , avec  $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$ .

Sa factorisation en polynômes irréductibles s'écrit :

$$B = \prod_{k=0}^{2n-1} (X - \alpha_k).$$

La décomposition de  $F$  en éléments simples, dans  $\mathbb{C}(X)$ , est donc de la forme :

$$F = 1 + \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{a_k}{X - \alpha_k},$$

où les  $a_k$  sont des nombres complexes à déterminer.

Comme les pôles sont simples, on sait que :

$$a_k = \frac{A(\alpha_k)}{B'(\alpha_k)} = \frac{\alpha_k^{2n} + 1}{2n\alpha_k^{2n-1}} = \frac{2}{2n\alpha_k^{2n-1}} = \frac{\alpha_k}{n}.$$

Dans  $\mathbb{C}(X)$ , la décomposition de  $F$  est donc :

$$F = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\alpha_k}{X - \alpha_k}.$$

## 26. Structure d'espace vectoriel

### Exercice 1

- Tout vecteur  $z$  de  $\text{Vect}(y_1, x_2, \dots, x_n)$  peut s'écrire sous la forme  $z = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$  où les  $\alpha_i$  sont des scalaires.

On a donc aussi  $z = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + (\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2) x_2 + \dots + (\alpha_1 \lambda_n + \alpha_n) x_n$ , ce qui prouve que  $z \in \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

- Réciproquement, tout vecteur de  $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} z &= \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n \\ &= \frac{\beta_1}{\lambda_1} (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) + \left( \beta_2 - \frac{\beta_1 \lambda_2}{\lambda_1} \right) x_2 + \dots + \left( \beta_n - \frac{\beta_1 \lambda_n}{\lambda_1} \right) x_n. \end{aligned}$$

Il appartient donc aussi à  $\text{Vect}(y_1, x_2, \dots, x_n)$ .

- La double inclusion que nous venons de démontrer prouve l'égalité :

$$\text{Vect}(y_1, x_2, \dots, x_n) = \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Remarquez bien l'importance de l'hypothèse  $\lambda_1 \neq 0$ .

D'autre part, retenez le résultat de cet exercice. Comme l'espace vectoriel engendré n'est pas modifié par l'opération élémentaire effectuée, nous obtenons un outil efficace dans la recherche du rang d'une famille de vecteurs.

### Exercice 2

Montrons que la relation  $\sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k = 0$  entraîne  $\lambda_k = 0$  pour tout  $k$ .

Cette hypothèse signifie que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k e^{\alpha_k x} = 0.$$

Divisons cette expression par  $e^{\alpha_1 x}$  et faisons tendre  $x$  vers  $-\infty$  ; on obtient  $\lambda_1 = 0$ .

Si  $n = 2$ , l'expression se réduit à  $\lambda_2 e^{\alpha_2 x} = 0$  qui entraîne  $\lambda_2 = 0$ .

Si  $n > 2$ , l'expression se réduit à  $\sum_{k=2}^n \lambda_k e^{\alpha_k x} = 0$  et on poursuit de manière analogue :

en divisant par  $e^{\alpha_2 x}$  et en faisant tendre  $x$  vers  $-\infty$ , on obtient  $\lambda_2 = 0$  et ainsi de suite jusqu'à  $\lambda_{n-1} = 0$ .

Pour terminer, la relation  $\lambda_n e^{\alpha_n x} = 0$  entraîne  $\lambda_n = 0$ .

On a ainsi démontré que la famille proposée est libre.

### Exercice 3

• Démontrons d'abord l'unicité d'une décomposition. Soit  $f$  une fonction quelconque de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et supposons qu'il existe une fonction paire  $g$  et une fonction impaire  $h$  telles que  $f = g + h$ . On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = g(x) + h(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x).$$

On a donc, pour tout  $x$ ,  $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  et  $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ , ce qui prouve l'unicité d'une éventuelle décomposition.

• Le calcul précédent va inspirer la démonstration de l'existence d'une décomposition. Soit  $f$  une fonction quelconque de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Considérons les fonctions  $g$  et  $h$ , de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie pour tout  $x$  par :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = g(x) + h(x), \text{ soit } f = g + h.$$

et, d'autre part :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x), \text{ soit } g \text{ paire ;}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x), \text{ soit } h \text{ impaire.}$$

On a donc décomposé  $f$  comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, ce qui achève de démontrer que  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ .

• Si  $f$  est la fonction exponentielle,  $g$  est la fonction cosinus hyperbolique et  $h$  la fonction sinus hyperbolique.



Cet exercice est un cas typique de raisonnement par analyse-synthèse (cf. fiche 14).

## 27. Espaces vectoriels de dimension finie

### Exercice 1

a) • La caractérisation des vecteurs de  $F$  est l'équation d'un plan vectoriel.

Avec  $x = -y - 2z$ , tout vecteur de  $F$  s'écrit, de façon unique, sous la forme :

$y(-1, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$ , ce qui fournit une base de  $F$ .

• Tout vecteur de  $G$  s'écrit  $a(1, -1, 3)$ , ce qui montre que  $G$  est la droite vectorielle  $\text{Vect}(1, -1, 3)$ .

b) On a déjà  $\dim(F) + \dim(G) = 3$ . Il suffit de démontrer que  $F \cap G = \{0\}$ .

Soit  $(x, y, z) \in F \cap G$ . Comme on a  $x = a, y = -a, z = 3a$  et  $x + y + 2z = 0$ , on obtient bien le résultat.

## Exercice 2

- Écrivons des familles successives de vecteurs qui ont toutes le même rang :

$$\begin{array}{cccc}
 V_1 & V'_2 & V'_3 & V'_4 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & -5 & -11 & -14 \\
 -1 & \alpha + 2 & 5 & \beta + 5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cccc}
 V_1 & V'_3 & V''_2 & V''_4 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & -11 & 0 & 0 \\
 -1 & 5 & 11\alpha - 3 & 14\alpha - 5\beta + 3
 \end{array}$$

avec  $V'_2 = V_2 - 2V_1$ ,  $V'_3 = V_3 - 3V_1$ ,  $V'_4 = V_4 - 5V_1$

puis  $V''_2 = 11V'_2 - 5V'_3$ ,  $V''_4 = 14V'_2 - 5V'_4$ .

- Si  $11\alpha - 3 = 0$  et  $14\alpha - 5\beta + 3 = 0$  (c'est-à-dire  $\alpha = \frac{3}{11}$  et  $\beta = \frac{15}{11}$ ), le rang de  $(V_1, V_2, V_3, V_4)$  est égal à 2.

Dans tous les autres cas, le rang est égal à 3.

## 28. Applications linéaires

### Exercice 1

- Montrons que  $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } g)$ .

Comme  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ , on a :  $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } g$ .

Soit  $(u_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  une base de  $\text{Im } f$ .

$(g(u_i))_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  est alors une famille génératrice de  $g(\text{Im } f) = \text{Im}(g \circ f)$ , ce qui entraîne  $\text{rg}(g \circ f) \leq p = \text{rg } f$ .

On a donc bien  $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } g)$ .

- Montrons que  $\text{rg } f + \text{rg } g - n \leq \text{rg}(g \circ f)$ , ou, ce qui est équivalent :

$$\text{rg } f - \dim \text{Ker } g \leq \text{rg}(g \circ f).$$

Soit  $h$  la restriction de  $g$  à  $\text{Im } f$ .

$h$  étant une application linéaire de  $\text{Im } f$  dans  $E$ , on a :

$$\dim \text{Im } f = \dim \text{Ker } h + \dim \text{Im } h$$

On a  $\text{Im } h = \text{Im}(g \circ f)$ ,

et  $\text{Ker } h = \{x \in \text{Im } f ; h(x) = g(x) = 0\} = \text{Im } f \cap \text{Ker } g \subset \text{Ker } g$ .

D'où  $\dim \text{Im } f = \dim \text{Im}(g \circ f) + \dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } g)$ .

On en déduit  $\text{rg } f \leq \text{rg}(g \circ f) + \dim \text{Ker } g$ , ce qui est équivalent à l'inégalité demandée.

### Exercice 2

- On a toujours :

$$\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2 \quad \text{car} \quad x \in \text{Ker } f \iff f(x) = 0 \implies f^2(x) = f(0) = 0,$$

$\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$  car si  $x \in \text{Im } f^2$ , il existe  $y \in E$  tel que  $x = f^2(y) = f(f(y))$ .

• (a)  $\implies$  (b)

D'après le théorème du rang appliqué à  $f$  et à  $f^2$ , on a :

$$n = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \text{Ker } f^2 + \dim \text{Im } f^2.$$

L'hypothèse entraîne :  $\dim \text{Im } f = \dim \text{Im } f^2$ , et par conséquent :

$$\dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker } f^2.$$

Comme on a toujours  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ , on en déduit  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ .

• (b)  $\implies$  (c)

Sachant que  $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = n$ , il reste à démontrer que :

$\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ . En effet, on aura alors :

$$\dim (\text{Ker } f + \text{Im } f) = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f - \dim (\text{Ker } f \cap \text{Im } f) = n,$$

ce qui entraînera  $\text{Ker } f + \text{Im } f = E$ .

Soit  $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ . On a  $f(x) = 0$ , et il existe  $y \in E$  tel que  $x = f(y)$ . Par conséquent  $f^2(y) = 0$ , soit  $y \in \text{Ker } f^2$ .

D'après l'hypothèse, on a donc  $y \in \text{Ker } f$ , soit  $f(y) = 0$ , puis  $x = 0$ .

• (c)  $\implies$  (a)

Comme  $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ , il reste à démontrer que  $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2$ .

Soit  $x = f(y)$  un élément de  $\text{Im } f$ . Utilisons l'hypothèse pour décomposer  $y$  sous la forme :

$$y = a + f(b),$$

avec  $a \in \text{Ker } f$ . Alors  $x = f(y) = f(a) + f^2(b) = f^2(b)$ , ce qui montre que  $x \in \text{Im } f^2$ . Donc  $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$ .

### Exercice 3

• Des règles de calcul dans  $\mathcal{L}(E)$ , il vient :

$$(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q.$$

$p \circ q$  est donc un projecteur de  $E$ .



*Rappelons que, si  $u$  est un projecteur de  $E$ , les vecteurs  $x$  de  $\text{Im } u$  sont caractérisés par la condition  $u(x) = x$ .*

• Soit  $x \in \text{Im } (p \circ q)$ . On a alors  $(p \circ q)(x) = x$ , d'où  $x \in \text{Im } p$ .

Comme  $p \circ q = q \circ p$ , on a aussi  $(q \circ p)(x) = x$ , d'où  $x \in \text{Im } q$ .

On en déduit que  $\text{Im } (p \circ q) \subset \text{Im } p \cap \text{Im } q$ .

Soit  $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$ ; on a alors  $p(x) = q(x) = x$ ,

d'où  $(p \circ q)(x) = p(x) = x$ , et donc  $x \in \text{Im } (p \circ q)$ .

On conclut que :  $\text{Im } (p \circ q) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$ .

• Soit  $x \in \text{Ker } p$ ; on a alors  $p(x) = 0$ , ce qui entraîne  $(q \circ p)(x) = 0$ , puis  $(p \circ q)(x) = 0$

puisque  $p \circ q = q \circ p$ .

On en déduit  $\text{Ker } p \subset \text{Ker } (p \circ q)$ . On montre de même que  $\text{Ker } q \subset \text{Ker } (p \circ q)$ .

$\text{Ker } (p \circ q)$  contient donc le sous-espace vectoriel engendré par  $\text{Ker } p \cup \text{Ker } q$ , soit  $\text{Ker } p + \text{Ker } q$ .

Réciproquement, soit  $x \in \text{Ker } (p \circ q)$ . Comme on a  $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$  puisque  $p$  est un projecteur, il existe des vecteurs uniques  $x_1 \in \text{Ker } p$  et  $x_2 \in \text{Im } p$  tels que  $x = x_1 + x_2$ .

De


$$0 = (p \circ q)(x) = (q \circ p)(x) = (q \circ p)(x_1) + (q \circ p)(x_2),$$

on tire  $(q \circ p)(x_2) = 0$ .

Comme  $x_2 \in \text{Im } p$ , on a  $p(x_2) = x_2$ , d'où  $q(x_2) = 0$  soit  $x_2 \in \text{Ker } q$ , et par conséquent  $x \in \text{Ker } p + \text{Ker } q$ .

On conclut donc que :  $\text{Ker } (p \circ q) = \text{Ker } p + \text{Ker } q$ .

## Exercice 4

 Dans l'hypothèse,  $k$  dépend de  $x$ . L'exercice consiste à démontrer que  $k$  est constant.

- Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Pour tout  $i$ , l'hypothèse entraîne qu'il existe  $k_i$  tel que  $f(e_i) = k_i e_i$ .

- L'application de l'hypothèse à  $e = \sum_{i=1}^n e_i$  entraîne qu'il existe  $k$  tel que  $f(e) = ke$  d'où :

$$\sum_{i=1}^n f(e_i) = \sum_{i=1}^n k e_i.$$

- On obtient donc  $\sum_{i=1}^n k_i e_i = \sum_{i=1}^n k e_i$  ce qui entraîne  $k_i = k$  pour tout  $i$ . L'endomorphisme  $f$  est donc l'homothétie de rapport  $k$ .


## 30. Calcul matriciel

### Exercice 1

On a immédiatement  $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  c'est-à-dire  $A^2 = A + 2I_3$ .

Cette dernière relation s'écrit  $\frac{1}{2} A (A - I_3) = I_3$  et montre que  $A$  est inversible avec :

$$A^{-1} = \frac{1}{2} (A - I_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

 Dans la factorisation de  $A^2 - A$ , attention à mettre  $I_n$  et non pas 1.

### Exercice 2

Soit  $b_{ij}$  le terme général de  $A^2$ . On a  $b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}$ .

$a_{ik} a_{kj}$  est non nul si, et seulement si,  $i \leq k \leq j$ .


On peut donc déjà dire que  $b_{ij} = 0$  quand  $i > j$ .

Quand  $i \leq j$ , la somme précédente comporte des termes non nuls.

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{k=i}^j (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} (-1)^{k-1} \binom{j-1}{k-1} \\ &= (-1)^i \sum_{k=i}^j \frac{(k-1)!}{(i-1)! (k-i)!} (-1)^k \frac{(j-1)!}{(k-1)! (j-k)!} \\ &= (-1)^i \frac{(j-1)!}{(i-1)!} \sum_{k=i}^j (-1)^k \frac{1}{(k-i)! (j-k)!} \\ &= (-1)^i \binom{j-1}{i-1} \sum_{k=i}^j (-1)^k \binom{j-1}{k-i} \\ &= \binom{j-1}{i-1} \sum_{k'=0}^{j-i} (-1)^{k'} \binom{j-i}{k'} = \binom{j-1}{i-1} (1-1)^{j-i}. \end{aligned}$$

Si  $i < j$ , on obtient donc  $b_{ij} = 0$ . Mais si  $i = j$ , on obtient  $b_{ii} = 1$ .

Par conséquent :  $A^2 = I_n$ .

 Soit  $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$  muni de sa base canonique  $(1, X, \dots, X^{n-1})$ .

La matrice  $A$  est celle de l'endomorphisme :

$$P(X) \mapsto P(1-X).$$

Il n'est donc pas miraculeux d'avoir obtenu  $A^2 = I_n$ .

### Exercice 3

Il est normal de penser à utiliser la formule du binôme pour calculer  $A^n$ . Mais toutes les décompositions ne permettent pas de conclure. En voici une qui est efficace :

$$A = (a-b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (a-b) I_3 + b B.$$

On constate que  $B^2 = 3B$ , et on démontre par récurrence que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $B^k = 3^{k-1} B$ .

Comme  $I_3 B = B I_3$ , on peut appliquer la formule du binôme, et on obtient, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} A^n &= (a-b)^n I_3 + \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} b^k 3^{k-1} \right) B \\ &= (a-b)^n I_3 + \frac{1}{3} \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3b)^k (a-b)^{n-k} \right) B \\ &= (a-b)^n I_3 + \frac{1}{3} \left[ (a+2b)^n - (a-b)^n \right] B. \end{aligned}$$

## 31. Matrices et applications linéaires

### Exercice 1

- Il s'agit de trouver une base  $(e_1, \dots, e_n)$  telle que :

$$\begin{cases} f(e_i) = e_{i+1} & \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ f(e_n) = 0. \end{cases}$$

On doit avoir  $e_i = f^{i-1}(e_1)$  pour  $1 \leq i \leq n$  et il faut que  $e_n = f^{n-1}(e_1)$  soit non nul.

- Après cette phase d'étude, construisons une base convenable.

Comme  $f^{n-1} \neq 0$ , il existe  $e_1$  tel que  $f^{n-1}(e_1) \neq 0$ .

Pour  $2 \leq i \leq n$ , posons  $e_i = f^{i-1}(e_1)$ , et montrons que  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ .

Comme  $E$  est de dimension  $n$ , il suffit de montrer que c'est une famille libre, puisque le nombre de vecteurs est égal à la dimension.

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des scalaires tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ . On a :

$$f^{n-1}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0 = \lambda_1 f^{n-1}(e_1).$$

Comme  $f^{n-1}(e_1) \neq 0$ , on en déduit que  $\lambda_1 = 0$ .

À partir de  $f^{n-2}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0$ , on obtient  $\lambda_2 = 0$ , et ainsi de suite.

On a bien construit une base de  $E$ . Et la matrice de  $f$  dans cette base est de la forme annoncée.

### Exercice 2

Considérons la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire les matrices  $E_{ij}$  avec  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$  (cf. fiche 30).

Si  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ , on peut aussi écrire :  $A = \sum_{ij} a_{ij} E_{ij}$ . On a alors :

$$AE_{kl} = \sum_{ij} a_{ij} E_{ij} E_{kl} = \sum_{i=1}^n a_{ik} E_{il} \quad \text{et} \quad E_{kl} A = \sum_{j=1}^n a_{lj} E_{kj},$$

$$\text{d'où } \psi(E_{kl}) = \sum_{i=1}^n a_{ik} E_{il} + \sum_{j=1}^n a_{lj} E_{kj}.$$

La composante de  $\psi(E_{kl})$  sur  $E_{kl}$  est  $a_{kk} + a_{ll}$ . La trace de  $\psi$  est donc :

$$\text{tr } \psi = \sum_{kl} (a_{kk} + a_{ll}) = \sum_{kl} a_{kk} + \sum_{kl} a_{ll} = n \sum_{k=1}^n a_{kk} + n \sum_{l=1}^n a_{ll} = 2n \text{ tr } (A).$$

### Exercice 3

Considérons  $f \in \mathcal{L}(E)$  représenté par  $M$  dans la base canonique, donc tel que  $f \circ f = 0$ .

On a alors  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ .

D'après le théorème du rang :  $\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = 3$ , d'où :  $\dim \text{Im } f \leq 1$ .

Si  $f$  n'est pas nul, c'est donc un endomorphisme de rang 1 dont l'image est incluse dans le noyau.



Soit  $(V_3)$  une base d'un supplémentaire du noyau. Le vecteur  $V_1 = f(V_3)$  est alors une base de  $\text{Im } f$  car  $V_1 \neq 0$ .

Comme  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ , on peut alors choisir  $V_2$  pour que  $(V_1, V_2)$  soit une base de  $\text{Ker } f$ .

$\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et la matrice de  $f$  dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions de l'équation sont donc : la matrice nulle, et toutes les matrices semblables à  $A$ .

## 32. Systèmes linéaires

### Exercice 1

#### • Première méthode

Il s'agit de trouver la matrice  $A' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$  vérifiant  $AA' = I_3$ . Les coefficients de  $A'$  vérifient donc :

$$\begin{cases} x_1 + 2y_1 + 2z_1 = 1 \\ x_1 + 2y_1 + z_1 = 0 \\ x_1 + y_1 + z_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 + 2y_2 + 2z_2 = 0 \\ x_2 + 2y_2 + z_2 = 1 \\ x_2 + y_2 + z_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 + 2y_3 + 2z_3 = 0 \\ x_3 + 2y_3 + z_3 = 0 \\ x_3 + y_3 + z_3 = 1 \end{cases}$$

Les trois systèmes ne diffèrent que par leurs seconds membres. On peut les résoudre en même temps en juxtaposant les seconds membres. On part de la matrice augmentée :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Avec les opérations  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ ,

puis  $L_2 \leftrightarrow L_3$ ,  $L_2 \leftarrow -L_2$ ,  $L_3 \leftarrow -L_3$  et  $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ , on obtient successivement :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Avec  $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ , on obtient enfin  $I_3$  dans la partie gauche du tableau :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

On a donc  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

#### • Deuxième méthode

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice est  $A$  dans la base canonique. Si  $x = x_1 e_1 +$

$x_2 e_2 + x_3 e_3$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et  $f(x) = x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + x'_3 e_3$  son image, on a la relation

$$X' = A X \text{ où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix},$$

ce qui conduit au système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = x'_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = x'_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = x'_3 \end{cases}$$

Si  $A$  est inversible,  $f$  est un isomorphisme et la matrice  $A^{-1}$  est la matrice de  $f^{-1}$  dans la base canonique et permet d'exprimer les coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  en fonction de  $x'_1, x'_2, x'_3$ , ce qui revient à résoudre le système précédent en  $x_1, x_2, x_3$ .

On obtient (avec la méthode de Gauss habituelle) :

$$\begin{cases} x_1 = -x'_1 & +2x'_3 \\ x_2 = & +x'_2 & -x'_3 \\ x_3 = x'_1 & -x'_2 \end{cases}$$

ce qui donne  $A^{-1}$ .

### • Troisième méthode

On peut expliciter l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice est  $A$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ .

Si l'on pose  $a_1 = f(e_1)$ ,  $a_2 = f(e_2)$  et  $a_3 = f(e_3)$ , on a les relations :

$$\begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = a_1 \\ 2e_1 + 2e_2 + e_3 = a_2 \\ 2e_1 + e_2 + e_3 = a_3 \end{cases}$$

Si  $A$  est inversible,  $f$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{B}' = (a_1, a_2, a_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et  $A$  représente la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

$A^{-1}$  est alors la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$  qui s'obtient en exprimant  $e_1, e_2, e_3$  en fonction de  $a_1, a_2, a_3$ , c'est-à-dire en résolvant le système précédent en  $e_1, e_2, e_3$ .

On obtient  $A^{-1}$  en écrivant *en colonnes* les composantes des vecteurs  $e_1, e_2, e_3$  en fonction des vecteurs  $a_1, a_2, a_3$ .



Quelle que soit la variante choisie, lorsque la matrice n'est pas inversible, on obtient un système impossible.

## 33. Déterminants

### Exercice 1

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 + L_1 \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{en développant par rapport à la première colonne}$$

$$=-3.$$

Comme  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ , le système constitue une base de  $\mathbb{R}^3$ .

## Exercice 2

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 9 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 156 \\ 1 & 6 & 169 \\ 2 & 2 & 221 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad C_3 \leftarrow C_3 + 10C_2 + 100C_1$$

Comme 156, 169 et 221 sont divisibles par 13, on peut mettre 13 en facteur dans la troisième colonne et il reste un nombre entier :  $D$  est divisible par 13.

## Exercice 3

En posant :

$$A = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \\ b^4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \\ c^3 \\ c^4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d \\ d^2 \\ d^3 \\ d^4 \end{pmatrix},$$

on peut écrire :

$$\Delta = \det(A + B, B + C, C + D, D + A).$$

Sachant qu'un déterminant est une forme multilinéaire, on développe de façon analogue au produit  $(A + B)(B + C)(C + D)(D + A)$ .

De plus, comme un déterminant est une forme alternée, tous les termes comportant deux colonnes égales sont nuls.

Il reste donc :

$$\Delta = \det(A, B, C, D) + \det(B, C, D, A).$$

On passe de  $(B, C, D, A)$  à  $(A, B, C, D)$  à l'aide de trois transpositions. On a donc :

$$\det(B, C, D, A) = (-1)^3 \det(A, B, C, D),$$

et par conséquent :

$$\Delta = 0.$$

## Exercice 4

1. Notons  $A = M^2 = (a_{pq})$ . Par définition d'un produit de matrices, on a :

$$\begin{aligned} a_{pq} &= \sum_{k=1}^n m_{pk} m_{kq} = \sum_{k=1}^n \omega^{(p-1)(k-1)} \omega^{(k-1)(q-1)} = \sum_{k=1}^n \omega^{(k-1)(p+q-2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \omega^{p+q-2} \right)^{k-1}. \end{aligned}$$

On reconnaît une somme de termes d'une suite géométrique de raison  $\omega^{p+q-2}$ .

- Si  $\omega^{p+q-2} \neq 1$ , soit  $p + q - 2 \neq 0$  et  $p + q - 2 \neq n$ , on a :

$$a_{pq} = \frac{1 - \left( \omega^{p+q-2} \right)^n}{1 - \omega^{p+q-2}} = 0 \quad \text{car} \quad \omega^n = 1.$$

- Si  $\omega^{p+q-2} = 1$ , soit  $p + q - 2 = 0$  ou  $p + q - 2 = n$ , on a  $a_{pq} = n$ .

Donc :

$$M^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & & & 0 \\ 0 & & & \ddots & n \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Dans  $M^2$ , effectuons la permutation des colonnes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

dont la signature est :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

On se ramène ainsi à la matrice scalaire  $n I_n$  dont le déterminant est égal à  $n^n$ .

On obtient donc :

$$\det(M^2) = (\det M)^2 = \varepsilon(\sigma) n^n,$$

d'où l'on tire :

$$|\det M| = n^{\frac{n}{2}}.$$

## 34. Espaces préhilbertiens réels

### Exercice 1

1. • Pour tout  $(M, N) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$ , on a :

$$\varphi(M, N) = \text{tr}({}^t M N) = \text{tr}({}^t({}^t M N)) = \text{tr}({}^t N M) = \varphi(N, M).$$

$\varphi$  est donc symétrique.

• Pour tout  $(M, N, N') \in \mathcal{M}_n^3(\mathbb{R})$  et tout  $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\begin{aligned} \varphi(M, \lambda N + \lambda' N') &= \text{tr}({}^t M (\lambda N + \lambda' N')) = \lambda \text{tr}({}^t M N) + \lambda' \text{tr}({}^t M N') \\ &= \lambda \varphi(M, N) + \lambda' \varphi(M, N') \end{aligned}$$

$\varphi$  est donc bilinéaire symétrique.

• Si  $M = (m_{ij})$ , le terme de  ${}^t M M$  situé sur la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne est  $\sum_{k=1}^n m_{ki} m_{kj}$ .

$$\text{On a donc : } \varphi(M, M) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n m_{ki}^2 \right) \geq 0.$$

D'autre part, si  $\varphi(M, M) = 0$ , l'expression précédente montre que  $m_{ki} = 0$  pour tous  $k$  et  $i$ , soit  $M = 0$ .

$\varphi$  est donc définie positive, ce qui achève la démonstration de  $\varphi$  produit scalaire.

• Soit  $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$$\text{Calculons } \varphi(E_{ij}, E_{kl}) = \text{tr}({}^t E_{ij} E_{kl}) = \text{tr}(E_{ji} E_{kl}) = \delta_{ik} \text{tr} E_{jl}.$$

$$\text{Si } (i, j) = (k, l), \text{ on a } \varphi(E_{ij}, E_{ij}) = \text{tr}(E_{ji} E_{ij}) = \text{tr}(E_{jj}) = 1.$$

Si  $(i, j) \neq (k, l)$ , on a  $i \neq k$  ou  $j \neq l$ .

Pour  $i \neq k$ , on a  $E_{ji} E_{kl} = 0$ , d'où  $\varphi(E_{ij}, E_{kl}) = 0$ .

Pour  $i = k$ , on a  $E_{ji} E_{kl} = E_{jl}$ , d'où  $\varphi(E_{ij}, E_{kl}) = \text{tr}(E_{jl}) = 0$  puisque  $j \neq l$ .

La famille  $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  est donc une base orthonormale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

2. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire  $\varphi$  et aux matrices  $A$  et  $I_n$ , on obtient :

$$|\varphi(I_n, A)| \leq \sqrt{\varphi(I_n, I_n) \varphi(A, A)}$$

c'est-à-dire :

$$|\text{tr } A| \leq \sqrt{n \text{tr } ({}^t A A)}.$$

L'égalité a lieu si, et seulement si, les deux vecteurs sont colinéaires, c'est-à-dire si  $A$  est une matrice scalaire.

## Exercice 2

• Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs quelconques de  $E$ . Appliquons l'hypothèse à  $x + y$  :

$\langle x + y | f(x + y) \rangle = 0 = \langle x | f(x) \rangle + \langle x | f(y) \rangle + \langle y | f(x) \rangle + \langle y | f(y) \rangle$  ce qui entraîne :

$$\langle x | f(y) \rangle = - \langle y | f(x) \rangle.$$

• Soit  $x \in \text{Ker } f$  et  $f(y) \in \text{Im } f$ . On a :

$$\langle x | f(y) \rangle = - \langle y | f(x) \rangle = - \langle y | 0 \rangle = 0.$$

Ceci entraîne que  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$  ; puis que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires en utilisant le théorème du rang.

## 35. Isométries vectorielles

### Exercice 1

Soit  $x_1 \in E$ ,  $x_2 \in E$ ,  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  et  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$  ; montrons que :

$$z = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 f(x_1) - \lambda_2 f(x_2) = 0.$$

Le vecteur  $z$  appartient à  $\text{Vect}[f(E)]$ .

Pour tout  $y \in E$ , l'hypothèse vérifiée par  $f$  et les propriétés d'un produit scalaire entraînent :

$$\begin{aligned} \langle f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) | f(y) \rangle &= \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 | y \rangle \\ &= \lambda_1 \langle x_1 | y \rangle + \lambda_2 \langle x_2 | y \rangle \\ &= \lambda_1 \langle f(x_1) | f(y) \rangle + \lambda_2 \langle f(x_2) | f(y) \rangle \\ &= \langle \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) | f(y) \rangle \end{aligned}$$

Par conséquent  $\langle z | f(y) \rangle = 0$  pour tout  $y \in E$ .

Comme  $z$  est, à la fois, élément de  $\text{Vect}[f(E)]$  et orthogonal à tout élément de  $\text{Vect}[f(E)]$ , il est nul.

### Exercice 2

• **Première solution**

Notons  $C_1, \dots, C_n$  les matrices colonnes de  $A$ , que l'on peut considérer comme des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Leur somme est le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont les composantes sont  $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ .

Pour obtenir  $\sum_{i,j} a_{ij}$ , il reste à considérer le vecteur  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les composantes sont égales à 1, et le produit scalaire :

$$(C_1 + \cdots + C_n) \cdot U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left| \sum a_{ij} \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^n C_j \right\| \|U\|.$$

On a  $\|U\| = \sqrt{n}$ . De plus on a supposé,  $A$  orthogonale, c'est-à-dire que les vecteurs  $C_j$  sont deux à deux orthogonaux et unitaires, ce qui entraîne :

$$\left\| \sum_{j=1}^n C_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|C_j\|^2 = n \quad \text{soit} \quad \left\| \sum_{j=1}^n C_j \right\| = \sqrt{n}.$$

On obtient donc :

$$\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \leq n.$$

### • Deuxième solution

Désignons par  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  représenté par  $A$  dans la base canonique (orthonormale). On a alors  $a_{ij} = f(e_j) \cdot e_i$ . En utilisant les propriétés du produit scalaire, on peut écrire :

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(e_j) \cdot e_i = \left( \sum_{j=1}^n f(e_j) \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n e_i \right).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^n f(e_j) \right\| \left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\|.$$

On a  $\left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\| = \sqrt{n}$ . D'autre part, comme  $A$  est orthogonale,  $f$  est une isométrie, donc conserve la norme :

$$\left\| \sum_{j=1}^n f(e_j) \right\| = \left\| f \left( \sum_{j=1}^n e_j \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\| = \sqrt{n}.$$

On obtient donc :

$$\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \leq n.$$

### Exercice 3

On a :  ${}^tA = I_n - 2{}^t(U^tU) = I_n - 2U^tU = A$ , ce qui montre que  $A$  est symétrique.

On a donc :  ${}^tAA = A^2 = (I_n - 2U^tU)(I_n - 2U^tU) = I_n - 4U^tU + 4(U^tU)(U^tU)$ .

Le produit de matrices étant associatif, on a :

$$(U^tU)(U^tU) = U({}^tUU)^tU = U^tU = I_n \quad \text{puisque} \quad {}^tUU = \sum_{i=1}^n u_i^2 = 1.$$

$A$  est donc orthogonale.

## 36. Dénombrement

### Exercice 1

1. Un tirage est constitué par le choix de 2 boules (en vrac et sans remise) parmi les 5 boules de l'urne *A* et le choix de d'1 boule parmi les 4 boules de l'urne *B*. Le nombre total de tirages possibles est donc :  $\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40$ .

2. • La couleur unique peut être noire **ou** blanche.

- Les tirages où les 3 boules sont noires sont obtenus en choisissant 2 boules parmi les 3 boules noires de l'urne *A*, puis 1 boule parmi les 2 boules noires de l'urne *B*. Il y en a donc :  $3 \times 2 = 6$ .

- Les tirages où les 3 boules sont blanches sont obtenus en choisissant 2 boules blanches dans *A* et 1 boule blanche dans *B*. Il y en a donc :  $1 \times 2 = 2$ .

- En définitive, il y a  $6 + 2 = 8$  tirages où les trois boules sont de la même couleur.

3. • L'ensemble des tirages comportant exactement 1 boule blanche est la réunion des deux ensembles disjoints :

- On a prélevé 1 boule noire et 1 boule blanche dans *A* (de  $3 \times 2 = 6$  façons) et 1 boule noire dans *B* (de 2 façons). Il y a  $6 \times 2 = 12$  tirages de ce type.

- On a prélevé 2 boules noires dans *A* (de 3 façons) et 1 boule blanche dans *B* (de 2 façons). Il y a  $3 \times 2 = 6$  tirages de ce type.

- Il y a donc  $12 + 6 = 18$  tirages qui comportent exactement 1 boule blanche.

4. • L'ensemble des tirages comportant exactement 2 boules blanches est la réunion des deux ensembles disjoints :

- On a prélevé 2 boules blanches dans *A* et 1 boule noire dans *B*. Il y a  $1 \times 2 = 2$  tirages de ce type.

- On a prélevé 1 boule blanche et 1 boule noire dans *A* et 1 boule blanche dans *B*. Il y a  $2 \times 3 \times 2 = 12$  tirages de ce type.

- Il y a donc  $2 + 12 = 14$  tirages qui comportent exactement 2 boules blanches.

### Exercice 2

Repérons les dés (par des couleurs différentes par exemple) et considérons les triplets  $(a, b, c)$  des nombres observés. Il y en a en tout  $6^3 = 216$ .

- Dénombrons les triplets pour lesquels  $S = 9$ .

Il y en a 25 qui se décomposent en :

6 du type (1, 2, 6) qui sont (1, 2, 6) ; (1, 6, 2) ; (2, 1, 6) ; (2, 6, 1) ; (6, 1, 2) ; (6, 2, 1)

6 du type (1, 3, 5)

3 du type (1, 4, 4) qui sont (1, 4, 4) ; (4, 1, 4) ; (4, 4, 1)

6 du type (2, 3, 4) ; 3 du type (2, 2, 5) ; 1 du type (3, 3, 3)

- Les 6 manières d'obtenir une somme égale à 10 sont :

$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4$

il y a 27 triplets pour lesquels  $S = 10$  :

6 du type (1, 3, 6) ; 6 du type (1, 4, 5) ; 3 du type (2, 2, 6) ;

6 du type (2, 3, 5) ; 3 du type (2, 4, 4) ; 3 du type (3, 3, 4)

• La somme 10 apparaîtra donc plus souvent (27 cas sur 216) que la somme 9 (25 cas sur 216). *Le prince de Toscane avait donc bien observé, sans doute parce qu'il avait beaucoup de temps libre !*

## 37. Espaces probabilisés finis

### Exercice 1

La propriété se démontre par récurrence sur  $n$ .

• Pour  $n = 1$ , on a bien  $\mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(A_1)$ .

Pour  $n = 2$ , on a  $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$ .

• Supposons la propriété vraie au rang  $k$  et démontrons-la au rang  $k + 1$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i \cup A_{k+1}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) + \mathbb{P}(A_{k+1}) && \text{d'après ce qui précède dans le cas } n = 2 \\ &\leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_{k+1}) && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}(A_i) && \text{ce qui démontre la propriété au rang } k + 1. \end{aligned}$$


### Exercice 2

Le mot *au moins*, doit vous faire penser à l'événement contraire  $\bar{A}$ .

Le nombre de cas possibles est  $365^n$  (arrangements avec répétitions), et le nombre de cas favorables pour  $\bar{A}$  est  $A_{365}^n$  (arrangements d'ordre  $n$ ).

Tous les cas sont équiprobables. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n} = 1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - (n - 1))}{365 \times 365 \times \cdots \times 365} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \end{aligned}$$

 Pour  $n = 23$ , on obtient  $\mathbb{P}(A) \approx 0,5073$ , ce qui signifie que dans un groupe de 23 personnes (et a fortiori s'il y en a plus), il y a plus d'une chance sur deux pour qu'au moins deux personnes aient la même date anniversaire.

Comme, en plus, les jours ne sont pas tout à fait équiprobables, la probabilité réelle est encore un peu plus élevée.

### Exercice 3

Remarquons d'abord que, pour que le problème ait un sens, il faut :

$$k \leq n ; m \leq n ; x \leq m ; x \leq k.$$



On a implicitement l'hypothèse d'équiprobabilité entre les situations. Mais qu'est-ce-qu'une situation ?

• **Point de vue de l'acheteur**

Il y a  $\binom{n}{m}$  choix possibles de  $m$  billets parmi  $n$ .

Une situation « favorable » (qui réalise l'événement) s'obtient en choisissant d'acheter  $x$  billets gagnants, soit  $\binom{k}{x}$  possibilités, et  $m - x$  billets perdants, soit  $\binom{n-k}{m-x}$  possibilités. La probabilité demandée est donc :

$$p_1 = \frac{\binom{k}{x} \times \binom{n-k}{m-x}}{\binom{n}{m}}.$$

• **Point de vue de l'organisateur qui tire les lots**

Il y a  $\binom{n}{k}$  choix possibles des  $k$  billets gagnants.

Une situation « favorable » s'obtient en choisissant  $x$  billet gagnants parmi les billets détenus par la personne et  $k - x$  billets gagnants parmi les billets détenus par les autres. La probabilité demandée est donc :

$$p_2 = \frac{\binom{m}{x} \times \binom{n-m}{k-x}}{\binom{n}{k}}.$$

- En écrivant les combinaisons avec des factorielles, vérifiez que l'on a bien  $p_1 = p_2$ .

## 38. Probabilités conditionnelles

### Exercice 1

Considérons un poulet tiré au hasard dans la population et notons  $T$  « le poulet a été traité »,  $P$  « le poulet est parasité ».

Les informations fournies s'écrivent, dans l'ordre du texte :

$$\mathbb{P}(\bar{T}) = 0,7 \quad ; \quad \mathbb{P}(T) = 0,3 \quad ; \quad \mathbb{P}(P\bar{T}) = 0,25 \quad ; \quad \mathbb{P}(P) = 0,125$$

et on en déduit :  $\mathbb{P}(\bar{P}\bar{T}) = 0,75$  et  $\mathbb{P}(\bar{P}/T) = 0,875$

$$1. \quad \mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(T) \mathbb{P}(P|T) + \mathbb{P}(\bar{T}) \mathbb{P}(P|\bar{T}) = 0,2125.$$

$$2. \quad \mathbb{P}(T|P) = \frac{\mathbb{P}(T) \mathbb{P}(P|T)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{0,3 \times 0,125}{0,2125} = \frac{3}{17}.$$

### Exercice 2

Considérons une personne tirée au hasard dans la population et notons  $V$  « la personne est vaccinée »,  $M$  « la personne tombe malade ».

Les informations fournies s'écrivent, dans l'ordre du texte :

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \frac{\mathbb{P}(V|M)}{\mathbb{P}(\bar{V}|M)} = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}(M|V) = \frac{1}{12} \quad \text{et on cherche } \mathbb{P}(M|\bar{V}).$$

Comme  $\mathbb{P}(V|M) + \mathbb{P}(\bar{V}|M) = 1$  (deux événements contraires avec le même conditionnement),

on obtient :  $\mathbb{P}(V|M) = \frac{1}{5}$  et  $\mathbb{P}(\bar{V}|M) = \frac{4}{5}$ .

Comme  $\mathbb{P}(M|V) = \frac{\mathbb{P}(M) \mathbb{P}(V|M)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{4}{5} \mathbb{P}(M)$ , on en déduit  $\mathbb{P}(M) = \frac{5}{48}$ .

D'où :  $\mathbb{P}(M|\bar{V}) = \frac{\mathbb{P}(M) \mathbb{P}(\bar{V}|M)}{\mathbb{P}(\bar{V})} = \frac{\mathbb{P}(M) \frac{4}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{15} \mathbb{P}(M) = \frac{1}{9}$ .

### Exercice 3

1. Compte tenu de l'ordre des naissances, l'univers peut s'écrire  $\Omega = \{GG, GF, FG, FF\}$ . Avec l'hypothèse d'équiprobabilité, on obtient :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{GF, FG\}) = 0,5, \quad ; \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{GG, GF, FG\}) = 0,75,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{GF, FG\}) = 0,5.$$

Comme  $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ , les événements  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants.


2. L'univers peut s'écrire :

$$\Omega = \{GGG, GGF, GFG, GFF, FGG, FGF, FFG, FFF\}.$$

Avec l'hypothèse d'équiprobabilité, on obtient en comptant les cas élémentaires :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{8} = 0,75 \quad ; \quad \mathbb{P}(B) = \frac{4}{8} = 0,5 \quad ; \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}.$$

Comme  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ , les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants.

 On constate donc que l'indépendance dépend de l'espace de probabilité considéré ; ce qui confirme qu'un événement, ce n'est seulement une phrase, mais un contexte.

### Exercice 4

Notons les événements  $A$  : « victoire du premier joueur »,  $B$  : « victoire du deuxième joueur » et  $C$  : « l'as ne sort pas au premier lancer ».

Notons les probabilités :  $\mathbb{P}(A) = p$  et  $\mathbb{P}(B) = q$ . On a  $p + q = 1$  puisque  $A$  et  $B$  sont des événements contraires.

#### Première solution

Pour que le premier joueur gagne, il faut qu'il obtienne l'as au premier lancer, **ou bien** que l'as ne sorte ni au 1<sup>er</sup>, ni au 2<sup>e</sup> lancer mais au 3<sup>e</sup>, **ou bien** ...

$$p = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^n = \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11} \quad (\text{cf. fiche 13})$$

De même :

$$q = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \dots = \frac{5}{36} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^n = \frac{5}{36} \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{5}{11}$$

#### Deuxième solution

Si l'as ne sort pas lors du premier lancer, la deuxième joueur se retrouve alors dans la situation de premier joueur. On a donc :  $\mathbb{P}(B|C) = \mathbb{P}(A)$ .

On a  $\mathbb{P}(C) = \frac{5}{6}$  et  $B$  et  $\overline{C}$  sont incompatibles (si l'as sort la première fois, le jeu s'arrête avant que le deuxième joueur puisse jouer). On a donc :  $p = \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{6}{5} q$ .  $p$  et  $q$  vérifient donc le système :

$$\begin{cases} 5p - 6q = 0 \\ p + q = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = \frac{6}{11} \\ q = \frac{5}{11} \end{cases}$$

## 39. Variables aléatoires

### Exercice 1

#### 1. Loi du couple

L'expérience aléatoire est représentée par  $\Omega = \{0; 1; 3; 5; 10\}^2$  et  $\mathbb{P}$  la probabilité uniforme sur  $\Omega$  (qui comporte 25 éléments).

Chaque événement du type  $(X = i \text{ et } Y = j)$  avec  $i \in \{0; 1; 3; 5; 10\}$  et  $j \in \{0; 1; 3; 5; 10\}$  se ramène à un événement de  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Par exemple :

$$\mathbb{P}(X = 10 \text{ et } Y = 10) = \mathbb{P}\left(\{(10; 0), (10; 1), (10; 3), (10; 5), (10; 10)\}\right) = \frac{5}{25}$$

L'ensemble des résultats déterminant la loi du couple  $(X, Y)$  figure dans le tableau ci-dessous :

$Y$	0	1	3	5	10
$X$					
0	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
1	0	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
3	0	0	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
5	0	0	0	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$
10	0	0	0	0	$\frac{5}{25}$


#### 2. Loïs marginales

Par addition, on obtient les lois marginales :

$$\text{de } X : \left(0; \frac{1}{5}\right), \left(1; \frac{1}{5}\right), \left(3; \frac{1}{5}\right), \left(5; \frac{1}{5}\right), \left(10; \frac{1}{5}\right)$$

$$\text{de } Y : \left(0; \frac{1}{25}\right), \left(1; \frac{3}{25}\right), \left(3; \frac{5}{25}\right), \left(5; \frac{7}{25}\right), \left(10; \frac{9}{25}\right)$$

Comme, par exemple,  $\mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = 0) \times \mathbb{P}(Y = 0)$ , les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

 La définition mathématique va dans le même sens que l'intuition :  $X$  est associée à la première marguerite et  $Y$  aux deux marguerites. Il doit donc y avoir un lien entre  $X$  et  $Y$ .

## Exercice 2

Les valeurs possibles pour  $Z = X + Y$  sont :

$$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 11; 13; 15; 20\}$$

et les probabilités correspondantes :

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 0) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = \frac{2}{25}$$

$$\mathbb{P}(Z = 3) = \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 3) + \mathbb{P}(X = 3 \text{ et } Y = 0) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(Z = 4) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 3) + \mathbb{P}(X = 3 \text{ et } Y = 1) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(Z = 5) = \mathbb{P}(X = 5 \text{ et } Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 5) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(Z = 6) = \mathbb{P}(X = 5 \text{ et } Y = 1) + \mathbb{P}(X = 3 \text{ et } Y = 3) + \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 5) = \frac{4}{25}$$

$$\mathbb{P}(Z = 8) = \mathbb{P}(X = 5 \text{ et } Y = 3) + \mathbb{P}(X = 3 \text{ et } Y = 5) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(Z = 10) = \mathbb{P}(X = 10 \text{ et } Y = 0) + \mathbb{P}(X = 5 \text{ et } Y = 5) + \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 10) = \frac{5}{25}$$

$$\mathbb{P}(Z = 11) = \mathbb{P}(X = 10 \text{ et } Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 10) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(Z = 13) = \mathbb{P}(X = 10 \text{ et } Y = 3) + \mathbb{P}(X = 3 \text{ et } Y = 10) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(Z = 15) = \mathbb{P}(X = 10 \text{ et } Y = 5) + \mathbb{P}(X = 5 \text{ et } Y = 10) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(Z = 20) = \mathbb{P}(X = 10 \text{ et } Y = 10) = \frac{5}{25}$$

## Exercice 3

Les valeurs possibles pour  $T = XY$  sont :

$$\{0; 1; 3; 5; 9; 10; 15; 25; 30; 50; 100\}$$

et les probabilités correspondantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = 0) &= \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 3) \\ &\quad + \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 5) + \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 10) + \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(X = 3 \text{ et } Y = 0) + \mathbb{P}(X = 5 \text{ et } Y = 0) + \mathbb{P}(X = 10 \text{ et } Y = 0) = \frac{5}{25} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = \frac{2}{25}$$

$$\mathbb{P}(T = 3) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 3) + \mathbb{P}(X = 3 \text{ et } Y = 1) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(T = 5) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 5) + \mathbb{P}(X = 5 \text{ et } Y = 1) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(T = 9) = \mathbb{P}(X = 3 \text{ et } Y = 3) = \frac{3}{25}$$

$$\mathbb{P}(T = 10) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 10) + \mathbb{P}(X = 10 \text{ et } Y = 1) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(T = 15) = \mathbb{P}(X = 3 \text{ et } Y = 5) + \mathbb{P}(X = 5 \text{ et } Y = 3) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(T = 25) = \mathbb{P}(X = 5 \text{ et } Y = 5) = \frac{4}{25}$$

$$\mathbb{P}(T = 30) = \mathbb{P}(X = 3 \text{ et } Y = 10) + \mathbb{P}(X = 10 \text{ et } Y = 3) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(T = 50) = \mathbb{P}(X = 5 \text{ et } Y = 10) + \mathbb{P}(X = 10 \text{ et } Y = 5) = \frac{1}{25}$$

$$\mathbb{P}(T = 100) = \mathbb{P}(X = 10 \text{ et } Y = 10) = \frac{5}{25}$$

### Exercice 4

$$E(X) = \frac{19}{5} = 3,8 ; E(X^2) = \frac{135}{5} = 27 ; V(X) = 12,56$$

$$E(Y) = \frac{143}{25} = 5,72 ; E(Y^2) = \frac{1123}{25} = 44,92 ; V(Y) = 12,2016$$

$$E(X + Y) = \frac{238}{25} = 9,52 ; V(X + Y) = 40,6496$$



On observe que l'on a bien  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ , ce qui est un résultat général, mais que  $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$  ce qui confirme que  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

$$E(XY) = 29,68 ; V(XY) = 1379,2576$$



On observe que  $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ , ce qui confirme que  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 7,944 ; r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \approx 0,6417.$$

### Exercice 5

1. En utilisant la formule du binôme, l'égalité de polynômes fournie par l'énoncé s'écrit :

$$\left( \sum_{a=0}^{n_1} \binom{n_1}{a} X^a \right) \left( \sum_{b=0}^{n_2} \binom{n_2}{b} X^b \right) = \sum_{k=0}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{k} X^k.$$

En égalant les coefficients de  $X^k$ , on obtient la formule de Vandermonde :

$$\sum_{a+b=k} \binom{n_1}{a} \binom{n_2}{b} = \binom{n_1+n_2}{k}.$$

2. Les valeurs possibles sont  $X + Y$  sont les entiers compris entre 0 et  $n_1 + n_2$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n_1 + n_2 \rrbracket$ , il reste à calculer la probabilité élémentaire :

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{a+b=k} \mathbb{P}[(X = a) \cap (Y = b)]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a+b=k} \mathbb{P}[(X=a)] \times \mathbb{P}[(Y=b)] && \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\
&= \sum_{a+b=k} \binom{n_1}{a} p^a q^{n_1-a} \binom{n_2}{b} p^b q^{n_2-b} \\
&= p^k q^{n_1+n_2-k} \sum_{a+b=k} \binom{n_1}{a} \binom{n_2}{b} \\
&= \binom{n_1+n_2}{k} && \text{avec la formule de Vandermonde.}
\end{aligned}$$

## Exercice 6

Puisque les univers-images sont  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$  et  $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{k=0}^3 \mathbb{P}((X=k) \cap (Y=k)) \\
&= \sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(X=k) \times \mathbb{P}(Y=k) && \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\
&= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k} \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
&= \frac{24}{108} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

## 40. Espérance et variance

### Exercice 1

#### 1. Probabilité d'ouvrir la première porte au $k^e$ essai

- $k = 1$

La probabilité d'ouvrir au premier essai est  $p_1 = \frac{1}{12}$ .

- $k = 2$

Pour ouvrir au deuxième essai, il faut : ne pas ouvrir au premier (probabilité  $\frac{11}{12}$ ), puis ouvrir au deuxième essai sachant que la bonne clé est parmi les 11 clés restantes (probabilité  $\frac{1}{11}$ ).

D'où :  $p_2 = \frac{11}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{12}$ .

- D'une façon générale, pour  $1 \leq k \leq 12$ , pour ouvrir au  $k^e$  essai, il faut : ne pas ouvrir lors des  $k-1$  premiers essais (probabilité  $1 - \frac{k-1}{12}$ ), puis ouvrir au  $k^e$  essai sachant que la bonne clé est parmi les  $12 - (k-1)$  clés restantes (probabilité  $\frac{1}{12 - (k-1)}$ ).

$$\text{D'où : } p_k = \frac{12 - k + 1}{12} \times \frac{1}{12 - k + 1} = \frac{1}{12}.$$

## 2. Loi de $X$ nombre total d'essais

Pour  $k$  de 1 à 12, notons  $X_k$  le nombre d'essais pour ouvrir la  $k^e$  porte.

On a :  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{12}$ .

Et il s'agit de variables aléatoires indépendantes car la façon d'ouvrir une porte n'a pas d'influence sur l'ouverture de la porte suivante.

D'après la question précédente,  $X_1$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, 12 \rrbracket$

$$\text{D'où : } E(X_1) = \frac{12 + 1}{2} = 6,5 \quad \text{et} \quad V(X_1) = \frac{12^2 - 1}{12} = \frac{143}{12}.$$

De même, pour  $1 \leq k \leq 12$ ,  $X_k$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, 12 - (k - 1) \rrbracket$ .

$$\text{D'où : } E(X_k) = \frac{12 - (k - 1) + 1}{2} = \frac{14 - k}{2}$$


$$\text{et} \quad V(X_k) = \frac{(12 - (k - 1))^2 - 1}{12} = \frac{(13 - k)^2 - 1}{12}.$$

D'après les théorèmes sur l'espérance mathématique et la variance de la somme de variables aléatoires indépendantes, on en déduit :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{12} E(X_k) = \sum_{k=1}^{12} \frac{14 - k}{2} = 12 \times 7 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{12} k = 45$$

$$V(X) = \sum_{k=1}^{12} V(X_k) = \sum_{k=1}^{12} \frac{(13 - k)^2 - 1}{12} - \frac{1}{12} \times 12 = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{12} k^2 - 1 = \frac{319}{6}$$

$$\text{puis : } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 7,29.$$

 Rappelons que :  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  et  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

## Exercice 2

$$\begin{aligned} \bullet \quad \text{Cov}(X + Y, X - Y) &= \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, -Y) + \text{Cov}(Y, X) + \text{Cov}(Y, -Y) \\ &= \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(Y, Y) && \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\ &= 0 && \text{car } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi} \end{aligned}$$

- Pour montrer que  $X + Y$  et  $X - Y$  ne sont pas indépendantes, il suffit d'un contre-exemple.

$\llbracket (X + Y = 2) \cap (X - Y = 1) \rrbracket$  est un événement impossible puisque les seules valeurs possibles pour  $X$  et  $Y$  sont 0 et 1. On a donc  $\mathbb{P}[\llbracket (X + Y = 2) \cap (X - Y = 1) \rrbracket] = 0$ .

$$\mathbb{P}(X + Y = 2) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = p^2 \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}$$

$$\mathbb{P}(X - Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 0) = pq \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}[\llbracket (X + Y = 2) \cap (X - Y = 1) \rrbracket] \neq \mathbb{P}(X + Y = 2) \times \mathbb{P}(X - Y = 1),$$

ce qui prouve que  $X + Y$  et  $X - Y$  ne sont pas indépendantes.

### Exercice 3


On a toujours :  $E(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu$ .

Comme les  $X_i$  sont deux à deux indépendantes, on a aussi :  $V(Z_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$ .

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\mathbb{P}(|Z_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$$

ce qui entraîne le résultat annoncé.

 *Le résultat démontré est appelé loi faible des grands nombres. Il justifie l'assimilation entre la probabilité d'un événement et sa fréquence observée sur un échantillon de grande taille.*

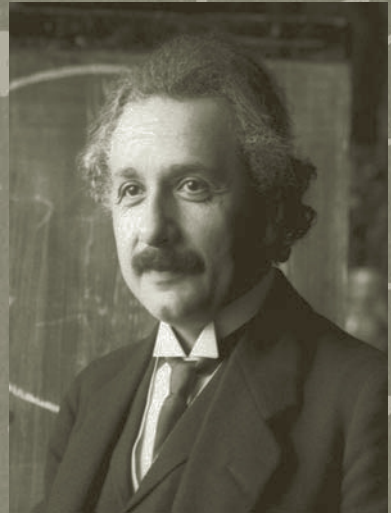


# Partie 2

## Physique



**Max Planck, 1858-1947**



**Albert Einstein, 1879-1955**

La physique quantique étudie les phénomènes fondamentaux à l'échelle atomique et sub-atomique. Parmi ses pères :

**Max Planck** : prix Nobel de physique de 1918 pour ses travaux en théorie des quanta.

**Albert Einstein** : prix Nobel de physique de 1921 pour son explication de l'effet photoélectrique.



# 1 Oscillateur harmonique

## 1. Définition oscillateur harmonique

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  accroché à l'extrémité d'un ressort sans masse, de raideur  $k$ , de longueur à vide  $l_0$  dont l'autre extrémité est fixe et pouvant se déplacer sans frottement sur une tige horizontale.

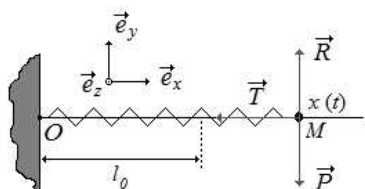


fig. 1

## 2. Mise en équation

- **Le système étudié** : la masse ponctuelle .
- **Le référentiel d'étude** : le référentiel terrestre supposé galiléen.
- **Le repère de projection** : le repère orthonormé de projection  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Dans ce repère, le point matériel  $M$  a pour coordonnées  $(x(t), 0, 0)$ , le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x(t) \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z = x(t) \vec{e}_x.$$



$x(t)$  représente aussi dans cet exemple la longueur du ressort à l'instant  $t$ .

- **Le bilan des forces** qui s'exercent sur la masse :

$$\text{le poids} \quad \vec{P} = m\vec{g} = -mg \vec{e}_y$$

$$\text{la tension du ressort} \quad \vec{T} = -k(x(t) - l_0) \vec{e}_x$$

$$\text{la réaction de la tige} \quad \vec{R} = R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z$$

- **Mise en équation** : le référentiel d'étude étant supposé galiléen, appliquons à la masse le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}$$

où  $\vec{a}$  est l'accélération du point matériel dans le référentiel de l'étude :

$$\vec{a} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}(t) \vec{e}_x \quad \text{notée aussi} \quad \vec{a} = \ddot{\overrightarrow{OM}} = \ddot{x}(t) \vec{e}_x.$$

La projection de la relation fondamentale sur les trois vecteurs de base du repère de projection donne :

$$\text{sur } \vec{e}_x : m\ddot{x}(t) = -k(x(t) - l_0);$$

$$\text{sur } \vec{e}_y : 0 = R_y - mg;$$

$$\text{sur } \vec{e}_z : 0 = R_z.$$

- **L'équation du mouvement** : c'est l'équation différentielle portant sur  $x(t)$  :

$$m\ddot{x}(t) = -k(x(t) - l_0).$$

- **La position d'équilibre** : si la masse ponctuelle est à l'équilibre dans le référentiel, sa vitesse et son accélération y sont nulles.

Cette position  $x_{eq}$  doit ainsi satisfaire :  $0 = -k(x_{eq} - l_0)$ ; soit  $x_{eq} = l_0$ .

Le ressort possède alors sa longueur à vide, ni allongé, ni comprimé.

- **Simplification de l'équation du mouvement** : soit  $X(t)$  l'écart par rapport à la position d'équilibre  $X(t) = x(t) - x_{eq} = x(t) - l_0$ .

Alors  $\dot{X}(t) = \dot{x}(t)$  et  $\ddot{X}(t) = \ddot{x}(t)$ . L'équation devient :

$$m\ddot{X}(t) = -kX(t) \quad \text{écrite :} \quad \ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad (1-1)$$

avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Seule sa solution positive est retenue et par définition :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1-2)$$



Chaque fois qu'une grandeur physique  $g(t)$  satisfait à une équation du type :

$$\ddot{g} + a g = f$$

avec  $a > 0$  et  $f$  une fonction du temps donnée, la grandeur  $g$  est de nature oscillatoire. En posant  $a = \omega_0^2$  on retrouve le même membre de gauche que l'égalité (1-1).

## 3. Résolution de l'équation du mouvement

### 3.1 Solution générale

Résoudre l'équation (1-1), c'est trouver toutes les fonctions du temps qui y satisfont. La solution la plus générale est :

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \text{ou} \quad X(t) = C \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $\varphi$  sont des constantes, appelées **constantes d'intégration**.

Les constantes  $(A, B)$  ou  $(C, \varphi)$  sont à déterminer à partir des **conditions initiales**, souvent l'écart de la masse par rapport à la position d'équilibre à l'instant initial  $X(0)$ , et sa vitesse à cet instant  $\dot{X}(0)$ .

Supposons qu'à  $t = 0$ ,  $X(0) = X_0$  et  $\dot{X}(0) = V_0$  où  $X_0$  et  $V_0$  sont de signe quelconque.

### 3.2 Utilisation des conditions initiales (première forme)

- Avec la première forme de  $X(t)$  les conditions initiales s'écrivent :

$$X(0) = A \cos(\omega_0 \times 0) + B \sin(\omega_0 \times 0) = A = X_0.$$

$$\dot{X}(0) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 \times 0) + B\omega_0 \cos(\omega_0 \times 0) = B\omega_0 = V_0 \text{ d'où } B = \frac{V_0}{\omega_0}.$$

- Ainsi, l'écart à la position d'équilibre s'écrit :

$$X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega_0 t)$$

et la position dans le repère initial :

$$x(t) = X(t) + l_0 = l_0 + X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega_0 t) \quad (1-3)$$

### 3.3 Deuxième forme de la solution

Pour mettre la solution obtenue sous la deuxième forme, on utilise la transformation de  $a \cos t + b \sin t$  qui figure dans la partie maths, fiche 19 §5.5

On calcule :  $C = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_0}\right)^2}$  et on définit l'angle  $\varphi$  tel que :

$$\cos \varphi = \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{\frac{V_0}{\omega_0}}{\sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_0}\right)^2}}$$


La solution s'écrit alors :

$$x(t) = l_0 + C \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad (1-4)$$

A est l'amplitude de l'oscillation autour de la position d'équilibre.

## 4. Vocabulaire associé


- La **pulsation propre**  $\omega_0$  de l'oscillateur est exprimée en  $\text{rad.s}^{-1}$ . Sa dimension est l'inverse d'un temps :  $[\omega_0] = T^{-1}$ .

 D'une manière générale, des crochets [ ] placés autour d'une grandeur physique  $g$ , comme  $[g]$ , signifient « dimension de  $g$  ».

- La **fréquence propre**  $f_0$  telle que  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  est exprimée en hertz (Hz). Sa dimension est aussi celle de l'inverse d'un temps :  $[f_0] = T^{-1}$ .
- La **période propre**  $T_0$  telle que  $T_0 = \frac{1}{f_0}$  est exprimée en seconde (s). Sa dimension est celle d'un d'un temps :  $[T_0] = T$ .
- **L'amplitude**  $C$  de l'oscillation par rapport à la position d'équilibre, exprimée en mètre (m), a la dimension d'une longueur :  $[C] = L$ .
- La **phase à l'origine**  $-\varphi$ , exprimée en radian (rad), est sans dimension :  $[\varphi] = 1$ .
- La **phase instantanée**  $\omega_0 t - \varphi$ , exprimée en radian (rad), est sans dimension :  $[\omega_0 t - \varphi] = 1$ .

## 5. Description du mouvement

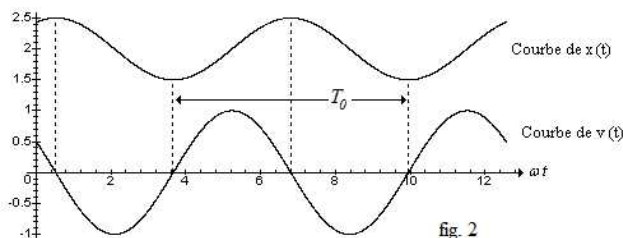
- Le mouvement se caractérise par une oscillation périodique, de période  $T_0$  et d'amplitude  $C$  autour de la position d'équilibre.

 Pour un oscillateur harmonique de caractéristiques  $m$  et  $k$  données, la période des oscillations est indépendante de leur amplitude. L'amplitude et la phase à l'origine dépendent des conditions initiales.

- Le point matériel se déplace entre les abscisses  $l_0 - C$  et  $l_0 + C$ .

Sa vitesse varie entre  $-C\omega_0$  et  $+C\omega_0$ .

Un exemple de courbes représentatives de  $x(t)$  et de  $\dot{x}(t)$  est donné par la figure 2 :



## 6 Énergie de l'oscillateur

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique. On exprime les trois énergies à l'aide de l'expression (1-4).

### 6.1 Énergie cinétique de la masse dans le référentiel de l'étude

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{4}m\omega_0^2 C^2 (1 - \cos(2\omega_0 t - \varphi)). \quad (1-5)$$

L'énergie cinétique du point  $M$  varie à la fréquence  $2f_0$ , double de celle des oscillations. La vitesse change de signe toutes les demi-périodes d'où  $\dot{x}\left(t + \frac{T_0}{2}\right) = -\dot{x}(t)$  et leurs carrés redeviennent égaux toutes les demi-périodes.

Sa valeur moyenne  $\langle E_c \rangle$  est positive, égale à :

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{4}m\omega_0^2 C^2 = \frac{1}{4}m\omega_0^2 \left( X_0^2 + \left( \frac{V_0}{\omega_0} \right)^2 \right) = \frac{1}{4}kX_0^2 + \frac{1}{4}mV_0^2$$

en vertu de la relation (1-2) définissant la pulsation.

### 6.2 Énergie potentielle élastique du ressort

$$E_p = \frac{1}{2}k(l(t) - l_0)^2$$

où  $l(t)$  est la longueur instantanée du ressort,  $l(t) - l_0$  représentant son allongement algébrique instantané. Comme dans le problème étudié  $l(t) = x(t)$ , il vient :


$$E_p = \frac{1}{2}kX^2(t) = \frac{1}{4}kC^2 (1 + \cos(2\omega_0 t - \varphi)). \quad (1-6)$$

L'énergie potentielle élastique du ressort varie, elle aussi, à la fréquence  $2f_0$ .

L'allongement algébrique change de signe à chaque demi-période,  $X\left(t + \frac{T_0}{2}\right) = -X(t)$  et donc son carré reprend la même valeur toutes les demi-périodes.

Sa valeur moyenne  $\langle E_p \rangle$  vaut :

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{4}kC^2 = \frac{1}{4}k\left(X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_0}\right)^2\right) = \frac{1}{4}kX_0^2 + \frac{1}{4}mV_0^2.$$

 L'égalité  $\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle$  est une propriété fondamentale des oscillateurs harmoniques. On nomme cette propriété l'équipartition de l'énergie.

### 6.3 Énergie mécanique de l'oscillateur

- La valeur de l'énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p$  à un instant  $t$  quelconque vaut, grâce à (1-5) et (1-6) :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}kX_0^2,$$

Elle est constante, indépendante du temps : on dit que le système est **conservatif**.

- On y reconnaît l'énergie cinétique initiale communiquée à la masse et l'énergie potentielle élastique initiale accumulée à cause de l'écartement de la position d'équilibre qui est aussi la longueur à vide du ressort.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Un oscillateur harmonique est placé en position verticale dans le champ de pesanteur terrestre, son point de suspension  $O$  étant au-dessus de la masse. Ces caractéristiques sont : masse  $m = 100$  g, raideur  $k = 10$  N.m<sup>-1</sup> et longueur à vide  $l_0 = 25$  cm. Quelle est sa position d'équilibre ?

**Exercice 2 :** On reprend la situation de l'exercice 1. L'oscillateur est écarté vers le bas de sa position d'équilibre d'une quantité  $E_0 = 5$  cm avec une vitesse initiale  $v_0 = 0,5$  m.s<sup>-1</sup>. Déterminez la loi horaire  $x(t)$  de son mouvement.

## 2 Propagation d'un signal


### 1. Exemples de signaux, spectre

#### 1.1 Exemples

- Un son, une lumière directe, réfléchiée ou diffusée par un objet, la houle, la vibration mécanique le long d'un tuyau, une tension ou un courant électriques. D'une manière générale, toute modification de l'état physique d'un milieu constitue un **signal**.
- Les grandeurs physiques variables associées aux signaux mécaniques sont, par exemple : la pression d'un gaz (son dans l'air), le déplacement ou la déformation par rapport à une position d'équilibre (d'une corde tendue ou d'une plaque solide), un champ électrique et un champ magnétique associés pour la lumière (du moins dans sa théorie ondulatoire). Il est d'usage de confondre le signal et les grandeurs physiques qui lui sont associées.

#### 1.2 Spectre

Il donne du signal une description qui en fait une **superposition** (une somme) de composantes sinusoïdales. On le représente, soit par une fonction  $S(f)$ , soit par des raies à des fréquences spécifiquement définies (cf fig. 1).

 Attention, le terme de « spectre » désigne parfois, improprement, l'intervalle de fréquences des composantes sinusoïdales participant au signal en question,  $f_M - f_m$ , c'est-à-dire l'**étendue spectrale** ou simplement  $f_M$ , la fréquence la plus élevée entrant dans la décomposition du signal.

#### 1.3 Ordres de grandeur

- **spectre audible acoustique**

Il est conventionnellement borné par 20 Hz (grave) et 20 kHz (aigu).

La variation de pression audible va de  $3 \times 10^{-5}$  Pa (limite de l'audition) à 30 Pa (seuil de la douleur). En deçà de 20 Hz, on parle d'**infrasons**, au-delà, d'**ultrasons**.

- **Spectre électromagnétique**

Il va de quelques Hz à  $10^{15}$  Hz pour le proche ultraviolet.

Le spectre visible s'étend de 3,75 à  $7,5 \times 10^{14}$  Hz.

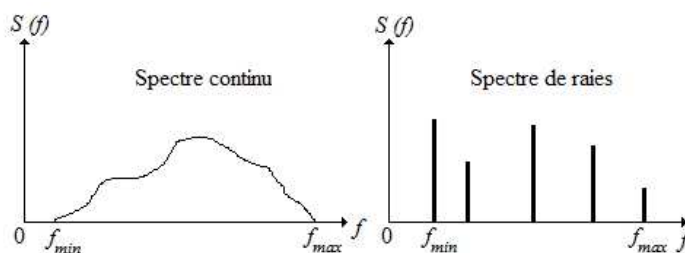


fig. 1



## 2. Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle

### 2.1 Onde progressive

C'est un signal se propageant de proche en proche dans un milieu, transportant de l'énergie mais aucune matière.

Son énergie est localisée dans les régions de l'espace où le signal est non nul.

La grandeur physique caractéristique d'un signal se propageant selon la direction ( $Ox$ ) sera désignée par  $s(x, t)$ , fonction donnant la valeur de cette grandeur physique en un point d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$ .

### 2.2 Caractère longitudinal ou transversal de l'onde

- Si la grandeur physique variable entraîne une modification de l'état physique du milieu perpendiculairement à la direction de propagation, on parle d'**ondes transversales**.

*Exemples* : ondes mécaniques sur une corde tendue, ondes électromagnétiques, ondes mécaniques de cisaillement dans les solides.

- Si la modification du milieu se produit dans la direction de propagation, on parle d'**ondes longitudinales**.

*Exemples* : les ondes acoustiques, les ondes mécaniques de compression dans les solides.

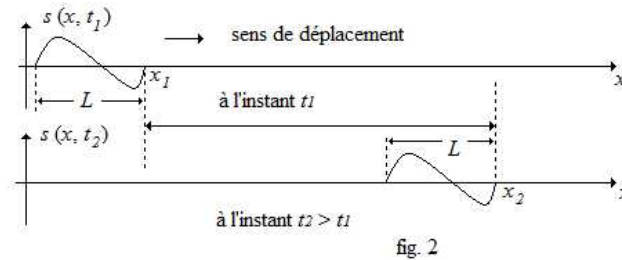
### 2.3 Caractéristiques du milieu de propagation

- On distingue parmi tous les milieux ceux qui sont dits **linéaires non dispersifs**.

Le caractère non dispersif se traduit par le fait qu'une onde s'y propage dans une direction donnée sans s'y déformer (cf fig. 2).

Le caractère linéaire provient de ce que plusieurs signaux peuvent s'y propager simultanément sans que leurs caractéristiques propres n'influencent les unes sur les autres.

L'état du milieu en un point et à un instant donnés vis-à-vis de tels signaux, est alors la somme de leurs valeurs respectives en ce point et à cet instant.



- La répartition spatiale dans la direction de propagation de la grandeur propagée  $s(x, t)$  conserve la même allure. Elle a seulement subi une translation le long du milieu de propagation.

- Le signal qui arrivait au point  $M_1$  d'abscisse  $x_1$  à l'instant  $t_1$ , atteint le point  $M_2$  d'abscisse  $x_2 > x_1$  à l'instant ultérieur  $t_2$ . On appelle  $t_2 - t_1$  le **retard temporel** du signal en  $M_2$  par rapport au signal en  $M_1$ . C'est le temps mis par le signal pour passer de  $M_1$  à  $M_2$ .

$t_2 - t_1$  désigne aussi l'avance du signal en  $M_1$  sur ce qu'il sera en  $M_2$ .


### 2.4 Célérité de propagation

On définit la **célérité**  $c$  de propagation du signal dans le milieu considéré, par la valeur abso-

lue du rapport de la distance  $\Delta x$  dont s'est déplacé le front du signal pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  :

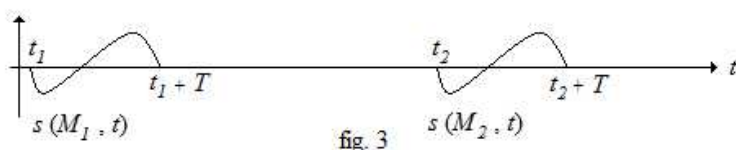
$$c = \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| \quad (2-1)$$

égale sur l'exemple de la figure 2 à :  $\left| \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right|$ .

 La célérité est par définition positive car elle caractérise physiquement l'élasticité et l'inertie du milieu. Aussi convient-il, lors de l'étude d'un signal, de prêter attention au sens de son déplacement vers les  $x$  croissants ou décroissants.

## 2.5 Dualité des représentations spatiales et temporelles du signal en un point

- Le signal perçu en un point  $M_1$  d'abscisse  $x_1$ ,  $s(x_1, t)$  (fig. 3), se déduit de la répartition spatiale du signal le long de la direction de propagation à un instant donné si son sens de déplacement est connu (fig. 2).



Supposons connu, par exemple,  $s(x, t_1) = f(x)$ . Soit  $s(x_1, t)$  la valeur du signal en  $M_1$  d'abscisse  $x_1$ . Elle s'obtient en constatant, qu'à l'instant  $t$ , elle doit être égale à celle,  $s(x, t_1)$ , qu'il avait à l'instant  $t_1$  en un point  $x$  tel que le temps de propagation de  $x$  à  $x_1$  soit égal à  $t - t_1$ .

Pour un signal se propageant dans le sens des  $x$  croissants, on a :  $t - t_1 = \frac{x_1 - x}{c}$ .

De sorte que  $s(x_1, t)$  est égale à la valeur du signal à l'instant  $t_1$  au point d'abscisse  $x_1 - c(t - t_1)$ . Ceci se traduit par :

$$s(x_1, t) = s(x_1 - c(t - t_1), t_1) = f(x_1 - c(t - t_1)) = g(t)$$


La forme temporelle d'un signal qui s'étale spatialement sur  $L$  est celle obtenue par le retournement spatial de  $s(x, t_1)$ , étalé temporellement sur une durée  $T = \frac{L}{c}$ .

 Remarquez la présence de la quantité  $x_1 - ct$  dans l'argument de la fonction  $f$ .

- Réciproquement, si le signal temporel en un point  $x_1$  est connu par  $s(x_1, t) = g(t)$ , la répartition spatiale du signal à un instant  $t_1$  donné s'en déduit. En un point d'abscisse  $x$  quelconque, à l'instant  $t_1$ , le signal possède la valeur,  $s(x, t_1)$ , qui était la sienne en  $x_1$  à l'instant « antérieur »  $t = t_1 - \frac{x - x_1}{c}$ . Ainsi :

$$s(x, t_1) = s\left(x_1, t_1 - \frac{x - x_1}{c}\right) = h(x).$$

La forme spatiale du signal est à nouveau obtenue en retournant la forme temporelle qu'il avait en un point donné. Si sa durée était  $T$ , son extension spatiale sera  $cT = L$ . On retrouve la quantité  $x - ct_1$  sous une forme un peu déguisée.

 Si le signal se propage dans le sens des  $x$  décroissants, il suffit de substituer  $-c$  à  $c$  dans les formules précédentes donnant  $g(t)$  et  $h(x)$ .

## 2.6 Expression générale d'un signal $s(x, t)$

La valeur instantanée d'un signal progressif se propageant à la célérité  $c$  dans un milieu non dispersif, en un point d'abscisse  $x$  et à un instant  $t$  quelconque, s'écrit, s'il propage :

- dans le sens des  $x$  croissants :  $s(x, t) = F(x - ct)$  ;
- dans le sens des  $x$  décroissants :  $s(x, t) = G(x + ct)$ .

## 3. Onde progressive sinusoïdale

### 3.1 Définition

Un cas particulier d'onde progressive est l'onde progressive sinusoïdale pour laquelle les fonctions  $F$  et  $G$  sont sinusoïdales. La valeur de la grandeur physique caractéristique de la perturbation du milieu est de la forme, à un instant  $t$  et en un point  $x$  donnés :

$$s(x, t) = S_m \cos(k(x - ct) + \varphi) \quad \text{ou} \quad S_m \cos(k(x + ct) + \varphi).$$

selon que sa propagation se fait respectivement vers les  $x$  croissants ou décroissants.  
 $s(x, t)$  est périodique en fonction à la fois de  $x$  et de  $t$ .

### 3.2 Vocabulaire

- L'**amplitude maximale** du signal est notée  $S_m$ .
- La **longueur d'onde**  $\lambda$  (en m) désigne la période spatiale définie par :

$$k\lambda = 2\pi. \quad (2-2)$$

- La **période temporelle**  $T$ , exprimée en seconde (s), est définie par :

$$kcT = \omega T = 2\pi \quad (2-3)$$

- La **pulsation**  $\omega = kc$  est exprimée en  $\text{rad.s}^{-1}$ . Elle est liée à la fréquence  $\nu$ , en Hz, par la relation :  $\omega = 2\pi\nu$ .
- $k$  est la norme, exprimée en  $\text{m}^{-1}$ , du **vecteur d'onde**, vecteur dirigé dans le sens de la propagation :

$$\vec{k} = k \vec{e}_x. \quad (2-4)$$

- **Relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la célérité**

$$c = \lambda\nu. \quad (2-5)$$

- La **phase instantanée**  $k(x \pm ct) + \varphi$ , est exprimée en radian (rad).

### 3.3 Déphasage

- Les signaux reçus en deux points d'abscisses respectives  $x_1$  et  $x_2$  sont :

$$\begin{aligned} s(x_1, t) &= S_m \cos(\omega t - kx_1 - \varphi) \\ s(x_2, t) &= S_m \cos(\omega t - kx_2 - \varphi). \end{aligned}$$

Ils sont sinusoïdaux, de même pulsation et déphasés l'un par rapport à l'autre.

Le déphasage de  $s(x_2, t)$  par rapport à  $s(x_1, t)$  est égal à la différence des phases instantanées :

$$(\omega t - kx_2 - \varphi) - (\omega t - kx_1 - \varphi) = k(x_1 - x_2).$$

- Si  $x_1 - x_2$  est égal à un nombre entier de longueur d'onde, le déphasage est un multiple de  $2\pi$  et son effet disparaît dans l'expression des signaux : les signaux sont alors dits **en phase**.
- Si  $x_1 - x_2$  est égal à un multiple impair de demi-longueur d'onde, le déphasage est alors égal à un multiple impair de  $\pi$  :  $s(x_1, t) = -s(x_2, t)$ . Les signaux sont dits **en opposition de phase**.
- D'une façon générale si le déphasage de  $s(x_2, t)$  par rapport à  $s(x_1, t)$  est positif, le premier signal sera dit **en avance** sur le second. Sinon, il sera dit en **retard**.

## 4. Interférences entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence

### 4.1 Description

- Le phénomène d'**interférences** résulte de la superposition dans une région donnée de l'espace de deux ondes progressives de même fréquence et ayant entre elles un déphasage fixe.
- Un exemple est fourni par deux émetteurs d'ondes ultrasonores alimentées par un même générateur de signaux basses fréquences (cf. fig. 4).

Lorsque l'on place un récepteur en un point  $M$ , on détecte un signal de même fréquence que celle imposée par le G.B.F. et qui est exactement la somme des signaux qu'il aurait reçus s'ils avaient été émis seuls par chacune des sources  $S_1$  et  $S_2$ .

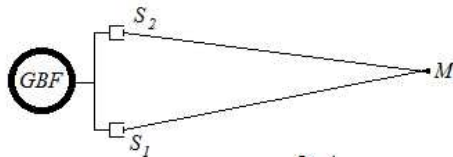


fig. 4

- Si l'on déplace parallèlement au plan des sources le récepteur autour du point  $M$ , la fréquence du signal reçu reste la même, mais son amplitude change, en passant par des minima et des maxima.

### 4.2 Interprétation

Les transducteurs  $S_1$  et  $S_2$  délivrent respectivement les signaux ultrasonores

$$s(S_1, t) = S_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad s(S_2, t) = S_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Le signal reçu en  $M$  est la somme des signaux issus de chacune des sources :

$$s(M, t) = S_{m1} \cos\left(\omega \left[t - \frac{S_1 M}{c}\right] + \varphi_1\right) + \dots + S_{m2} \cos\left(\omega \left[t - \frac{S_2 M}{c}\right] + \varphi_2\right)$$

où  $\frac{S_1 M}{c}$  et  $\frac{S_2 M}{c}$  sont les retards de propagation entre les sources et le point  $M$ .

### 4.3 Caractéristiques de la vibration résultante

L'amplitude et le déphasage de la vibration résultante en  $M$  sont déterminés par l'usage des grandeurs complexes associées à chacune des vibrations.

On utilise la représentation complexe :

$$\underline{s}(M, t) = S_m \exp[j(\omega t + \varphi)].$$

$\underline{s}(M, t)$  s'appelle l'amplitude complexe et on a :  $s(M, t) = \text{Re} [\underline{s}(M, t)]$ .

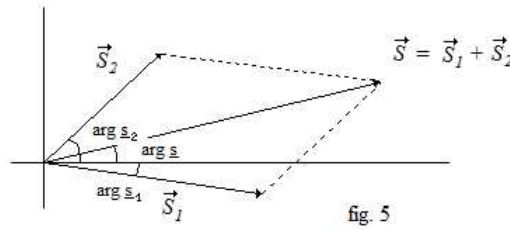
Soit  $\underline{s}_1(M, t)$  et  $\underline{s}_2(M, t)$  les grandeurs complexes construites de la même manière.

L'amplitude complexe résultante en  $M$  est alors :

$$S_m e^{j\varphi} = S_{m1} e^{j(\varphi_1 - kS_1 M)} + S_{m2} e^{j(\varphi_2 - kS_2 M)}.$$

$S_m$  est alors égale au module du complexe du membre de droite de l'égalité ; son argument  $\varphi$  est égal à l'argument de ce même complexe.

La situation se présente, géométriquement, comme sur la fig. 5 : on associe dans le plan un point image de chacun des complexes, les vecteurs construits entre l'origine et chacun de ces points sont appelés **vecteurs de Fresnel** des signaux.



Les longueurs des vecteurs correspondent aux amplitudes maximales des signaux et les angles par rapport au demi-axe des réels positifs aux arguments.

#### 4.4 Cas particulier

Un cas intéressant est celui où  $S_1, S_2$  et  $M$  sont alignés avec  $S_{m1} = S_{m2} = S$ .

Le signal résultant en  $M$  est alors :

$$s(M, t) = 2S \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \frac{k(S_2 M - S_1 M)}{2}\right) \times \dots \times \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \frac{k(S_2 M + S_1 M)}{2}\right)$$

$\left| 2S \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \frac{k(S_2 M - S_1 M)}{2}\right) \right|$  représente l'amplitude de la vibration.

Comme  $S_2 M - S_1 M = S_2 S_1$ , il advient que l'amplitude est, selon le modèle unidimensionnel adopté, indépendante de la position du point  $M$ , son alignement avec les deux sources étant conservé, et ne dépend que de la distance entre les sources et de leur déphasage temporel initial  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

#### 4.5 Interférences constructives ou destructives

- Les interférences sont dites **constructives** lorsque les ondes émises se renforcent mutuellement au point  $M$ .

À la limite, il existe des positions particulières pour lesquelles l'amplitude obtenue est maximale. Dans le cas particulier précédent, ceci se produit lorsque  $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \frac{k(S_2 M - S_1 M)}{2}$  est

un multiple entier de  $\pi$ .

- Les interférences sont dites **destructives** lorsque l'amplitude de la vibration est nulle. Ceci se produit, dans le même exemple, lorsque  $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \frac{k(S_2M - S_1M)}{2}$  est un multiple impair de  $\frac{\pi}{2}$ .

## 5. Ondes stationnaires mécaniques

### 5.1 Définition

On appelle **ondes stationnaires** une superposition de deux ondes progressives se propageant dans des directions opposées.

### 5.2 Exemple : la corde de Melde

- Une corde est tendue sous l'effet du poids d'une masse suspendue à l'une de ses extrémités. L'autre extrémité est excitée transversalement par un vibreur à une fréquence  $f$  réglable. Pour certaines fréquences particulières, la corde présente l'aspect de fuseaux nettement formés et d'amplitude très supérieure au déplacement du vibreur, les **ventres** de vibration, séparés par des points où la corde semble fixe, les **nœuds** de vibration.

Ce phénomène est appelé **résonance d'ondes stationnaires** (cf. fig.7).

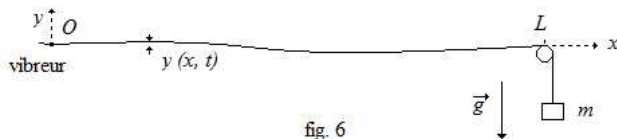


fig. 6

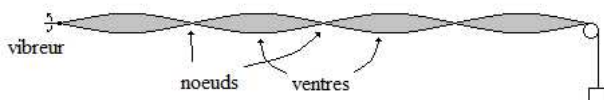



fig. 7

- L'observation au stroboscope de l'aspect de la corde montre alors que deux points quelconques de la corde situés entre deux nœuds consécutifs vibrent avec des amplitudes différentes mais rigoureusement en phase. En revanche, deux points appartenant à deux ventres immédiatement voisins vibrent en opposition de phase.

 Des ondes stationnaires existent sur la corde à n'importe quelle fréquence, mais les spectaculaires résonances d'ondes stationnaires n'existent que pour certaines d'entre elles, multiples d'une fréquence fondamentale.

### 5.3 Aspects quantitatifs

- La célérité de propagation des ébranlements le long de la corde est égale à :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (2-6)$$

où  $T$  est la tension créée par la masse ( $T = mg$ ) et  $\mu$  la masse linéique (masse par unité de

longueur) de la corde.

- Le vibreur étant pris comme origine de la corde, posons que le déplacement transversal dû à l'onde progressive incidente s'écrit :

$$y_i(x, t) = Y_m \cos(\omega t - kx) \quad \text{où } kc = \omega.$$

Supposons qu'à l'onde réfléchie corresponde un déplacement transversal :

$$y_r(x, t) = -Y_m \cos(\omega t + kx).$$

Le déplacement transversal total de la corde en un point  $x$  est égal à :

$$y(x, t) = y_i(x, t) + y_r(x, t) = 2Y_m \sin(\omega t) \sin(kx).$$

- Comme  $y(x, t) \neq F(x - ct)$  ou  $G(x + ct)$ , le caractère propagatif a disparu.

En un point d'abscisse  $x$  de la corde, l'amplitude de la vibration est donnée par  $|2Y_m \sin(kx)|$ .

Deux points sur la corde d'abscisses  $x_1$  et  $x_2$  telles que  $\sin(kx_1)$  et  $\sin(kx_2)$  ont le même signe, vibrent en phase.

Si les signes des deux sinus sont opposés, les points vibrent en opposition de phase.

## 5.4 Condition de résonance

- En  $x = 0$ , en négligeant le déplacement du vibreur devant l'épaisseur des ventres de vibration, l'amplitude peut être considérée comme nulle, conformément à la formule.

Pour que l'amplitude soit également nulle en  $x = L$ , il faut que  $\sin(kL) = 0$ , soit  $kL = n\pi$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  entier naturel non nul.

Cette exigence sélectionne les valeurs de  $k$ , et donc les fréquences  $f_n$ , qui leur correspondent.

$$\frac{2\pi f_n}{c} L = n\pi \iff f_n = n \frac{c}{2L}. \quad (2-7)$$

La fréquence  $f_0 = \frac{c}{2L}$  est appelée la **fréquence fondamentale** de la corde. À cette fréquence, la corde est le siège d'un seul ventre de vibration, de longueur  $L$  égale à la demi-longueur d'onde associée à  $f_0$ .

Les fréquences multiples de  $f_0$  sont appelées les **fréquences harmoniques**.

Lorsque la corde vibre à la fréquence  $f_n$ , la corde est le siège de  $n$  ventres de vibration, chacun de longueur  $\frac{L}{n}$ .

- Les fréquences de résonance  $f_n$  et la répartition spatiale des amplitudes correspondantes, proportionnelles à  $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , caractérisent les **modes propres** de vibration de la corde, c'est-à-dire les façons « les plus simples » qu'à la corde tendue de vibrer librement, ses deux extrémités étant fixes.

La position d'équilibre correspond à  $y(x, t) = 0 \quad \forall x \in [0; L]$  ; écartée de cette dernière et laissée à elle-même, la corde vibrera selon une superposition de modes propres :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

où les amplitudes  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et les phases  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont déterminées par les conditions de tirage de la corde à l'instant initial :  $y(x, 0)$  connue et  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$ .

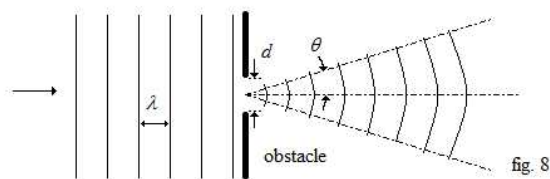
Dans ces conditions, tous les  $\varphi_n$  sont nuls et :

$$Y_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

## 6. Diffraction à l'infini

### 6.1 Définition

Le phénomène de diffraction survient lorsqu'un obstacle matériel limite l'étendue d'une onde progressive. Il se traduit par un élargissement du front d'onde après le passage de l'obstacle par rapport à ce qu'il serait dans son ombre géométrique (cf. fig. 8). Il n'est cependant marqué que lorsque la dimension caractéristique de l'ouverture dans l'obstacle est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de la vibration.



### 6.2 Aspect quantitatif

L'élargissement du front d'onde est caractérisé par son ouverture angulaire  $\theta$  par rapport à la direction générale de propagation avant le franchissement de l'obstacle.

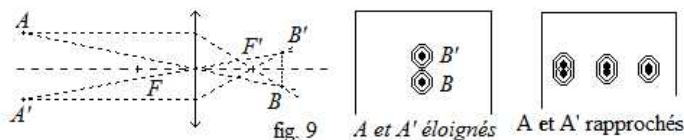
Si  $d$  est une dimension caractéristique de l'obstacle et  $\lambda$  la longueur d'onde de la vibration qui se propage, l'ouverture angulaire  $\theta$  parallèlement à cette dimension  $d$  est toujours de l'ordre  $\frac{\lambda}{d}$  à un facteur numérique près, de l'ordre de l'unité, traduisant la forme de l'obstacle.

$$\theta \sim \frac{\lambda}{d}. \quad (2-8)$$

### 6.3 Conséquences

Le phénomène de diffraction est important en optique car il limite le pouvoir de résolution des instruments d'optique : l'image d'un point  $A$  par une lentille ou un miroir non plan n'est plus le point  $A'$  conjugué de  $A$  par le système optique mais une tache lumineuse autour de  $A'$ . En effet, l'onde sphérique issue de  $A$  est limitée par le diamètre de la lentille ou du diaphragme rajouté pour se placer dans les conditions de Gauss (voir plus loin).

Un système optique forme, de deux points voisins dans un même plan objet, deux taches lumineuses voisines dans le plan image (cf. fig. 9), les deux points objets seront distingués si leurs images respectives peuvent l'être aussi.



### 6.4 Critère de Rayleigh

Deux images sont distinctes si le rayon de leur tache principale de diffraction est inférieur ou égal à la distance séparant leurs centres respectifs.



## 6.5 Pouvoirs de résolution

- Pour une lunette astronomique ou un télescope, les objets sont considérés comme étant à l'infini et ce pouvoir de résolution se traduit par un écart angulaire minimal entre les directions d'où proviennent les lumières émises par les deux objets.

Cet écart est conventionnellement fixé à  $1,22 \frac{\lambda}{D}$  d'après le critère de Rayleigh.

$\lambda$  est la longueur d'onde de la radiation détectée et  $D$  l'ouverture (le diamètre) du télescope.

- Pour un microscope, le pouvoir séparateur des objets, qui s'exprime par la distance minimale qui doit les séparer, a pour expression  $0,61 \frac{\lambda}{n \sin u}$  où  $n$  est l'indice moyen des verres employés pour fabriquer les lentilles et  $u$  l'angle sous lequel on voit le rayon de l'objectif depuis l'objet.

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Un signal se propage selon la direction  $x'Ox$  dans un milieu non dispersif. La représentation temporelle en un point  $M_2$  d'abscisse  $x_2$  d'un signal s'y propageant dans le sens des  $x$  décroissants,  $s(x_2, t)$  étant connue, exprimez la répartition spatiale  $s(x, t_2)$  du signal à l'instant  $t_2$ .

**Exercice 2 :** Pourquoi les stations de radiodiffusion de la bande F.M. doivent-elles opérer avec des fréquences différentes entre réémetteurs voisins ?

# **3** Optique géométrique

## **1. Principes et lois**

### **1. Sources lumineuses**

#### **1.1 Définition**

Au sens strict, une source lumineuse est un dispositif émettant un rayonnement électromagnétique appartenant au spectre visible, mono - ou polychrome - c'est-à-dire d'une seule « couleur » ou dans lequel plusieurs « couleurs » se trouvent mêlées. Au sens large, il s'agit d'un dispositif émettant un rayonnement électromagnétique de fréquence(s) quelconque(s).

#### **1.2 Modèle de la source ponctuelle monochromatique**

Utilisé pour son caractère simple et pratique, un point géométrique  $S$ , modélise la source. Elle est supposée émettre son énergie lumineuse identiquement dans toutes les directions de l'espace.

On n'y tient compte ni de la nature physique du rayonnement (onde électromagnétique continue ou flux de quanta d'énergie, les photons), ni de ses dimensions.

#### **1.3 Spectre des sources**

La lumière émise par une source peut être considérée comme un signal caractérisé par une certaine distribution d'énergie : son spectre (cf. fiche 2 §1 fig. 1). Il peut ainsi être continu, de raies discrètes, ou mixte.

#### **1.4 Exemples**

Sources à spectre continu : les sources naturelles (directes, comme les étoiles ou de diffusion, telle la lune), certaines sources artificielles (les lampes à incandescence, les lampes à arc). Les lampes spectrales (décharge dans une vapeur d'un élément à basse pression) ont un spectre de raies.

## **2. Approximation de l'optique géométrique et notion de rayon lumineux**

#### **2.1 Définition**

L'**optique géométrique** est la science de la propagation de la lumière à travers des milieux transparents ou réfléchissants sans référence à son caractère ondulatoire mais en faisant appel à la notion de rayons lumineux.

#### **2.2 Rayon lumineux**

Courbe géométrique dans l'espace à trois dimensions le long de laquelle est censée se propager l'énergie lumineuse entre deux points. L'idée de rayon lumineux est approchée par l'étroit faisceau issu d'une source LASER vu à une distance grande par rapport à son diamètre.

#### **2.3 Limite du modèle géométrique**

Le phénomène de diffraction empêche que, par un procédé quelconque, on puisse rendre aussi

fin qu'on le désirerait un faisceau lumineux pour se rapprocher du rayon lumineux théorique. En effet, si l'énergie lumineuse rencontre un obstacle de l'ordre de grandeur de quelques longueurs d'onde du rayonnement qui limiterait son espace de propagation, ou bien si les caractéristiques physiques du milieu varient à cette même échelle, l'optique géométrique et ses rayons lumineux doivent céder la place à l'optique ondulatoire et à la théorie de la diffraction.

### 3. Indice optique d'un milieu transparent

#### 3.1 Milieu homogène

Milieu en tous points duquel les propriétés physiques qui y caractérisent la propagation des rayons lumineux sont identiques.

#### 3.2 Propriété fondamentale des rayons lumineux

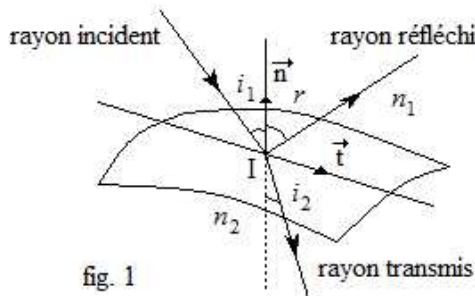
Ils se propagent en ligne droite dans tout milieu transparent homogène.

#### 3.3 Indice optique

- La diversité des milieux transparents se traduit par des vitesses de propagation de l'énergie lumineuse différentes. On constate que la vitesse  $v$  de la lumière dans un milieu transparent est inférieure à celle,  $c$ , dans le vide. Le rapport  $\frac{c}{v}$  définit l'**indice optique**  $n$  du milieu transparent.
- L'indice du milieu dépend en général de la fréquence de la lumière monochromatique employée, ce qui se traduit par l'existence d'une fonction  $n(\lambda)$ .
- L'indice optique de l'air dans les conditions habituelles de température et de pression est pris égal à 1, sauf exception.
- D'une manière générale, les conditions physiques influent sur l'indice optique d'un milieu matériel ; par exemple, la température pour l'air (en été, phénomène de mirage au-dessus d'une route au revêtement sombre longuement chauffé). Les indices optiques des solides transparents dépendent des contraintes qui s'exercent sur eux.
- D'après la définition de la longueur d'onde d'un rayonnement monochromatique de fréquence  $\nu$ , elle est égale dans le vide à  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$  et dans un milieu transparent d'indice  $n$  à  $\lambda = \frac{v}{\nu}$ . Il en résulte que  $\lambda_0 = n\lambda$ .

## 4. Réflexion-réfraction ; lois de Descartes

### 4.1 Réflexion-réfraction



- Lorsqu'un rayon lumineux passe d'une région de l'espace remplie d'un milieu homogène d'indice optique  $n_1$  à une région où l'indice optique est  $n_2$ , une partie de l'énergie lumineuse qu'il transporte est réfléchiée dans le milieu d'incidence et une autre est transmise dans le se-

cond milieu (cf. fig. 1).

- Si le rayon lumineux transmis n'est pas dans le prolongement du rayon incident, on parle de phénomène de **réfraction**. Plus l'indice d'un milieu est élevé, plus le milieu est dit **réfringent**.

## 4.2 Les trois lois de Snell-Descartes

- Soit  $I$  le point de la surface - le **dioptre**- séparant deux milieux où un rayon lumineux passe de l'un à l'autre.

Soit  $\vec{n}$  un vecteur unitaire normal au dioptre en  $I$  et  $\vec{\tau}$  un second vecteur unitaire appartenant à la direction du plan tangent en  $I$  au dioptre, définissant le **plan d'incidence**  $(I, \vec{n}, \vec{\tau})$ , c'est-à-dire le plan contenant le rayon lumineux incident.

Soit  $i_1$ , l'**angle d'incidence**, angle compté de la direction  $(I, \vec{n})$  normale au dioptre au point  $I$  vers le rayon incident,  $r$ , l'**angle de réflexion**, compté de la même normale vers le rayon réfléchi et  $i_2$ , l'**angle de réfraction**, angle compté de la direction normale au dioptre en  $I$  dans le second milieu  $(I, -\vec{n})$  vers le rayon transmis dans ce milieu.

**Première loi :** *les rayons incidents, réfléchis et transmis sont contenus dans le plan d'incidence. Ils sont coplanaires.*

**Deuxième loi :** *les angles d'incidence et de réflexion sont égaux.  $i_1 = r$ .*

**Troisième loi :** *Les angles d'incidence et de réfraction sont liés par la relation :*

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \quad (3-1)$$

## 4.3 Phénomène de réflexion totale

- D'après la troisième loi de Snell-Descartes quand un rayon lumineux passe d'un milieu d'incidence plus réfringent à un autre qui l'est moins, avec un l'angle d'incidence trop élevé, il est possible qu'il n'existe aucune valeur de l'angle de réfraction satisfaisant la relation (3-1).

Le rayon lumineux incident se réfléchit alors totalement en  $I$  et l'énergie lumineuse retourne dans le milieu d'incidence.

- L'angle d'incidence minimal  $i_{1m}$  que doit faire le rayon incident avec la normale au dioptre de séparation des milieux pour qu'il y ait réflexion totale est :

$$i_{1m} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad \text{avec } n_2 < n_1.$$

- La réflexion totale est utilisée dans les fibres optiques pour y confiner l'énergie lumineuse et guider ainsi l'information entre une source et un destinataire. Une fibre optique est constituée d'un cœur cylindrique d'indice supérieur à celui de la gaine qui l'entoure. Ainsi, si l'on injecte la lumière dans ce cœur avec une incidence **rasante**, c'est-à-dire un angle d'incidence proche de  $90^\circ$ , il y aura réflexion totale de la lumière injectée sur la gaine et la lumière restera dans le cœur qui lui sert alors de guide.

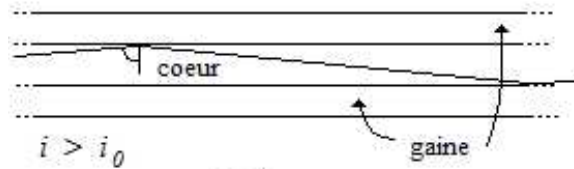


fig. 2

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Une fibre optique rectiligne possède un cœur circulaire en verre, d'indice optique  $n_v = 1,4$ , et sa gaine est l'air, d'indice  $n_a \approx 1$ . On injecte au centre d'une de ses sections droites (perpendiculaire à la direction de la fibre) un faisceau monochromatique.

Quel est l'angle maximal sous lequel cette injection doit être faite pour que la fibre guide en permanence le faisceau de lumière ?

## 4 Optique géométrique

### 2. Formation des images

#### 1. Présentation du sujet

##### 1.1 Introduction

L'expression de « formation d'une image » est un raccourci pour « formation de l'image d'un objet par un système optique ». Il s'agit d'étudier comment les rayons lumineux diffusés par tous les points de la surface d'un objet  $C$ , que nous supposons opaque, se concentrent pour constituer un autre « objet »  $C'$  après avoir traversé un système optique donné.

##### 1.2 Limitation du champ des études

L'étude est limitée ici aux systèmes optiques qui présentent - à l'exception notable du miroir plan - une symétrie de révolution autour d'une droite appelé **axe optique** du système. De tels systèmes optiques peuvent ainsi être tournés d'un angle quelconque autour de leur axe optique sans que change la position relative de l'image formée d'un certain objet par rapport à cet objet lui-même.

##### 1.3 Conventions des études

- Ces systèmes sont supposés pouvoir être indéfiniment étendus perpendiculairement à leur axe optique pour la construction des trajets des rayons lumineux. Ceci est naturellement contraire à la réalité puisque ces systèmes ont forcément des dimensions finies. Dans un système optique réel, certains rayons lumineux ont leur trajet interrompu.
- Le sens conventionnel de propagation des rayons lumineux est de la gauche vers la droite.
- Les objets choisis sont disposés perpendiculairement à l'axe optique et symboliquement représentés par un segment  $[AB]$  dont l'extrémité  $A$  est sur l'axe optique.

Pour former l'image de cet objet, on lance à partir du point  $B$  les rayons lumineux dont les trajets à travers le système optique présentent des propriétés particulières et sont connus.

L'image  $B'$  de  $B$  se trouve alors au point de concours des rayons émergents du système optique.  $B$  étant hors de l'axe optique, son image  $B'$  est, elle aussi, située hors de cet axe.

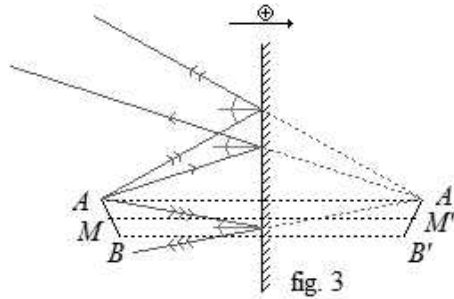
L'intersection du plan passant par  $B'$  et perpendiculaire à l'axe optique avec ce dernier définit la position de  $A'$ , image de  $A$  par le système optique.

L'image de l'objet  $AB$  est alors le segment  $[A'B']$  où chaque point  $M' \in [A'B']$  est l'image d'un point  $M$  unique appartenant à  $[AB]$ . On note conventionnellement  $A'B'$  l'image de  $AB$ .

### 2. Miroir plan

- Le miroir plan est le système optique le plus simple qui soit dénué d'axe optique unique. Les rayons lumineux n'y ont à satisfaire que la seconde loi de Snell-Descartes sur la réflexion. Soit un objet  $AB$  disposé de manière quelconque par rapport au miroir.


La figure 3 montre comment sont construits les rayons lumineux issus du point  $A$  : ils se réfléchissent sur le miroir plan avec, pour chacun d'eux, un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.



Les rayons réfléchis concourent au point  $A'$  qui est l'image de  $A$  par le miroir.  $A'$  est le symétrique de  $A$  par rapport au plan du miroir.

Si on construit de la même manière l'image  $M'$  de chaque point  $M$  appartenant à l'objet, l'ensemble de ces images constitue le segment de droite  $[A'B']$ , symétrique du segment  $[AB]$  par rapport au plan du miroir :  $A'B'$  est ainsi l'image de  $AB$ .


- Dans le cas présenté, où l'objet est situé en amont du miroir, on dit que l'objet est **réel**. L'image, située derrière le plan du miroir, est dite **virtuelle** car elle ne peut pas être projetée sur un écran diffusant.
- Le **principe du retour inverse de la lumière** fait que des rayons qui arriveraient sur le miroir en ayant les directions des rayons réfléchis, et convergeraient de ce fait en  $A'$ , se reflèteraient sur le miroir plan en convergeant en  $A$ .  $A'B'$  jouerait alors le rôle d'**objet virtuel**, et  $AB$  celui d'**image réelle** car les rayons lumineux qui servent à construire l'image pourraient être interceptés par un écran diffusant pour obtenir une projection de celle-ci.

 Pour un miroir plan, objet et image sont toujours de natures opposées : à un objet réel correspond une image virtuelle, à un objet virtuel correspond une image réelle.

### 3. Conditions de Gauss

#### 3.1 Justification

- On attend d'un système optique qu'il forme des images nettes des objets. Pour ce faire, l'idéal serait que les rayons lumineux issus d'un point  $A$  objet émergent du système en convergeant rigoureusement en un point  $A'$  qui serait son image. Si cette circonstance se produisait pour n'importe quel point objet, le système serait dit **rigoureusement stigmatique**.

 Seul le miroir plan possède cette qualité, dans les limites de l'optique géométrique, c'est-à-dire pour un miroir d'étendue très grande devant les longueurs d'onde de la lumière visible.

- Toutefois, l'imperfection des détecteurs optiques (œil, photo-détecteurs, etc...) fait que l'on peut se contenter d'un **stigmatisme approché**.

Qu'un système optique forme sur un détecteur élémentaire, à partir d'un point source, une image rigoureusement ponctuelle ou une image possédant une étendue d'aire inférieure à celle du détecteur, ne change pas fondamentalement l'information générée par le détecteur, à savoir, son excitation et la fréquence à laquelle il l'a été.

#### 3.2 Définition des conditions de Gauss

- D'après le **principe de Fermat**, ( la lumière emprunte le trajet de temps minimal), une

condition pour que le système soit stigmatique de manière approchée est que les rayons lumineux qui conduisent à la formation des images soit proches de l'axe optique du système et peu inclinés par rapport à celui-ci. On dit que les rayons lumineux sont alors **paraxiaux**.

- Pour que ces conditions soient obtenues en pratique, il est parfois nécessaire de **diaphragmer** le système optique autour de son axe optique, c'est-à-dire de placer un écran opaque qui lui est perpendiculaire, percé d'une ouverture circulaire que l'on centre sur l'axe et dont le but est d'éliminer les rayons non paraxiaux susceptibles de nuire à la netteté des images.

Cependant, trop petites, ces ouvertures dégraderaient l'image en faisant ressortir la diffraction. Par ailleurs, ils influent sur la quantité de lumière traversant le système optique ainsi que sur l'étendue de l'image que l'on peut escompter. Une bonne image apparaît donc le résultat d'un compromis entre clarté et netteté, dans la limite des contraintes imposées par le détecteur.

- Dans les conditions de Gauss, les systèmes optiques se révèlent **aplanétiques**. Ils forment des images planes, perpendiculaires à leur axe optique, d'objets plans également disposés perpendiculairement à cet axe.



*Nous supposons que les conditions de stigmatisme et d'aplanétisme approchés sont systématiquement satisfaites par les systèmes optiques étudiés par la suite dans le cadre de cette présentation.*



## 5 Optique géométrique

### 3. Lentilles minces

#### 1. Présentation matérielle

##### 1.1 Définition

Une **lentille mince** est un solide constitué d'un matériau d'indice optique  $n$  essentiellement délimité par deux calottes sphériques de rayons de courbure respectifs  $R_1$  et  $R_2$ , présentant un axe optique, et tel que les sommets  $S_1$  et  $S_2$  des calottes et les centres de courbure  $C_1$  et  $C_2$  des dioptries soient alignés sur une droite, l'**axe optique**.

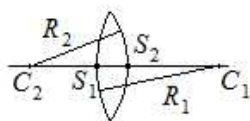


fig. 4

La lentille est dite **mince** si son épaisseur aux sommets,  $e = S_1S_2$  est petite devant les deux rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  ainsi que devant  $|R_1 - R_2|$ .

##### 1.2 Classification

On distingue :

- les lentilles à bords minces-convergentes qui comportent les lentilles dites biconvexe (fig. 5a), plan convexe (fig. 5b) et les ménisques à bords minces (fig. 5c)
- les lentilles à bord épais-divergentes qui comportent les lentilles dites biconcave (fig. 5d), plan concave (fig. 5e) et les ménisques à bords épais (fig. 5f).

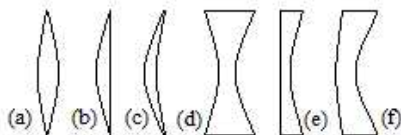


fig. 5

##### 1.3 Modèle et symboles

On modélise les lentilles minces en considérant que les sommets des dioptries  $S_1$  et  $S_2$  sont confondus en un point  $S$  que l'on nomme le **centre optique** de la lentille. Elles sont symbolisées respectivement de la manière suivante (cf. fig. 6) :



fig. 6

### 2. Points particuliers

## 2.1 Les foyers principaux

- Une lentille mince possède deux autres points particuliers notés  $F$  et  $F'$  situés sur l'axe optique, de part et d'autre de son centre optique et à égale distance de celui-ci. On les appelle respectivement les **foyers principaux objet** et **image**.
- On appelle **distance focale** d'une lentille mince la mesure algébrique de son centre optique à son foyer principal image. Elle est notée habituellement  $f'$  ; par définition,

$$f' = \overline{SF'} = -\overline{SF}.$$

La distance focale s'exprime en mètres (m).



*Le terme de « distance » pour la distance focale est trompeur : c'est une mesure algébrique sur un axe orienté de gauche à droite. Elle peut être négative alors que le mot distance suggère une quantité positive ou nulle.*

- La distance focale d'une lentille dépend du milieu dans lequel elle est plongée. Une lentille en verre utilisée dans l'air ou dans un autre milieu transparent conserve la symétrie des foyers principaux objet et image par rapport au centre optique. En revanche, si la lentille était utilisée à l'interface de deux milieux d'entrée et sortie d'indices différents, la symétrie de la position des foyers principaux par rapport au centre optique disparaîtrait.

- La distance focale d'une lentille est liée à l'indice  $n$  du matériau employé pour la fabriquer, aux rayons de courbure algébriques  $\overline{SC_1}$  et  $\overline{SC_2}$  de ses dioptries d'entrée et de sortie et à l'indice  $n_e$  du milieu transparent dans lequel la lentille serait utilisée par la relation générale :

$$\frac{1}{\overline{SF'}} = (n - n_e) \left( \frac{1}{\overline{SC_1}} - \frac{1}{\overline{SC_2}} \right)$$

qui devient dans l'air :

$$\frac{1}{\overline{SF'}} = (n - 1) \left( \frac{1}{\overline{SC_1}} - \frac{1}{\overline{SC_2}} \right) = \frac{1}{f'}.$$

- La **vergence** d'une lentille mince dans l'air, l'inverse de sa distance focale :

$$V = \frac{1}{\overline{SF'}}.$$

Inverse d'une longueur, elle s'exprime en dioptries, de symbole  $\delta$  :  $1\delta = 1\text{ m}^{-1}$  dans un milieu d'indice optique égal à 1.

- La distance focale  $\overline{SF'}$  d'une lentille convergente est positive ; celle d'une lentille divergente est négative.

## 2.2 Les plans focaux

Le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par le foyer principal objet (resp. image) est le **plan focal objet** (resp. **image**).

## 2.3 Les foyers secondaires

Tous les points du plan focal objet (resp. image) sont des **foyers secondaires objet**, (resp. **image**), à l'exception des deux foyers principaux.

## 3. Rayons lumineux particuliers

- Trois rayons lumineux particuliers privilégiés par la formation des images. Soit un objet  $AB$  perpendiculaire à l'axe optique,  $A$  étant positionné sur ce dernier.
  - a. Le rayon lumineux passant par  $B$  et par le centre optique  $S$  ou  $O$  de la lentille mince n'est pas dévié (cf. fig. 7 rayon (1)) ;
  - b. Le rayon lumineux passant par  $B$  et parallèle à l'axe optique émerge de la lentille en passant par le foyer principal image  $F'$  (cf. fig. 7 rayon (2)) ;
  - c. Le rayon lumineux passant par  $B$  et par le foyer image  $F$  de la lentille émerge de celle-ci en étant parallèle à l'axe optique (cf. fig. 7 rayon (3)).
- Le point de concours des directions des rayons passant par le point objet  $B$  et émergents de la lentille est alors le point image de  $B$ , noté  $B'$ .

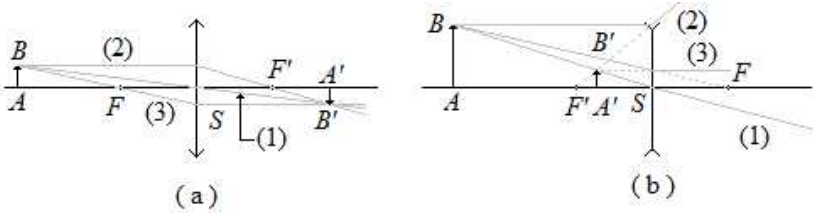



fig. 7

 Si l'objet  $AB$  est dans le plan focal objet, tous les rayons lumineux issus du point  $B$  émergent de la lentille parallèles entre eux et à  $BS$  : ils « convergent » à l'infini.

## 4. Aspects quantitatifs : les formules de conjugaison

### 4.1 Utilité

Les relations de conjugaison permettent de

- déterminer la position de l'image d'un objet par une lentille connaissant la position de l'objet par rapport à cette lentille ;
- déterminer la position d'un objet par rapport à une lentille connaissant la position de son image par rapport à cette lentille ;
- déterminer, la distance focale d'une lentille, connaissant les positions de l'objet et de son image par rapport à cette lentille.

### 4.2 Conventions sur les mesures


Une mesure  $\overline{MP}$  est positive si, s'agissant d'une mesure horizontale le long de l'axe optique, le point  $P$  est à droite du point  $M$  ; ou si, s'agissant d'une mesure verticale perpendiculairement à l'axe optique, le point  $P$  est au-dessus du point  $M$ .

### 4.3 Formule de Descartes (origine au sommet)

$$\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{\overline{SF'}} \quad (5-1)$$

### 4.4 Formule de Newton (origines aux foyers)

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -\overline{SF}^2 = -f'^2 \quad (5-2)$$

 Dans la formule de Descartes, le sommet  $S$  de la lentille est l'origine commune de toutes les mesures algébriques intervenant. Au contraire, la formule de Newton fait intervenir la mesure de la position de l'objet le long de l'axe optique par rapport au foyer objet et celle de l'image par rapport au foyer image : il n'y a plus d'origine commune à toutes les mesures.

## 4.5 Grandissement transversal


$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

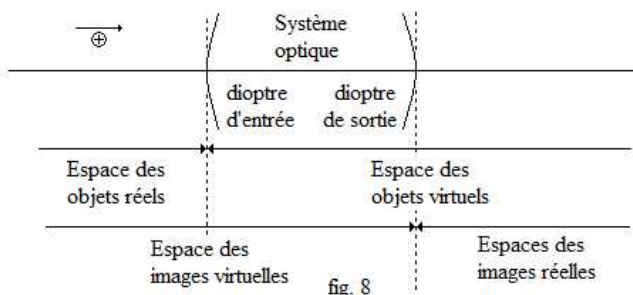
Il s'exprime à l'aide des rapports ayant servi à établir la formule de Newton et donc, à l'aide de la position de l'objet ou de l'image le long de l'axe optique.

## 5. Réalité et virtualité des images et des objets

### 5.1 Définition

- Un objet est dit **réel** s'il est situé à gauche du dioptré d'entrée d'un système optique. Au-delà de celui-ci, il est dit **virtuel**.
- Une image par le système optique en question est dite **réelle** si elle est située à droite du dioptré de sortie du système optique. Elle est dite **virtuelle** en deçà. (cf. fig. 8)

 Dans le cadre du modèle de la lentille mince, l'espace des objets réels est confondu avec l'espace des images virtuelles et, réciproquement, celui des objets virtuels se superpose à celui des images réelles.



### 5.2 Lentille mince convergente

Un objet est réel si  $\overline{SA} < 0$  ; son image est réelle si  $\overline{SA'} > 0$ .

La condition nécessaire pour qu'une lentille convergente forme, sur un écran, une image réelle d'un objet réel est que la distance  $D$  de l'objet à l'écran vérifie :

$$D \geq 4f'$$

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Démontrez la relation  $D \geq 4f'$  entre la distance minimale entre un objet réel et l'image réelle qui peut en être formée par une lentille convergente de distance focale  $f'$ .

**Exercice 2 :** À quelle condition peut-on avoir un grandissement transversal supérieur à 1 lors de la formation d'une image par une lentille convergente de distance focale  $f'$ .

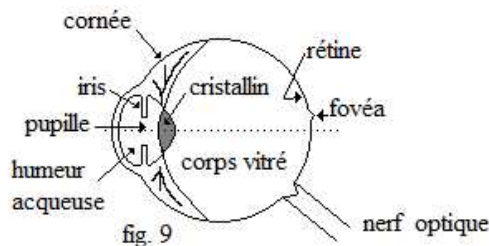
## 6 Optique géométrique


### 4. L'œil et les instruments d'optique

#### 1. L'œil

##### 1.1 Anatomie sommaire de l'œil

- Le globe oculaire est principalement constitué d'une enveloppe protectrice, la **cornée** qui délimite, en avant du cristallin, la zone remplie d'**humeur aqueuse** et, en arrière, le **corps vitré**, deux milieux transparents incolores d'indice optique 1,336.
- L'ouverture de l'œil, la **pupille**, est diaphragmée par l'**iris**. Le diamètre de la pupille peut varier de 2 à 8 mm en fonction de la quantité de lumière nécessaire à la détection d'un signal lumineux.
- Une lentille épaisse de vergence modulable grâce aux muscles qui la contrôlent, le **cristallin**, est constituée d'un milieu transparent d'indice 1,4 environ.
- Après avoir traversé cette succession de milieux transparents, les photons atteignent enfin le fond de l'œil où ils sont absorbés par les molécules des cellules qui le tapissent et qui forment ensemble la **rétine**. Leur absorption génère des signaux électriques transmis au cerveau par le **nerf optique** et dont les informations sont décryptées et interprétées par le cortex cérébral comme une image. (cf. fig. 9).



 La variation de la vergence du cristallin est due à une modification des rayons de courbure des dioptries délimitant le cristallin sous l'effet des muscles périphériques auxquels le cristallin est rattaché.

##### 1.2 La rétine

La rétine est une membrane constituée de cellules non uniformément réparties et dont les rôles sont sensiblement différents. Parmi ces cellules, deux types captent la lumière : les cônes et les bâtonnets.

Les cônes ne sont sensibles qu'à des éclaircissements relativement élevés et informent sur les couleurs. Les bâtonnets sont sensibles aux faibles éclaircissements mais ne donnent qu'une information monochrome.

##### 1.3 Punctum remotum et punctum proximum

- Le **punctum remotum** est le point objet réel qui, sans accommodation, c'est-à-dire sans action des muscles qui contrôlent le cristallin, forme son image sur la rétine. Pour un œil normal, le punctum remotum est à l'infini. La distance focale image du système optique est alors égale à 16,7 mm en moyenne.

- Le **punctum proximum** est le point objet réel le plus proche de l'œil à pouvoir avoir son image sur la rétine avec une accommodation maximale.

Pour un œil normal, le punctum proximum est à environ 20 cm de la cornée : la distance focale image est alors égale à 14,7 mm en moyenne. Les valeurs des deux points varient d'un individu à l'autre.

- La **plage d'accommodation** de l'œil est constituée de l'ensemble des points compris entre le punctum proximum et le punctum remotum.

## 1.4 Modélisation de l'œil

L'œil est un système optique complexe. On peut le modéliser comme étant constitué d'une lentille mince convergente de vergence variable associée à un capteur positionné dans le plan de formation des images, plan situé à une distance fixe de la lentille.

## 1.5 La résolution angulaire

Sur un œil n'accommodant pas, c'est l'angle minimal au centre optique de la lentille devant séparer deux points pour que leurs images respectives se forment sur deux cônes différents.

Cet angle a pour valeur moyenne  $\epsilon \approx 1,7 \cdot 10^{-4}$  rad, soit environ une demi-minute d'arc.

# 2. La lunette astronomique

## 2.1 Généralités

La lunette astronomique est un exemple de système optique composé modélisable par un ensemble de lentilles minces. Utilisée pour observer des objets fort lointains, des étoiles ou des planètes, ceux-ci seront considérés comme étant à l'infini. Deux points lumineux séparés envoient ainsi des faisceaux parallèles de rayons lumineux qui atteignent la lunette en faisant entre eux un très petit angle.

## 2.2 Structure de la lunette

Une lunette astronomique peut être modélisée par un ensemble de trois lentilles minces : une lentille convergente  $L_1$ , appelée l'**objectif**, c'est-à-dire la lentille du système la plus proche de l'objet observé, de grande distance focale  $f'_1$ , et deux lentilles convergentes constituant un système convergent de faible distance focale, l'**oculaire** c'est-à-dire la partie du système optique proche de l'œil (cf. fig.10).

Le foyer image de l'objectif  $F'_1$  doit être confondu avec le foyer objet  $F_o$  de l'oculaire.

## 2.3 L'oculaire

- Constitué des lentilles  $L_2$  et  $L_3$ , il est habituel de définir les configurations de l'oculaire de la sorte :

$$\frac{f'_2}{m} = \frac{e}{n} = \frac{f'_3}{p} = a$$

où  $f'_2$  et  $f'_3$  sont les distances focales de chacune des lentilles,  $e$  la distance entre leurs centres optiques,  $(m, n, p)$  un triplet de naturels non nuls et  $a$  une longueur d'échelle pour l'oculaire. Il est habituel de prendre des triplets du type (3, 2, 3), (4, 3, 2) ou (3, 2, 1).

- Nous considérerons l'oculaire symétrique (3, 2, 3) pour lequel  $\overline{S_2 F_o} = -3\frac{a}{4}$  et  $\overline{S_3 F_o} = 3\frac{a}{4}$  avec un centre optique S situé au milieu du doublet comme sur la figure 10.

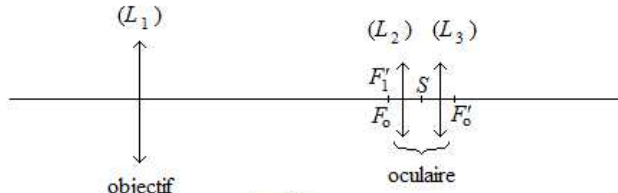


fig. 10

## 2.4 Trajet des rayons lumineux

- Construisons les rayons lumineux appartenant à deux faisceaux incidents de rayons parallèles, l'un parallèle à l'axe optique, l'autre faisant avec lui un angle  $\alpha$ .
  - Après l'objectif, les faisceaux convergent respectivement au foyer principal image  $F'_1$  qui est aussi le foyer principal objet  $F_o$  de l'oculaire et à un foyer secondaire image de l'objectif, qui est aussi un foyer secondaire objet de l'oculaire.
  - Le faisceau parallèle à l'axe optique émerge de la lentille  $L_3$  parallèle à l'axe. L'autre faisceau de rayons parallèles émergera de la lentille  $L_3$  en faisant un angle  $\alpha'$ , normalement grand par rapport à  $\alpha$ , avec l'axe optique.
  - Les trajets des rayons lumineux sont construits en se servant des caractéristiques du doublet oculaire puisque les positions des foyers de chaque lentilles sont connues (cf. fig. 11)
- $$(\overline{S_2 F_2} = \overline{S_3 F_3} = -3a, \overline{S_2 F'_2} = \overline{S_3 F'_3} = 3a, \overline{S_3 F'_2} = a, \overline{S_2 F_3} = -a).$$

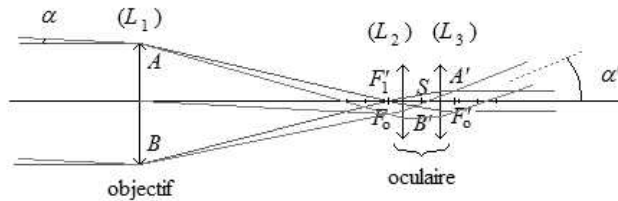


fig. 11

## 2.5 Cercle oculaire

Les faisceaux lumineux parallèles provenant de diverses directions incidentes possèdent en sortie de l'oculaire une intersection commune dans un plan perpendiculaire à l'axe optique. Ce plan est le plan conjugué de l'objectif par l'oculaire. Il est très voisin du plan focal image de l'oculaire pour une lunette astronomique pour laquelle la distance focale de l'objectif est toujours grande devant la distance focale de l'oculaire.

Cette intersection commune des faisceaux s'appelle le **cercle oculaire**. C'est au cercle oculaire que l'observateur aura intérêt à placer la pupille de son œil afin de bénéficier du plus grand champ angulaire d'observation possible.

## 2.6 Grossissement

La lunette astronomique se comporte comme un amplificateur angulaire. En se plaçant au cercle oculaire, le grossissement angulaire, défini par :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

est égal à l'opposé du rapport de la distance focale image de l'objectif à la distance focale image de l'oculaire  $-\frac{f'_1}{f'_o}$ .



## 2.7 Latitude de réglage

Les caractéristiques de la lunette décrites sont celles correspondant à un observateur ayant un œil normal et qui, plaçant la pupille de son œil au cercle oculaire recevrait les images sur sa rétine.

La possibilité de déplacer l'oculaire le long de l'axe optique est maintenue pour l'adapter aux punctum proximum et punctum remotum de chaque œil et rendre ainsi l'observation confortable.

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Une lunette astronomique est constituée de deux lentilles : un objectif convergent de distance focale  $f'_b$  et un oculaire divergent de distance focale  $f'_c$  ( $|f'_c| < f'_b$ , la distance entre les centres optiques des deux lentilles est  $f'_b + f'_c$ ).

Montrez que le grossissement angulaire  $G$  est égal à  $-\frac{f'_b}{f'_c}$ .

Quel est l'intérêt de cette configuration ?

# 7 Un monde quantique

## 1. Expériences et interprétations fondamentales

### 1. L'effet photo-électrique

#### 1.1 Définition

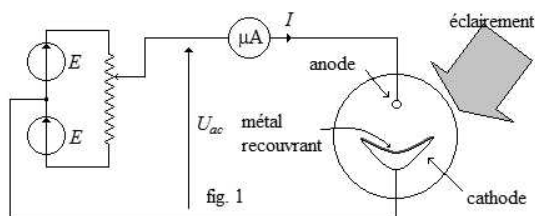
Il consiste en l'extraction d'électrons de certains métaux lorsqu'ils sont éclairés par un rayonnement électromagnétique adéquat.

#### 1.2 Le dispositif expérimental

Une cellule photo-électrique est un tube à vide dans lequel sont enfermées une cathode revêtue d'un métal donné pouvant être éclairée et une anode.

Une tension est appliquée entre l'anode et la cathode pour collecter ou freiner les électrons émis par cette dernière lorsqu'elle est convenablement éclairée.

On mesure le courant qui circule dans la cellule en fonction de la tension  $U_{ac}$  avec comme variables d'étude la fréquence du rayonnement monochromatique qui éclaire la cathode et l'intensité de l'éclairement. (fig. 1).

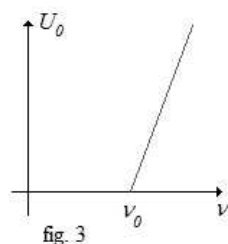
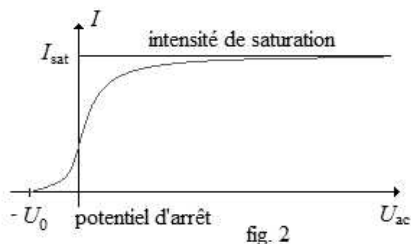


#### 1.3 Résultats de l'étude

- Plusieurs phénomènes sont observés.

a. Il existe une fréquence seuil  $\nu_0$ , caractéristique du métal qui recouvre la cathode, telle qu'aucune lumière monochromatique de fréquence  $\nu < \nu_0$  ne parvient à créer de courant électrique  $I$  dans la cellule, et ce, quelle que soit la tension  $U_{ac}$  et quel que soit l'éclairement de la source lumineuse ;

b. Les courbes de  $I = f(U_{ac})$  pour un éclairement fixé produit par un rayonnement de fréquence  $\nu$  donnée, supérieure à la fréquence de seuil, ont la forme suivante (cf. fig. 2) :



Lorsque l'on fait varier l'éclairement, à fréquence  $\nu$  fixée, les courbes relevées sont homothétiques les unes des autres et l'intensité de leur courant de saturation apparaît comme une fonction croissante de l'éclairement de la cathode.

c. Le potentiel d'arrêt  $U_0$  est une fonction affine croissante de la fréquence du rayonnement électromagnétique employé (cf. fig. 3). Elle s'annule pour  $\nu = \nu_0$ . Si le point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses change avec le métal recouvrant la cathode, la pente de cette droite en revanche en est indépendante.

## 2. Dualité onde-corpuscule pour la lumière

### 2.1 Relation de Planck-Einstein

• Afin de trouver la fonction décrivant exactement la densité spectrale du rayonnement du corps noir, Planck avait dû émettre l'hypothèse que les échanges d'énergie entre un champ électromagnétique de fréquence donnée  $\nu$  et la matière ne pouvaient se faire que par quantités finies proportionnelles à la fréquence. Il appela ces quantités des **quanta d'énergie** (au singulier : quantum).

Peu après, Einstein reprit et développa cette hypothèse pour résoudre l'énigme de l'effet photo-électrique. Il donna au quantum d'énergie de Planck, un statut de « particule de lumière » dénommée **photon** et à laquelle il attribua une énergie  $E$  égale à celle du quantum d'énergie, une vitesse égale à  $c$ , la célérité de la lumière dans le vide et une masse nulle.

#### • Relation de Planck-Einstein

Dans un rayonnement électromagnétique monochromatique de fréquence  $\nu$ , l'énergie  $E$  de chaque photon vaut :

$$E = h\nu \quad (7-1)$$

où  $h$  est la **constante de Planck** ou **constante d'action**.

Sa dimension est  $M.L^2.T^{-1}$  ; sa valeur est  $h = 6,62618(4).10^{-34}$  J.s.

• Le rayonnement électromagnétique de fréquence  $\nu$  étant associé à la longueur d'onde  $\lambda$  par la relation  $\lambda \nu = c$ , la relation de Planck-Einstein peut se réécrire :

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad (7-2)$$

### 2.2 Attribution d'une impulsion

Il est possible d'affecter au photon, en dépit de la nullité de sa masse, un autre attribut essentiel des corps matériels en mécanique classique ou relativiste, à savoir, une impulsion.

Comme cette grandeur est *a priori* vectorielle, un photon appartenant à une onde électromagnétique de vecteur d'onde  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est la direction de propagation de l'onde, possède une impulsion donnée par la relation :

$$\vec{p} = p \vec{u} = \frac{h}{\lambda} \vec{u} = \hbar \vec{k} \quad (7-3)$$

où  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  est la constante de Planck réduite.

### 2.3 Interprétation

• Chaque photon ou quantum d'énergie, de fréquence  $\nu$  transporte à la célérité  $c$  une partie de l'énergie et de l'impulsion du rayonnement électromagnétique à cette fréquence.

Le sort du photon est singulier :

– soit il interagit avec la matière, lui cède alors toute son énergie et disparaît, on dit qu'il est **absorbé**. Son énergie est entièrement transférée à une et une seule particule

– soit il ne se passe rien, conserve son énergie et continue son trajet dans la direction de propagation du rayonnement électromagnétique à la célérité  $c$ .

Le photon apparaît ainsi comme une « particule » aux caractéristiques mécaniques fort contraintes : une seule vitesse possible,  $c$ , une seule énergie possible dans un rayonnement de fréquence donnée,  $h\nu$  et une seule impulsion  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ .

• Lorsque les états accessibles de la particule ont des énergies quantifiées, seuls peuvent être absorbés les photons ayant des énergies convenables.

Supposons ainsi les énergies quantifiées ordonnées,  $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  avec  $E_m < E_n$  si  $m < n$ , alors les fréquences  $\nu_{mn}$  des photons pouvant être absorbés sont données par la **relation de Bohr** :

$$E_n - E_m = h\nu_{mn} \quad (7-4)$$

• Dans l'interaction que la matière a avec le rayonnement électromagnétique, le processus inverse est aussi possible : une particule matérielle qui passe d'un état où son énergie est  $E_n$  à un état d'énergie moindre  $E_m$  émet un photon qui emporte la différence d'énergie  $E_n - E_m$  entre les deux états de la particule.

Ce photon émis participe alors au transport d'énergie électromagnétique par un rayonnement de fréquence  $\nu_{mn}$  imposée par la relation de Bohr.

## 2.4 Émission spontanée, émission induite

Lorsque l'émission résulte de la désexcitation spontanée d'un atome ou d'une molécule revenant à un état plus stable en se débarrassant d'une partie de son énergie, on parle d'**émission spontanée** et le processus est entièrement aléatoire dans le temps.

Toutefois, si l'état excité a une durée de vie suffisamment grande, il est parfois nécessaire ou intéressant, de provoquer l'émission du photon : on parle alors d'**émission induite** ou **stimulée**.

Ainsi, dans un LASER, l'émission est provoquée par un photon incident appartenant à un rayonnement de la fréquence de Bohr  $\nu_{mn}$  de celui que l'on obtiendrait par émission spontanée. Mais le photon émis par l'atome ou la molécule possède alors exactement la même phase que le photon incident. Il participe de manière constructive à l'onde électromagnétique de fréquence  $\nu_{mn}$  dont ce nouveau photon est un quantum d'énergie.

## 3. Dualité onde-corpuscule pour la matière


### 3.1 Relation de de Broglie

• Renversant la démarche intellectuelle qui avait conduit à associer des « corpuscules » à une radiation électromagnétique, Louis de Broglie a émis l'hypothèse qu'une « onde de matière » pourrait être associée à toute particule matérielle, onde dont la longueur d'onde serait donnée par la **relation de de Broglie** :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (7-5)$$

où  $p = \|\vec{p}\|$  représente la norme de la quantité de mouvement de la particule  $\vec{p} = m\vec{v}$  en mécanique classique ou  $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$  en mécanique relativiste avec  $m$  la masse de la particule,

$$\vec{v} \text{ sa vitesse, } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

 Tous les objets de la physique doivent être considérés comme des objets quantiques, ni ondes ni corpuscules, même si, à notre échelle, ils se manifestent le plus souvent de façon telle qu'ils soient rangés dans l'une ou l'autre de ces deux catégories qui s'excluent mutuellement et que la physique classique avait forgées au long de son développement.

- Pour contourner cette difficulté à appréhender ces nouveaux objets, on a introduit la notion de « dualité onde - corpuscule ». Cette expression suggère que les objets de la physique se comporteraient tantôt comme des ondes tantôt comme des corpuscules, l'interprétation d'un phénomène physique se faisant simultanément à la lueur de ces deux catégories, la plus pertinente seulement des deux devant, dans une expérience donnée, être retenue.

### 3.2 Ordres de grandeurs dans les phénomènes quantiques

Les effets quantiques se manifestent à l'échelle atomique et moléculaire et concernent en premier lieu les électrons et en second lieu les noyaux atomiques dans ces édifices. Ainsi, les spectroscopies d'absorption ou d'émission ou résonantes utilisées en analyse physico-chimique utilisent des rayonnements électromagnétiques couvrant un spectre étendu de longueurs d'onde. Le tableau suivant les résume :

Absorption U.V. lointain	10 – 180 nm	électrons liants
Absorption U.V. - visible	180 – 780 nm	électrons liants
Absorption I.R.	0,78 – 300 $\mu$ m	vibration-rotation des molécules
R. P. E. <sup>1</sup>	3 cm	spin électronique dans un champ magnétique
R. M. N. <sup>2</sup>	0,6 – 10 m	spin nucléaire dans un champ magnétique

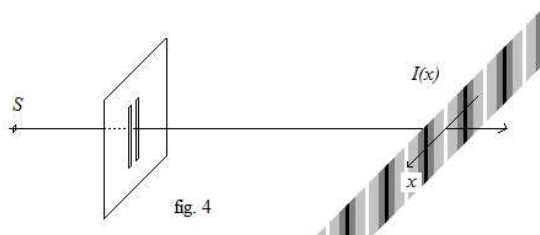
<sup>1</sup> Résonance Paramagnétique Électronique ; <sup>2</sup> Résonance Magnétique Nucléaire.

### 3.3 Application

Les propriétés ondulatoires des particules matérielles révélées par la relation de de Broglie sont employées pour découvrir les structures moléculaires dans la méthode de diffraction de neutrons.

### 3.4 Qu'est-ce qu'une figure d'interférences lumineuses ?

- Une figure d'interférences lumineuses classique est obtenue à l'aide du dispositif des fentes d'Young suivant. (cf. fig. 4).

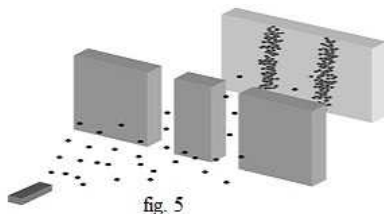


- Deux fentes fines parallèles entre elles et séparées par une distance de quelques dizaines de longueurs d'onde sont pratiquées dans un écran opaque. Elles sont éclairées par une source lumineuse ponctuelle  $S$  monochromatique de fréquence  $\nu$ . Un écran situé à grande distance et parallèle au plan des fentes recueille l'éclairement résultant du passage de la lumière par

les fentes. Une alternance de franges sombres et lumineuses dont la répartition  $I(x)$  autour de l'axe  $Ox$  semble pouvoir être décrite par une fonction continue de  $x$  s'y dessine.

- Si l'intensité énergétique de la source est rendue très faible, le caractère discontinu de l'échange d'énergie entre le rayonnement et la matière reparaît. Au commencement de la diminution de l'intensité énergétique, la figure d'interférences formée sur l'écran continue en apparence à subsister comme dans la conception ondulatoire de la lumière, avec un éclaircissement sur l'écran uniformément atténué.

Il arrive un moment où, si l'on a diminué très fortement l'intensité énergétique de la source, celle-ci émet si peu de photons d'énergie  $h\nu$  à chaque seconde, que l'on en observe distinctement leurs arrivées sur l'écran les uns après les autres (cf. fig. 5).



- Supposons qu'un dispositif enregistre tous les photons arrivant dans le plan de l'écran sur une surface  $dS$  centrée sur le point d'abscisse  $x$  pendant un intervalle de temps  $\Delta t$ , et comptabilise un nombre de photons  $d^2N(x, \Delta t, dS)$ . La fonction de  $x$  :

$$n(x) = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow +\infty \\ dS \rightarrow 0}} \frac{d^2N(x, \Delta t, dS)}{\Delta t dS}$$

est proportionnelle à  $I(x)$ .

La figure des franges d'interférences résulte ainsi de l'accumulation d'un grand nombre de photons venant frapper l'écran sans s'être étalés ou divisés, ce qui manifeste un caractère corpusculaire certain de la lumière, tout en se répartissant avec une densité proportionnelle à la loi de l'éclaircissement fournie par la théorie ondulatoire classique de la lumière !

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Que vaut la constante de Planck en eV.s ? Que vaut le produit  $hc$  en eV.μm ?

**Exercice 2 :** Il est habituel de qualifier les rayons X par l'énergie, exprimée en eV ou keV, de leurs photons correspondant.

Quelle est l'énergie des photons X susceptibles de pouvoir donner des détails sur l'agencement intramoléculaire d'une substance donnée, sachant que la limite de résolution est la longueur d'onde du photon ?

**Exercice 3 :** Les niveaux d'énergie de l'électron dans l'atome d'hydrogène sont donnés en première approximation par l'expression :  $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$  où  $n$  est un entier naturel non nul et  $E_0 = 13,6 \text{ eV}$ .

Déterminez la longueur d'onde  $\lambda_{12}$  des photons pouvant faire passer l'électron de son niveau fondamental  $n = 1$  à son premier état excité  $n = 2$ .

## 8

# Un monde quantique

## 2. Introduction à la fonction d'onde

### 1. L'outil fondamental : la fonction d'onde

#### 1.1 Amplitude et densité de probabilité

- L'expérience des interférences lumineuses a montré qu'une grandeur classique, l'éclairement  $I(x)$ , revêtait un caractère probabiliste, en tant qu'elle était proportionnelle à la distribution spatiale limite d'un grand nombre d'événements aléatoires, en l'espèce, les manifestations non corrélées des photons dans le plan de l'écran d'observation, lorsque ce nombre tend vers l'infini :  $n(x) = \alpha I(x)$ .

Or, l'électromagnétisme classique et la physiologie de notre vision nous font définir cet éclairement comme proportionnel à la valeur moyenne au cours du temps du carré du module du champ électrique de l'onde lumineuse au delà du plan des fentes :

$$I(x) = \beta \langle |\vec{E}(x, t)|^2 \rangle.$$

- La description des interférences des ondes de matière étant en tous points similaire à celle des interférences lumineuses, il nous faut faire intervenir, lors de l'analyse des phénomènes physiques à l'échelle microscopique, une fonction ayant le rôle d'une **densité de probabilité** qui dépendrait des coordonnées spatiales et peut-être du temps. Cette densité de probabilité sera elle-même considérée comme le carré du module d'une fonction, éventuellement complexe, l'**amplitude de probabilité**.

#### 1.2 La fonction d'onde et l'équation de Schrödinger

- La fonction complexe des coordonnées  $\vec{r}$  et du temps  $t$  qui assume le rôle d'amplitude de probabilité décrivant l'état d'une particule matérielle ponctuelle s'appelle la **fonction d'onde**. Elle est habituellement notée  $\psi(\vec{r}, t)$ .
- Schrödinger a montré que la fonction d'onde d'une particule ponctuelle de masse  $m$  plongée dans un potentiel d'interaction  $V(\vec{r}, t)$  est solution de l'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste, nommée **équation de Schrödinger**. Dans les cas les plus simples (notamment en l'absence de champ électromagnétique dans lequel la particule évoluerait) cette équation prend la forme :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{r}, t) \quad (8-1)$$

où  $\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$  et  $i$  est l'imaginaire pur  $i^2 = -1$ .



*Les phénomènes lumineux étant par essence relativistes, ils ne peuvent être étudiés que dans le cadre de l'électrodynamique quantique. On y montre que le champ électrique de l'onde lumineuse n'est pas, en fait, assimilable à la fonction d'onde du photon dans le rayonnement.*

### 1.3 Signification physique de $\psi$

• L'interprétation admise de la fonction d'onde est celle d'une amplitude de probabilité. Si l'on considère un volume infinitésimal  $d\tau$  dont le point  $\vec{r}$  est le centre, la probabilité de présence de la particule dans le volume en question à l'instant  $t$  vaut :

$$d^3\mathbb{P}(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 d\tau \quad (8-2)$$

$|\psi(\vec{r}, t)|^2$  est ainsi une **densité de probabilité de présence**. C'est cette densité de probabilité qui possède une signification physique particulière et non l'amplitude correspondante. La probabilité de présence de la particule dans un volume  $\mathcal{V}$  fini de l'espace à l'instant  $t$ ,  $\mathbb{P}(\mathcal{V}, t)$ , vaut :

$$\mathbb{P}(\mathcal{V}, t) = \iiint_{\mathcal{V}} |\psi(\vec{r}, t)|^2 d\tau.$$

La présence de la particule dans tout l'espace  $\mathcal{E}$ , à tout instant, étant certaine, cet événement à une probabilité égale à 1. Donc :

$$\iiint_{\mathcal{E}} |\psi(\vec{r}, t)|^2 d\tau = 1.$$

Cette contrainte limite les solutions physiquement acceptables de l'équation de Schrödinger à celles dites de carré sommable, qui satisfont cette relation de normalisation.

• Deux fonctions d'onde d'une même particule dans un même contexte physique, proportionnelles l'une à l'autre à un facteur  $e^{i\alpha}$  près, où  $\alpha$  est réel, conduisent à une même densité de probabilité puisque  $|e^{i\alpha}|^2 = 1$ . Ces deux fonctions décrivent par conséquent un même état physique de la particule.



À cause de sa signification physique, la fonction d'onde  $\psi$  doit être, continue sur tout l'espace. Elle doit avoir des dérivées partielles secondes par rapport aux coordonnées spatiales, par morceaux, qui doivent elles-mêmes être continues lorsque le potentiel est continu ou n'a, au pire, que des discontinuités finies (de première espèce) et en nombre fini.

### 1.4 États stationnaires

• Parmi tous les problèmes étudiés, une classe particulière concerne les particules plongées dans des potentiels indépendants du temps,  $V(\vec{r})$ . En physique classique, cette situation correspond aux systèmes conservatifs, d'énergie mécanique  $E_m$  constante.

• En physique quantique, les états correspondants de ces systèmes ont des fonctions d'onde qui peuvent se mettre sous la forme  $\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$  où  $E$ , qui possède la dimension d'une énergie, est l'énergie de la particule dans l'état quantique dont  $\psi$  est la fonction d'onde. La fonction des coordonnées spatiales  $\varphi(\vec{r})$  est solution de l'équation dite **équation aux valeurs propres** :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) = E \varphi(\vec{r}) \quad (8.3)$$

Les densités de probabilité des états physiques décrits par ces fonctions d'onde sont alors indépendantes du temps car  $|\psi(\vec{r}, t)|^2 = |\varphi(\vec{r})|^2$ .

Ces états particuliers sont appelés **états stationnaires** de la particule. Ils sont importants car ils sont stables au cours du temps et traduisent la permanence des états considérés.



## 2. Quantification de l'énergie d'une particule libre confinée 1D

### 2.1 Présentation de la situation

• Nous recherchons les états stationnaires d'une particule de masse  $m$  et d'énergie  $E$ , libre donc soumise à aucune force, dont le mouvement est limité à une seule dimension sur le segment  $x \in [0; L]$ .

Le potentiel dans lequel elle est plongée peut être pris égal à 0 sur l'intervalle  $[0; L]$ .

Cette recherche revient à examiner les conditions d'existence de parties spatiales non nulles des fonctions d'onde et à les obtenir analytiquement.

### 2.2 Équation aux valeurs propres du problème

Elle se déduit du caractère unidimensionnel du problème et de la nullité du potentiel. Une fois arrangée, on obtient :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi = 0.$$

La particule étant confinée dans la région  $x \in [0; L]$ , la fonction d'onde doit être nulle hors de cet intervalle.

Par continuité, les conditions aux limites suivantes sur  $\varphi$  sont :  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ .

### 2.3 États stationnaires

• Considérons les seuls états d'énergie  $E$  positive. En posant  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ , la fonction  $\varphi$  s'exprime, sur  $[0; L]$  par :  $\varphi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$ .

Les conditions aux limites imposent  $B = 0$  et  $\sin(kL) = 0$  pour que  $\varphi$  ne soit pas la fonction nulle.

La seconde condition aux limites impose des valeurs particulières de  $k$  pour que la particule soit dans un état stationnaire défini :

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{où } n \in \mathbf{N}^*.$$

Il en résulte que, contrairement à ce qui se passe en physique classique, les seules valeurs possibles de l'énergie de la particule dans un état stationnaire sont :

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \quad (8.4)$$

Ce phénomène est appelé la **quantification de l'énergie**. À l'énergie  $E_n$  est associée une partie spatiale de la fonction d'onde,  $\varphi_n$  décrite comme suit :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ A_n \sin(k_n x) & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{si } L < x \end{cases}$$

$A_n$  étant une constante de normalisation telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x)|^2 dx = 1.$$

- La forme de la fonction d'onde de l'état d'énergie  $E_n$  est par conséquent :

$$\psi_n(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ A_n \sin(k_n x) e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{si } L < x \end{cases}$$

Chaque fonction d'onde  $\psi_n$  caractérise un **état propre stationnaire** de la particule, d'énergie  $E_n$ .

## 2.4 Commentaires

- La physique classique prévoirait pour une telle situation physique que toutes les énergies positives seraient accessibles à la particule. Or, la quantification de l'énergie impose au système des énergies spécifiques et l'état de plus basse énergie de la particule est d'énergie non nulle,  $E_1 = \frac{h^2}{8mL}$ .

Ces propriétés sont générales aux particules confinées dans des puits de potentiels.

- La forme de la fonction d'onde d'un état  $E_n$  quelconque possède des parties réelle et imaginaire qui ressemblent à l'amplitude de vibration en un point  $x$  à un instant  $t$  d'une corde vibrante tendue, attachée à ses deux extrémités.

Or, pour la corde vibrante, une telle solution traduit une résonance d'ondes stationnaires mécaniques. La relation (2.7) en donne les fréquences temporelles de résonance :  $f_n = \frac{nc}{2L}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Elle découlait en fait d'une quantification du vecteur d'onde  $k$ ,  $k_n = \frac{n\pi}{L}$ , rigoureusement identique à celle de la partie spatiale de la fonction d'onde de la particule confinée.

Cette analogie inviterait à prendre un état quantique stationnaire de la particule dans sa boîte à une dimension pour une résonance d'ondes stationnaires de matière, c'est-à-dire une interférence constructive d'ondes de matière qui se « propageraient selon des directions opposées ». Et, dans les deux cas, la sélection des fréquences spatiales ( $\frac{k_n}{2\pi}$ ) est la conséquence d'une limitation de l'espace : celui de propagation pour la corde, celui d'existence de la fonction d'onde non nulle pour la particule.

- La densité de probabilité de présence de la particule  $|\varphi_n(x)|^2$  vaut  $|A_n|^2 \sin^2(n\pi x/L)$ . Il apparaît donc des extrema de probabilité de présence localisés aux positions équivalentes aux ventres de vibration sur la corde de Melde pour les endroits où l'on a la plus grande probabilité de trouver la particule et aux nœuds de vibration pour ceux où l'on est assuré qu'elle sera absente.

Sur la fig. 6 sont représentées les densités de probabilité des trois premiers états propres par ordre croissant d'énergie.

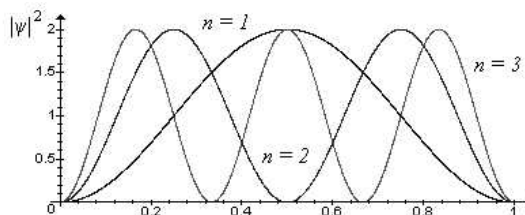


fig. 6

- Cependant, il ne faut pas surestimer l'analogie en question. L'amplitude de vibration sur

la corde est solution d'une équation d'onde à une dimension :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

L'amplitude de probabilité, la fonction d'onde, est, pour le problème examiné, solution de :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i \frac{2m}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

La première équation possède naturellement des solutions fonctions réelles de  $x$  et de  $t$ , pas la seconde qui ne présente pas le même ordre de dérivation en temps, et introduit par ailleurs le nombre imaginaire  $i$ .

La seconde équation ne peut pas avoir pour solutions des ondes progressives en  $A \cos(\omega t - kx)$  ou  $B \cos(\omega t + kx)$  dont la superposition et les conditions aux limites feraient émerger une onde stationnaire et la règle de sélection des fréquences spatiales au sens classique du terme.

## 2.5 En guise de conclusion provisoire

L'importance de la fonction d'onde ne saurait être sous-estimée. L'étude de tout système physique microscopique impose d'exprimer la fonction « potentiel d'interaction » dans lequel évoluera (-ront) la (les) particule(s) dudit système et de construire son équation d'onde.

La complexité de cette équation et le petit nombre de situations physiques pour lesquelles ses solutions analytiques sont accessibles contraignent souvent à la simplifier pour réussir à construire, moyennant des « accommodements raisonnables », une fonction d'onde exploitable.

Cette fonction d'onde est systématiquement utilisée pour calculer, à partir de postulats que vous étudierez ultérieurement, les grandeurs physiques mesurables que l'on pourra comparer avec l'expérience.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Montrez que, si l'on envisage toutes les fonctions d'onde

$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r})\chi(t)$ , alors  $\chi(t)$  est nécessairement proportionnelle à  $e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ .

**Exercice 2 :** Montrez qu'il n'y a pas aucun état stationnaire d'énergie négative pour la particule étudiée précédemment.

Posez  $\frac{2mE}{\hbar^2} = -\frac{1}{\delta^2}$  et recherchez la forme des solutions avec les conditions aux limites qui doivent être satisfaites.

# 9 Notions fondamentales d'électricité

## 1. Charges, courants et tensions électriques

### 1. Charges électriques

#### 1.1 Quantification de la charge

De notre échelle à l'échelle atomique, toute quantité  $q$  de charge électrique est un multiple entier de la **charge élémentaire** notée  $e$  et valant  $1,6 \times 10^{-19}$  C. Ainsi,

$$q = ze \quad \text{où} \quad z \in \mathbf{Z}$$

L'unité de charge électrique est le coulomb, de symbole C.

#### 1.2 Porteurs de charges

- Dans la matière usuelle, les charges électriques sont toujours transportées par les particules élémentaires stables : protons ( $+e$ ) et électrons ( $-e$ ).
- Dans les solides, ce sont toujours des électrons qui se déplacent sur des distances plus ou moins grandes devant les distances interatomiques. Dans les semi-conducteurs et dans quelques métaux (aluminium, indium), il est plus facile de traiter le déplacement collectif d'un très grand nombre d'électrons de charges  $-e$  comme celui d'un petit nombre de pseudo-particules de charge  $+e$  se déplaçant en sens opposé des électrons et que l'on nomme **trous**.
- Dans les solutions conductrices - les **électrolytes** -, les porteurs de charges sont des ions créés par la dissolution des sels et des composés ioniques par le solvant ( $\text{K}^+$ ,  $\text{Na}^+$ ,  $\text{Cu}^{2+}$ ,  $\text{Al}^{3+}$ ,  $\text{Cl}^-$ ,  $\text{I}^-$ ,  $\text{SO}_4^{2-}$ ,  $\text{OH}^-$ ,  $\text{NO}_3^-$ ,  $\text{NH}_4^+$ , ...).
- Dans les gaz et les plasmas, la conduction est assurée par les électrons et des ions positifs, les cations, (atomes ou molécules d'où proviennent les électrons). Très rarement des ions négatifs, les anions, peuvent participer à ce transport de charges électriques : ce seraient des atomes ou des molécules neutres ayant captés un électron libéré par d'autres.

## 2. Courants électriques

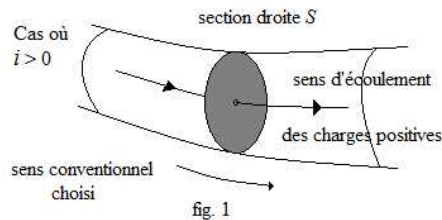
### 2.1 Définitions

- Un **courant électrique** est un déplacement de charges dans un référentiel d'étude donné. Il s'agit donc d'une notion relative.
- Les milieux dans lesquels des courants électriques peuvent exister sont dits **conducteurs électriques**. Les particules chargées mobiles dans ces milieux parcourent des distances qui sont grandes devant les distances interatomiques des particules fixes. Les autres sont dits **diélectriques** ou **isolants**.

### 2.2 Intensité d'un courant électrique

- L'**intensité de courant électrique** est la grandeur physique qui quantifie l'importance d'un courant électrique. Dans un fil conducteur d'un circuit électrique, elle est le rapport de la quantité de charge électrique  $dq(t)$ , traversant une section droite de ce conducteur dans un sens fixé a priori entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , à la durée  $dt$ . On la note habituellement  $i(t)$ . Par définition :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t) \quad (9-1)$$



L'intensité d'un courant électrique est donc un débit de charges électriques, analogue au débit d'un fleuve dans son lit.

- L'intensité de courant électrique ou « intensité électrique » est une des sept dimensions fondamentales de la physique, notée  $I$ . Son unité est l'**ampère**, de symbole  $A$ .

D'après (9-1), la dimension de la charge électrique est I.T.

- Elle est une grandeur algébrique : inverser le sens dans lequel on a choisi de compter le passage de la charge, change le signe de l'intensité électrique. Le sens de déplacement des porteurs de charges positives (resp. négatives) est celui de (resp. opposé à) la convention d'orientation de  $i$  si  $i > 0$ .



*La valeur de l'intensité du courant électrique est définie localement. Elle peut dépendre de l'endroit du conducteur où l'on a placé la surface à travers laquelle on la mesure.*

## 2.3 Classification des courants électriques

- Les **courants unidirectionnels** conservent le même sens :  $i(t)$  conserve le même signe.

Les **courants bidirectionnels** changent de sens :  $i(t)$  change de signe.

- Un cas particulier : les **courants continus**. Ce sont des courants unidirectionnels d'intensité électrique constante :  $i(t) = I$ .

- Autre cas particulier important : les **courants alternatifs** :. Leur intensité électrique est une fonction sinusoïdale du temps,  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ , où :

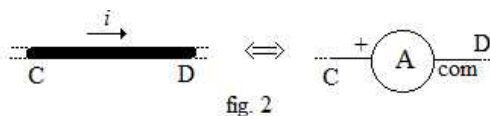
$I_m$  représente l'**intensité électrique maximale** du courant électrique dans la branche du circuit ; elle est exprimée en ampères ;

$\omega = 2\pi f$  est la **pulsation** de ce courant électrique, exprimée en  $\text{rad.s}^{-1}$  avec  $f$  sa **fréquence**, en hertz, c'est-à-dire le nombre de fois qu'il change de signe - donc de sens - en une seconde ;

$\varphi$  sa **phase à l'origine**, exprimée en radians (rad).

## 2.4 Mesure des intensités électriques

- L'intensité des courants électriques se mesure avec un ampèremètre. Il est inséré en série avec le fil conducteur dans lequel on souhaite mesurer l'intensité électrique. Il est un des éléments de la chaîne de conduction de l'électricité dans le circuit. Son branchement conditionne la convention d'orientation avec laquelle la mesure sera faite. La convention de mesure de l'appareil est que l'intensité continue mesurée  $I$  est positive si le courant électrique le traverse réellement de la borne « + » à la borne « com. » (cf. fig. 2).

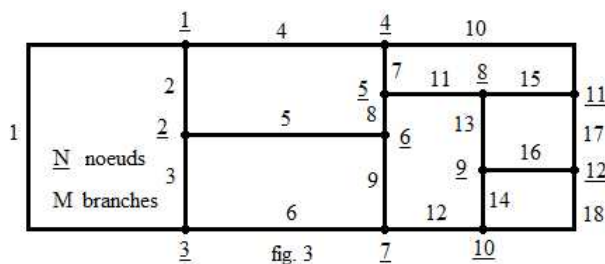


- La mesure des intensités des courants électriques continus est faite en mode « DC » ; un ampèremètre en mode « AC » mesurera seulement la valeur efficace  $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$  de l'intensité du courant électrique sinusoïdal.

### 3. Circuits électriques

#### 3.1 Définition

- **Circuit électrique** : association de dispositifs susceptibles de conduire un courant électrique dans laquelle un courant électrique circule s'il y a parmi eux au moins un générateur d'énergie électrique.
- La figure 3 montre l'organisation topologique d'un circuit électrique sans détailler ses constituants.



#### 3.2 Branche

Une **branche** est une portion de circuit électrique comprise entre deux nœuds premiers voisins. Le circuit schématisé figure 3 possède 18 branches.

#### 3.3 Nœud

Un **nœud** est un point où plusieurs branches d'un circuit électrique se réunissent. Le circuit schématisé figure 3 possède 12 nœuds.

#### 3.4 Mailles

Une **maille** est une association de branches d'un circuit électrique constituant une boucle fermée sans passer deux fois par un même nœud.

Exemples dans la figure 3 : mailles constituées des branches (1-2-3), (7-8-9-12-14-13-15-10).

### 4. Potentiel et tension électrique

#### 4.1 Forces électriques et travail

- Des charges électriques ponctuelles immobiles dans un référentiel galiléen créent les unes sur les autres un ensemble de forces électrostatiques, les forces de Coulomb.

Pour déplacer de manière infiniment lente l'une de ces charges,  $q_t$ , les autres demeurant immobiles dans le référentiel, l'opérateur doit exercer sur  $q_t$  à chaque instant une force  $\vec{f}_{op}$  qui compense exactement la résultante des forces de Coulomb, notée  $\vec{f}_e$ , exercée sur elle par les charges fixes : ainsi  $\vec{f}_{op} = -\vec{f}_e$ .

- Au cours du déplacement de  $q_t$  d'un point A à un point B, la force qu'il exerce travaille, au sens mécanique du terme, et l'opérateur aura dû effectuer un travail :

$$\mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{op}) = -\mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\vec{f}_e).$$

Ce travail est indépendant du chemin emprunté pour aller de  $A$  à  $B$ . Il ne dépend que des positions de  $A$  et  $B$ . Il est proportionnel à la valeur de la charge  $q_t$ .

## 4.2 Travail, potentiel et tension électrique

- Il existe une fonction  $V(M)$  des coordonnées du point  $M$  telle que :

$$\mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\vec{f}_e) = q_t (V(A) - V(B)) \quad (9-2)$$

- La fonction  $V$  s'appelle le **potentiel électrique**. Par définition,

$$U_{AB} = V(A) - V(B) \quad (9-3)$$

est la **tension électrique** entre les points  $A$  et  $B$ , égale à la différence de potentiel électrique entre  $A$  et  $B$ . On admet que les notions de potentiel et de tension électriques demeurent pertinentes pour l'étude des circuits électriques et y conservent des significations similaires.

- La tension électrique a pour dimension  $M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$ . Son unité de mesure est le **volt**, de symbole  $V$ .
- La tension comme l'intensité de courant électrique est une grandeur algébrique dont le signe dépend de la convention d'orientation choisie, c'est-à-dire du choix fait *a priori* de mesurer  $U_{AB}$  ou  $U_{BA}$ .
- La fonction  $V$  n'est définie qu'à une constante  $K$  près : toute fonction  $V' = V + K$  peut convenir pour exprimer le travail de la force  $\vec{f}_e$  entre deux points de l'espace.
- Les tensions dépendantes du temps sont notées avec des lettres minuscules  $u_{AB}(t)$ .

## 4.3 Propriétés de la tension électrique

- D'après la définition de la tension électrique indépendante du temps, on a :

$$U_{AB} = -U_{BA} \quad \text{et} \quad U_{AB} + U_{BC} = U_{AC}.$$

## 4.4 Classification des tensions électriques

- Les **tensions unidirectionnelles** conservent toujours un même signe au cours du temps. Les autres tensions sont dites **tensions bidirectionnelles**.

- Cas particulier important : les **tensions continues**. Ce sont des tensions unidirectionnelles constante :,  $u_{AB}(t) = cte$ .

Autre cas particulier important : les **tensions alternatives** de la forme :

$$u_{AB}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi),$$

où  $U_m$  est la **tension électrique maximale** de la tension mesurée entre les points  $A$  et  $B$  du circuit électrique. Elle est exprimée en volt.

$\omega = 2\pi f$  est la **pulsation** de cette tension électrique, exprimée en  $\text{rad.s}^{-1}$  avec  $f$  sa **fréquence**, en hertz, c'est-à-dire le nombre de fois qu'elle change de signe en une seconde ;  $\varphi$  sa **phase à l'origine**, exprimée en radian (rad).

## 4.5 Mesure des tensions électriques

- Une tension électrique se mesure avec un voltmètre. L'appareil se branche en parallèle sur le circuit. Pour mesurer la tension  $U_{AB}$ , sa borne « + » se branche au point  $A$  et sa borne « com » au point  $B$ . La convention de mesure de l'appareil est telle que si la tension mesurée  $U_{AB}$  est positive alors le potentiel électrique du point  $A$  est réellement supérieur à celui du point  $B$ . (cf. fig. 4)

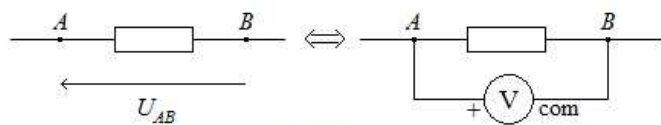


fig. 4

- La mesure des tensions électriques continues est faite en mode « DC ». Un voltmètre en mode « AC » mesure seulement la valeur efficace  $\frac{U_m}{\sqrt{2}}$  de la tension électrique sinusoïdal.



# 10 Notions fondamentales d'électricité

## 2. Les lois générales

### 1. L'ARQS

#### 1.1 Présentation

ARQS est l'acronyme pour **Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires**. Ce régime suppose que les phénomènes de propagation électromagnétiques dont tout circuit fonctionnant en régime dépendant du temps est le siège, peuvent être en fait négligés à l'échelle du circuit électrique.

#### 1.2 Critère

Un circuit électrique occupe matériellement un certain espace. Soit  $D$  la distance séparant les deux points du circuit les plus éloignés l'un de l'autre.

Soit  $f_M$  la fréquence maximale du spectre des grandeurs électriques -intensités et tensions électriques - dont le circuit est le siège et  $\lambda_M = \frac{c}{f_M}$  la longueur d'onde des ondes électromagnétiques associée à  $f_M$  ( $c$  est la célérité de la lumière dans le vide).

Le critère de respect de l'ARQS est que la dimension maximale  $D$  soit très petite (au moins dix fois plus petite) que la longueur d'onde  $\lambda_M$  :

$$D \ll \lambda_M \quad \text{ou} \quad D f_M \ll c$$

#### 1.3 Conséquences

- Dans le cadre de l'ARQS, l'intensité du courant électrique est la même en tous points d'une branche du circuit électrique.
- Les notions de potentiel et de tension électriques entre deux points introduites dans le cadre d'une situation indépendante du temps demeurent valides. On suppose donc possible de définir le potentiel  $V(M, t)$ , dépendant du temps, en un point  $M$ .

Considérons trois points du circuit  $A$ ,  $B$  et  $C$  quelconques, les tensions instantanées

$$u_{AB}(t) = V(A, t) - V(B, t) \quad ; \quad u_{BC}(t) = V(B, t) - V(C, t) \quad ; \quad u_{AC}(t) = V(A, t) - V(C, t),$$

satisfont alors à chaque instant la relation d'addition des tensions :  $u_{AB}(t) + u_{BC}(t) = u_{AC}(t)$ .

## 2. La loi des nœuds

### 2.1 Présentation de la situation


Soit un nœud d'un circuit électrique en lequel concourent  $N$  de ses branches. La loi des nœuds est l'expression du fonctionnement du circuit dans le cadre de l'ARQS. Elle relie entre elles les valeurs instantanées des intensités des courants électriques dans les branches qui aboutissent à un nœud.

### 2.2 Définitions

Une branche  $k$  possède une **convention entrante** d'intensité de courant électrique si l'orientation de la convention est dirigée vers le nœud.

On note  $i_k^{(e)}(t)$  l'intensité instantanée du courant électrique dans une telle branche.

Dans le cas contraire, la convention est dite **convention sortante**. On note  $i_l^{(s)}(t)$  l'intensité instantanée du courant dans une telle branche  $l$ .

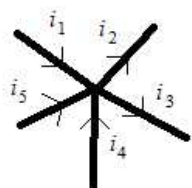
 Chaque branche est obligatoirement reliée à deux nœuds : la convention d'intensité du courant électrique dans la branche est entrante à l'un des nœuds, et sortante à l'autre.

## 2.3 Énoncé de la loi

*En un nœud d'un circuit électrique, la somme algébrique des intensités instantanées des courants électriques dans les branches ayant une convention entrante est égale à la somme algébrique des intensités instantanées des courants électriques dans les branches ayant une convention sortante.*

- La loi des nœuds s'exprime par la relation algébrique :

$$\sum_k i_k^{(e)}(t) = \sum_l i_l^{(s)}(t) \quad (10-1)$$



Branches à convention entrante :  $i_1, i_4, i_5$


Branches à convention sortante :  $i_2, i_3$

Loi des nœuds :

$$i_1 + i_4 + i_5 = i_2 + i_3$$

fig. 5

- Les conventions d'orientation ne préjugent en rien des signes des différentes intensités des courants électriques et donc de leurs sens réels. Ce sont des choix arbitraires de mesure.

 En régime variable, la loi doit bien être satisfaite à tous les instants. Si les intensités des courants électriques sont des fonctions sinusoïdales du temps, il n'y a aucune relation simple entre les intensités efficaces de ces courants !

## 2.4 Signification physique de la loi

La loi traduit la non-accumulation de charges électriques en un nœud : les charges électriques mobiles qui arrivent effectivement par certaines branches du nœud sont évacuées par les autres branches.

## 3. La loi des mailles

### 3.1 Présentation de la situation

Soit un circuit électrique et, dans ce circuit, une maille constituée de  $N$  branches. Soit une orientation arbitraire choisie pour parcourir la maille. Soit  $P$  points  $(A_i)_{i \in \{1, \dots, P\}}$  distribués le long de la maille avec, en partant de  $A_1$ , un indice croissant dans le sens d'orientation de la maille et les  $P$  tensions entre deux points consécutifs.

On note  $u_k^{(+)}(t)$  les tensions dont la convention d'orientation a le même sens que celle de la maille et  $I^{(+)}$  l'ensemble des indices  $k$  de ces tensions.

On note  $u_l^{(-)}(t)$  les tensions ayant une convention d'orientation contraire à celle de la maille et  $I^{(-)}$  l'ensemble de leurs indices.  $\{1, \dots, P\} = I^{(+)} \cup I^{(-)}$ .

### 3.2 Énoncé de la loi

*La somme algébrique des tensions ayant une convention d'orientation de même sens que l'orientation de la maille est égale à celle des tensions ayant une convention d'orientation opposée.*

- La loi des mailles s'exprime par la relation algébrique :

$$\sum_{k \in I^{(+)}} u_k^{(+)}(t) = \sum_{l \in I^{(-)}} u_l^{(-)}(t) \quad (10-2)$$

- Les conventions d'orientation ne préjugent en rien des signes des différentes tensions électriques. Ce sont des choix arbitraires de comptage.



*En régime variable, la loi doit bien être satisfaite à tous les instants. Si les tensions électriques sont des fonctions sinusoïdales du temps, la loi des mailles ne permet de déduire aucune relation simple entre les valeurs maximales ou efficaces de ces tensions !*

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Considérons le nœud de la figure 5. Les porteurs de charges électriques sont les électrons. Les intensités des courants électriques sont  $I_1 = 0,25 \text{ A}$ ,  $I_2 = -0,30 \text{ A}$ ,  $I_4 = -0,15 \text{ A}$  et  $I_5 = -0,10 \text{ A}$ .

Calculez l'intensité du courant électrique dans la branche 3.

Quels sont les sens réels d'arrivée au nœud des électrons dans les différentes branches ?

**Exercice 2 :** Dans un circuit à une maille sur laquelle sont situés, dans l'ordre, les points de mesure de A à E, on a relevé les tensions suivantes :

$$u_{AE} = 6,5 \text{ V} \quad ; \quad u_{DC} = -5,5 \text{ V} \quad ; \quad u_{DE} = 7,5 \text{ V} \quad ; \quad u_{CB} = 3 \text{ V} .$$

Déduisez-en  $u_{AB}$ .

# 11 Notions fondamentales d'électricité

## 3. Les dipôles

### 1. Caractères généraux des dipôles

#### 1.1 Définition

Un **dipôle** est un dispositif susceptible d'être traversé par un courant électrique ne communiquant avec un circuit électrique que par deux bornes de connexion. Le symbole générique est :



fig. 6

#### 1.2 Conventions d'étude

C'est le choix du couple des conventions d'intensité du courant et de tension électrique pour étudier la relation entre elles.

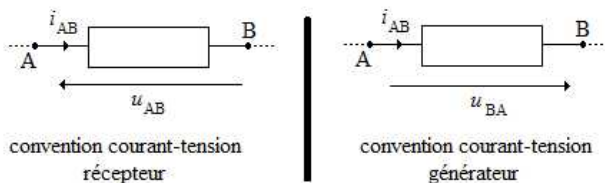


fig. 7



*La convention d'étude choisie ne préjuge en rien du rôle réel du dipôle dans le circuit.*

#### 1.3 Classification des dipôles

- Les **dipôles actifs** : pile électrochimique, batterie, alternateur, générateur de courant continu ...

Une tension non nulle existe entre leurs bornes, même sans être insérés dans un circuit. Ils sont en général étudiés avec une convention générateur, sans être une obligation.

- Les **dipôles passifs** : ils ne peuvent que consommer de l'énergie électrique ou la stocker pour la restituer ultérieurement : résistor ohmique, condensateur, bobine d'auto-induction, diode, ...

Il n'y a aucune tension entre leurs bornes en l'absence de courant électrique les traversant. Ils sont le plus fréquemment étudiés avec une convention récepteur.

#### 1.4 Caractéristique courant-tension d'un dipôle

L'étude de la caractéristique  $u_{AB} = f(i_{AB})$  permet de compléter la connaissance d'un dipôle (actif ou passif) :

- si sa caractéristique ne passe pas par l'origine, il est actif ;

- si elle passe par l'origine et si cette dernière est son centre de symétrie, le dipôle est passif, **symétrique**. Ses bornes sont alors indifférenciées et peuvent être sans risque permutées dans le circuit ;
- si sa caractéristique est (ou peut être très raisonnablement approximée par) une droite, il est **linéaire**.

## 1.5 Dipôles passifs dépendant d'un paramètre

Il existe des dipôles passifs dont une caractéristique physique dépend d'une autre grandeur physique :

- les thermistances ont leur résistance dépendant de la température du milieu dans lequel elles sont plongées ;
- les photo-résistances ont leur résistance dépendant du flux lumineux qu'elles reçoivent ;
- les jauges résistives ont leur résistance dépendant de la pression à laquelle elles sont soumises, etc...

## 2. Puissance dans les dipôles

### 2.1 Puissance instantanée reçue par un dipôle

- En convention récepteur, la **puissance instantanée**  $p(t)$  reçue par le dipôle  $AB$  aux bornes duquel existe une tension  $u_{AB}(t)$  et traversé par le courant d'intensité  $i_{AB}(t)$  est :

$$p(t) = u_{AB}(t) i_{AB}(t) \quad (11-1)$$

Si  $p(t) > 0$  le dipôle reçoit effectivement la puissance sous forme électrique.

Si  $p(t) < 0$ , le dipôle fournit la valeur absolue de cette puissance toujours sous forme électrique au reste du circuit.



*En convention générateur,  $p(t) = u_{BA}(t) i_{AB}(t)$ , les interprétations s'inversent : si  $p(t) > 0$  le dipôle fournit effectivement la puissance électrique au circuit ; sinon, il la reçoit de ce dernier.*

- Comme toute puissance, la puissance électrique a pour dimension  $M.L^2.T^{-3}$ . Son unité est le **watt**, de symbole  $W$ .

### 2.2 Justification

En admettant que le travail (9-2) et la définition de la tension (9-3) valent, dans le régime de l'ARQS, pour la quantité de charge  $dq = i_{AB}(t) dt$  qui « s'écoule » à travers le dipôle entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$\delta W_{A \rightarrow B} = dq (V(A, t) - V(B, t)) = p(t) dt.$$

La charge  $dq$  entre par  $A$  où elle est au potentiel  $V(A, t)$  dans l'espace du dipôle. Au même instant, la même quantité de charge sort en  $B$  où elle prend le potentiel  $V(B, t)$ .

Le système des charges à l'intérieur du dipôle a ainsi gagné l'énergie  $dq V(A, t)$  grâce aux charges entrantes et perdu l'énergie  $dq V(B, t)$  à cause de celles sortantes.

### 2.3 Puissance moyenne

- En régime continu,  $i_{AB}(t) = I_{AB}$  et  $u_{AB}(t) = U_{AB}$  : la puissance instantanée est donc indépendante du temps.
- Parmi les régimes variables, les régimes périodiques, de période  $T$ , sont distingués. Quelle que soit la nature du régime périodique, la **puissance moyenne**  $P$  sur une période est :

$$P = \langle p(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \quad (11-2)$$

où  $p(t)$  est la puissance instantanée donnée par (11-1).

- Si le régime est purement sinusoïdal,

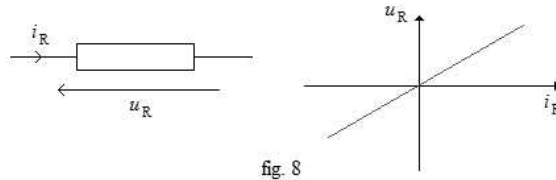
$$i_{AB}(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad ; \quad u_{AB}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) ;$$

la puissance moyenne s'en déduit :  $P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\varphi_u - \varphi_i) \quad (11-3).$

### 3. Les dipôles passifs élémentaires

#### 3.1 Résistor ohmique

- C'est un dipôle passif linéaire symétrique. Son symbole et sa caractéristique courant-tension en convention récepteur établie en régime continu sont donnés sur la figure suivante :



- La relation constitutive du résistor ohmique es, en convention récepteur :

$$u_R(t) = R i_R(t) \quad (11-4).$$

$R$  s'appelle la **résistance** du résistor ohmique. Sa dimension physique est  $M.L^2.T^{-5}.I^{-2}$ . Elle s'exprime en ohm, de symbole  $\Omega$ .

Son inverse, noté  $G$  est la **conductance**, de dimension inverse à celle de la résistance et d'unité le siemens, de symbole  $S$  ou  $\Omega^{-1}$

- En régime sinusoïdal, si  $i_R(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$  est l'intensité du courant qui traverse le résistor ohmique, la tension qui apparaît à ses bornes, en convention récepteur est :  $u_R(t) = R I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ .

Il n'y a pas de déphasage entre la tension et l'intensité électriques et la résistance représente le rapport, indépendant de la fréquence de fonctionnement, de la tension électrique maximale à l'intensité du courant électrique maximale.

- La puissance reçue en régime continu (en convention récepteur) par le résistor de résistance  $R$  est :

$$P_R = U_R I_R = R I_R^2 = \frac{U_R^2}{R} \quad (11-5).$$

Elle est toujours positive, dissipée sous forme de chaleur dans l'atmosphère. C'est l'**effet Joule**.

- En régime alternatif, la puissance instantanée dissipée par effet Joule dans le résistor traversé par un courant électrique d'intensité maximale  $I_{mR}$  est :

$$p_R(t) = R I_{mR}^2 \cos^2(\omega t) = \frac{U_{mR}^2 \cos^2(\omega t)}{R}$$

en prenant une origine temporelle convenable et  $U_{mR} = R I_{mR}$ .

La puissance moyenne sur une période correspondant à la pulsation  $\omega$  vaut alors :

$$P_R = \frac{1}{2} R I_{mR}^2 = \frac{U_{mR}^2}{2R} \quad (11-6).$$

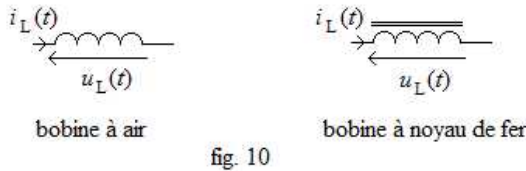
L'**intensité efficace**  $I_e$  du courant alternatif et la **tension efficace**  $U_e$  de la tension alternative sont les grandeurs équivalentes en continu qui provoquent le même échauffement par effet Joule dans le résistor. En égalant les expressions (11-5) et (11-6), on obtient :

$$I_e = \frac{I_{mR}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad U_e = \frac{U_{mR}}{\sqrt{2}}. \quad (11-7)$$

 Ces relations définissent la grandeur efficace d'une grandeur alternative.

### 3.2 Condensateur

- C'est un dispositif constitué de deux conducteurs, **les armatures**, offrant la plus grande surface possible en vis-à-vis et séparés par un isolant, le **diélectrique**, de la plus faible épaisseur possible.



- C'est un accumulateur de charges électriques.
- Dans le régime de l'ARQS, en convention récepteur,  $q(t)$  la charge portée par l'armature vers laquelle la convention d'orientation de l'intensité électrique est dirigée, est proportionnelle à la tension :

$$q(t) = C u_C(t) \quad (11-8).$$

où  $C$ , toujours positif, est la **capacité** du condensateur. Elle a pour dimension  $I^2 \cdot T^4 \cdot M^{-1} \cdot L^{-2}$ . Son unité est le farad, de symbole  $F$ .

Les ordres de grandeur habituels de la capacité d'un condensateur sont compris entre 1 nF et 1  $\mu$ F. Les capacités inférieures sont plutôt des capacités considérées comme parasites entre les conducteurs. Des valeurs allant jusqu'à quelques farads sont rencontrées pour les condensateurs de haute énergie.

- En régime variable et en convention récepteur, la relation qui lie la tension aux bornes du condensateur à l'intensité du courant électrique qui le traverse est :

$$i_C(t) = \frac{dq}{dt}(t) = C \frac{du_C}{dt}(t) \quad (11-9)$$

C'est la loi d'Ohm généralisée pour le condensateur.

- En régime sinusoïdal, si une tension  $u_C(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$  est appliquée aux bornes du condensateur, un courant électrique d'intensité  $i_C(t) = C\omega U_m \cos\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right)$ , en avance de  $\frac{\pi}{2}$  par rapport à la tension traverse le condensateur.

- La puissance moyenne reçue par le condensateur sur une période  $T$  d'un régime périodique quelconque, est nulle :

$$P_C = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_C(t) i_C(t) dt = 0.$$

Un condensateur parfait n'absorbe ni ne crée, en moyenne, de puissance électrique.


- En revanche, un condensateur emmagasine de l'**énergie électrique** : si à l'instant initial, le condensateur d'un circuit est déchargé, à l'instant  $t$ , il possède une énergie :

$$\mathcal{E}_e(t) = \int_0^t p(t') dt' = \int_0^t C \frac{du_C}{dt'}(t') u_C(t') dt'$$

soit :

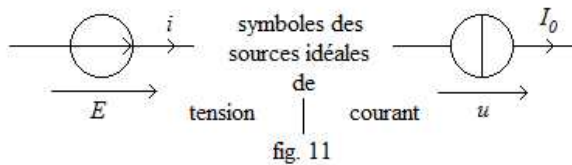
$$\mathcal{E}_e(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} \quad (11-10)$$

Ainsi, le rôle de réservoir de charges du condensateur se double de celui de réservoir d'énergie électrique : les charges emmagasinées le sont à un potentiel électrique qui leur confère une énergie utilisable ultérieurement.

 De même que pour tout autre dispositif physique, l'énergie du condensateur est continue, au sens mathématique, ce qui implique que sa charge et donc sa tension électriques sont continues dans le temps.

### 3.3 Bobine d'auto-induction

- Matériellement, il s'agit d'un long fil conducteur enroulé sur lui-même de manière à ménager un volume vide cylindrique qui est le siège d'un champ magnétique lorsque la bobine est parcourue par un courant électrique. Symbolisée d'une des deux manières suivantes, selon qu'un noyau de fer est ajouté pour renforcer le champ magnétique :



- Elle est le siège d'un effet d'auto-induction. La loi d'Ohm généralisée en convention récepteur est :

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}(t) \quad (11-11)$$

où  $L$  est la grandeur physique qui caractérise la bobine d'auto-induction, notamment à travers ses dimensions géométriques : on l'appelle l'**inductance**.

Sa dimension est  $M.L^2.I^{-2}.T^{-2}$ . Son unité est le henry, de symbole H.

- Les ordres de grandeur caractéristiques des inductances vont de quelques  $\mu H$ , en radioélectricité et circuits électroniques, à quelques centaines de mH, voire en henry, pour les bobines - on dit aussi « selfs » de lissage des courants en électrotechnique et en courants forts.

Remarque : Les lois d'Ohm généralisées du condensateur et de la bobine d'auto-induction sont duales d'une de l'autre :  $u_C \leftrightarrow i_L$ ,  $i_C \leftrightarrow u_L$  et  $C \leftrightarrow L$ .

- Un courant électrique sinusoïdal traversant une bobine, d'intensité  $i_L(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ , induit entre ses bornes une tension électrique  $u_L(t) = L\omega I_m \cos\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)$ , en convention récepteur, conséquence de la relation (11-11). Cette tension est en avance de  $\frac{\pi}{2}$  par



rapport à l'intensité électrique. Le courant « suit » la tension d'un courant électrique, car les phénomènes d'auto-induction s'opposent spontanément au passage. La bobine se comporte comme un frein aux variations de courant électrique dans un circuit ou, par analogie mécanique, comme une inertie s'opposant au mouvement.

- La puissance moyenne reçue par la bobine sur une période  $T$  d'un régime périodique quelconque, est nulle :

$$P_L = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_L(t) i_L(t) dt = 0.$$

Une bobine parfaite n'absorbe ni ne crée, en moyenne, de puissance électrique.

- En revanche, elle emmagasine de l'**énergie magnétique** : si à l'instant initial, aucun courant ne traverse la bobine, à l'instant  $t$ , elle possède une énergie :

$$\mathcal{E}_m(t) = \int_0^t p(t') dt' = \int_0^t L \frac{di_L}{dt'}(t') i_L(t') dt'$$

soit

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) \quad (11-12)$$

Cette énergie magnétique associée au courant qui traverse la bobine possède une forme similaire à l'énergie cinétique d'une masse animée d'un mouvement dans un référentiel donné. La continuité de l'énergie emmagasinée dans la bobine implique la continuité, au sens mathématique, du courant électrique qui la traverse.

### 3.4 Notion d'impédance

- En régime sinusoïdal, l'usage des nombres complexes permet d'exprimer simplement les lois d'Ohm généralisées pour les trois dipôles de bases que nous avons rencontrés, le résistor ohmique, le condensateur et la bobine.

Associions à une tension  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$  aux bornes d'un dipôle linéaire la grandeur complexe  $\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$  dont la tension électrique est la partie réelle.


Faisons de même pour l'intensité du courant électrique qui traverse le dipôle et créons  $\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$ .

La convention courant-tension étant réceptrice, on appelle **impédance** du dipôle linéaire le rapport :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m}. \quad (11-13)$$

Comme  $\frac{d}{dt}(e^{j\omega t}) = j\omega e^{j\omega t}$ , on en déduit les impédances des trois dipôles de base :

	Résistor	Condensateur	Bobine
Impédance	$R$	$\frac{1}{jC\omega}$	$jL\omega$
$\frac{U_m}{I_m}$	$R$	$\frac{1}{C\omega}$	$L\omega$
$\varphi_u - \varphi_i$	0 rad	$-\frac{\pi}{2}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad

 L'impédance est indépendante du temps alors que le rapport des grandeurs réelles correspondantes l'est. L'usage des complexes transforme une relation de dérivation en une relation de similitude complexe, plus simple à manipuler ce qui généralise en régime alternatif la notion de résistance du régime continu.

- Les parties réelle et imaginaire de l'impédance, ainsi que son module s'expriment en ohms.
- L'inverse de l'impédance  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$  est l'**admittance** du dipôle. Les parties réelle et imaginaire et le module de l'admittance s'expriment en siemens ou  $\Omega^{-1}$ .

### 3.5 Associations de dipôles passifs linéaires

- On appelle **association série**, une connexion de  $N$  dipôles, d'impédances  $\underline{Z}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , telle qu'elle constitue encore un dipôle et que le courant électrique soit le même dans tous les dipôles de l'association.

Il en résulte que l'**impédance équivalente** de l'association,  $\underline{Z}_{eq}$ , c'est-à-dire le rapport de la tension complexe aux bornes de l'association à l'intensité complexe du courant électrique qui la traverse, est la somme des impédances des dipôles :

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^N \underline{Z}_i. \quad (11-14)$$

- On appelle **association parallèle**, une connexion de  $N$  dipôles, d'admittances  $\underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , telle qu'elle constitue encore un dipôle et que la tension électrique soit la même aux bornes de tous les dipôles de l'association.

Il en résulte que l'**admittance équivalente** de l'association,  $\underline{Y}_{eq}$ , c'est-à-dire le rapport de l'intensité complexe du courant électrique qui la traverse à la tension complexe aux bornes de l'association, est la somme des admittances des dipôles :

$$\underline{Y}_{eq} = \sum_{i=1}^N \underline{Y}_i. \quad (11-15)$$

## 4. Les sources de tension et de courant

### 4.1 Définitions

- Une **source idéale de tension** est un dipôle capable de maintenir entre ses bornes une tension  $u(t)$  ayant des caractéristiques données indépendamment de l'intensité du courant électrique qu'elle doit débiter dans la branche du circuit électrique dans lequel elle est insérée.

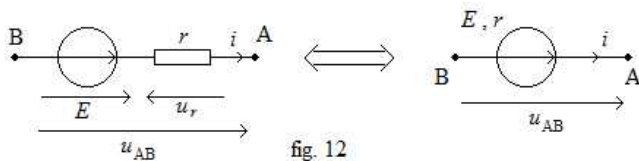


fig. 12

- **Exemples** : source idéale de tension continue  $u(t) = E$  où  $E$  est une valeur constante ; source idéale de tension alternative de fréquence  $f$  et de valeur efficace  $U_e$  ou maximale  $U_m$  données :  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$  ou  $U_e \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u)$  où  $\omega = 2\pi f$ .

• Une **source idéale de courant** est un dipôle capable de débiter un courant électrique d'intensité  $i(t)$  ayant des caractéristiques données, dans la branche du circuit dans laquelle elle est insérée, quelle que soit la tension existant entre ses bornes.

• **Exemples** : source idéale de courant continu  $i(t) = I_0$  où  $I_0$  est une valeur constante ; source idéale de courant alternatif de fréquence  $f$  et de valeur efficace  $I_e$  ou maximale  $I_m$  données :  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$  ou  $I_e \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_i)$  où  $\omega = 2\pi f$ .

 Il est habituel - mais non obligatoire, naturellement - de choisir une convention courant - tension générateur pour les sources.

## 4.2 Sources réelles

• Une source réelle de tension continue délivrant une tension électrique  $u > 0$  voit en général la tension  $u$  légèrement diminuer lorsqu'elle débite un courant dont l'intensité  $i > 0$  augmente, la convention courant - tension étant générateur. S'il s'agit d'une source réelle de tension alternative, c'est la valeur efficace de la tension délivrée qui diminue.

• De même, une source réelle de courant électrique continu débitant dans un circuit voit l'intensité  $i > 0$  du courant électrique qu'elle délivre au reste du circuit diminuer lorsque la tension électrique  $u > 0$  à ses bornes doit augmenter. C'est la valeur efficace de l'intensité délivrée qui diminue lorsque la source réelle de courant est alternative.

## 4.3 Modèles des sources réelles

• Pour tenir compte des faits expérimentaux, un modèle de la source réelle peut être le suivant :

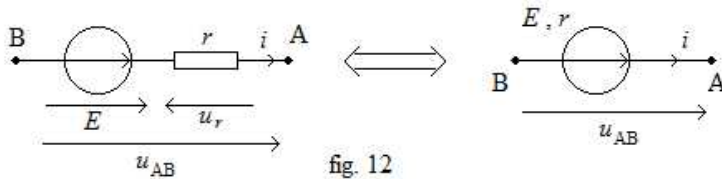


fig. 12

où  $r_i$  est la **résistance interne** (en continu). En alternatif, on substitue à  $r_i$  l'impédance interne  $\underline{Z}_i$ .

• La loi d'addition des tensions et la loi d'Ohm aux bornes de la résistance permettent d'écrire :  $u_{AB} = E - u_r = E - ri$ , qui traduit effectivement la diminution de la tension aux bornes A et B de la source réelle. Ce modèle est appelé **modèle de Thévenin** de la source réelle de tension.

• Pour une source réelle de courant, un modèle classique, le **modèle de Norton**, est :

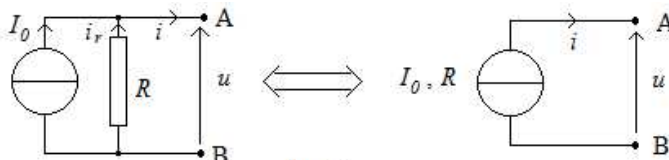


fig. 13

où  $R_i$  est la résistance interne de la source (en continu). En alternatif, on substitue à  $R_i$  l'impédance interne  $\underline{Z}_i$ .

- La loi des nœuds et la loi d'Ohm permettent d'écrire  $i = I_0 + i_r = I_0 - \frac{u}{R} = I_0 - \frac{u}{R_{\text{int}}}$  qui traduit la diminution de l'intensité  $i$  délivrée par la source réelle avec la tension.



*Il faut toujours bien faire attention à ce qui est noté auprès des sources de tension et de courant pour les modéliser convenablement, sans omettre leur résistance ou impédance interne.*

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Pourquoi l'énergie d'un système doit-elle être continue ?

**Exercice 2 :** Évaluez l'énergie emmagasinée par un condensateur de capacité  $C = 1 \mu\text{F}$  chargé sous une tension continue  $U = 50 \text{ V}$ .

**Exercice 3 :** Une tension sinusoïdale de fréquence  $f = 500 \text{ Hz}$  et de valeur efficace  $U_e = 5 \text{ V}$  est appliquée aux bornes d'une bobine d'inductance  $L = 47 \text{ mF}$ .

Déterminez l'intensité efficace du courant qui la traverse.

Écrivez les lois horaires de la tension et de l'intensité du courant électrique en prenant  $\varphi_i = 0 \text{ rad}$ .

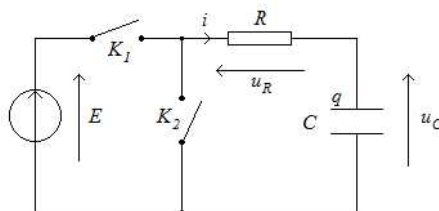
# 12 Notions fondamentales d'électricité

## 4. Circuits linéaires du premier ordre

### 1. Le circuit R-C série

#### 1.1 Présentation

Une source idéale de tension électrique  $E$  est en série avec une résistance  $R$  et un condensateur de capacité  $C$ . À l'instant initial  $t = 0$  s, le condensateur est déchargé ( $u_C(0) = 0$ ) et on ferme  $K_1$ ,  $K_2$  restant ouvert.



#### 1.2 Mise en équation du circuit

Après la fermeture de l'interrupteur  $K_1$ , la loi des mailles produit la relation :  $E = u_R + u_C$ .

Les lois d'Ohm généralisées pour le résistor et le condensateur nous donnent les relations :

$$u_R = Ri \text{ et } i = C \frac{du_C}{dt}.$$

L'équation différentielle régissant l'évolution de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur est :

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C \quad (12-1)$$

Il apparaît que le produit  $RC$  doit avoir la dimension d'un temps pour que l'équation soit homogène. On le note  $\tau$  et on l'appelle la **constante de temps** du circuit.

#### 1.3 Solution de l'équation différentielle

- L'équation différentielle (12-1) est linéaire du premier ordre (cf. fiche 12 de la partie maths). Sa solution générale est la somme d'une solution particulière  $u_P(t)$  de l'équation complète et de la solution générale  $u_S(t)$  de l'équation homogène associée.

- Les coefficients et le second membre étant constants, il existe une solution particulière constante :  $u_P(t) = E$ .

- La solution générale de l'équation homogène est  $u_S(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

- La solution générale de l'équation est donc :

$$u_G(t) = E + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

où  $A$  est une constante que l'on détermine à l'aide de la condition initiale :

$$u_C(0) = 0 = E + A \iff A = -E.$$

La solution de l'équation différentielle régissant la tension  $u_C$  est donc :

$$u_C(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (12-2)$$

## 1.4 Grandeurs électriques dans le circuit


- La connaissance de  $u_C(t)$  permet de déterminer la tension aux bornes de la résistance  $u_R(t)$  et l'intensité  $i(t)$  du courant électrique dans le circuit :

$$u_R(t) = E - u_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

On constate sur les expressions de  $u_C(t)$ ,  $u_R(t)$  et de  $i(t)$  que ces grandeurs tendent respectivement vers  $E$  et 0 lorsque le temps  $t$  tend vers l'infini :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_C(t) = E \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = 0.$$

- Au bout d'un temps suffisamment grand, la tension aux bornes du condensateur n'évolue pratiquement plus et il n'y a plus de courant électrique dans le circuit. On dit que le condensateur est chargé sous la tension  $E$ .

 Il est important d'observer que la tension  $u_C$  est continue, pour des raisons énergétiques fondamentales, mais que l'intensité du courant électrique peut subir des discontinuités dans une branche de circuit contenant un condensateur.

- Comme  $1 - e^{-3} \approx 0,95$  et  $1 - e^{-5} \approx 0,99$ , au bout d'un temps égal à  $3\tau$  le condensateur a atteint 95% de sa tension finale et 99% au bout de  $5\tau$ . La constante de temps du circuit fixe l'ordre de grandeur de la durée de charge du condensateur.

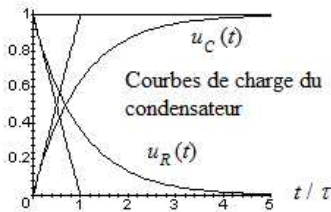


fig. 15

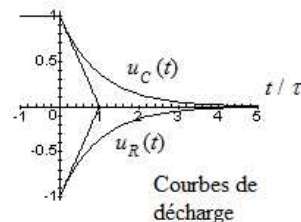


fig. 16

Le condensateur tend à jouer le rôle d'un interrupteur ouvert une fois le régime transitoire achevé : il coupe le courant continu dans le circuit.

## 1.5 Décharge du condensateur

- Une fois que le condensateur a été chargé sous la tension  $E$ , il est possible d'ouvrir l'interrupteur  $K_1$  sans dommage pour le circuit. Le condensateur, supposé parfait, conserve indéfiniment la charge électrique qu'il a acquise. On ouvre l'interrupteur  $K_1$  et on ferme  $K_2$  à un instant que l'on renomme, pour l'étude de la nouvelle phase qui débute, instant initial  $t = 0$ .

- Le circuit est constitué du résistor et du condensateur. L'équation d'évolution de la tension électrique aux bornes du condensateur est obtenue par une démarche similaire à celle accomplie lors de la charge, mais sur la base d'une loi des mailles plus simple :  $0 = u_R + u_C$ . Cela conduit à l'équation différentielle :

$$0 = RC \frac{du_C}{dt} + u_C \quad (12-3)$$

associée à la condition initiale  $u_C(0) = E$ .

- Nous en connaissons la solution générale :  $u_C(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

$A$  est déterminée par la condition initiale :  $E = u_C(0) = A e^{-0/\tau} = A$ . Ainsi, lors de la décharge du condensateur initialement chargé sous la tension  $E$ , sa tension  $u_C(t)$  évolue suivant la loi :

$$u_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

et l'intensité du courant électrique :

$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R} = -\frac{u_C(t)}{R} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

- La tension aux bornes du condensateur et l'intensité du courant électrique tendent vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , le courant circulant en sens opposé à la convention choisie. Les graphes de  $u_C(t)$  et de  $u_R(t)$  sont reportés sur la figure 16.

## 1.6 Bilan énergétique

- Le bilan des puissances entre les divers éléments :

$$\underbrace{E i(t)}_{\substack{\text{Puissance} \\ \text{fournie par} \\ \text{la source}}} = \underbrace{u_C(t) i(t)}_{\substack{\text{puissance} \\ \text{reçue par} \\ \text{le condensateur}}} + \underbrace{u_R(t) i(t)}_{\substack{\text{puissance} \\ \text{reçue par} \\ \text{le résistor}}}$$

La convention courant-tension est réceptrice pour le résistor et le condensateur ; elle est génératrice pour la source de tension.

- L'intégration de l'instant initial à un instant  $t$  quelconque des termes de l'égalité des puissances conduit pendant la charge, en conservant l'ordre des termes, à :

$$CE^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{CE^2}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 + \frac{CE^2}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right).$$

Le membre de gauche de l'égalité est l'énergie dépensée par la source de tension pour charger le condensateur, le premier terme du membre de droite, l'énergie emmagasinée dans le condensateur à l'instant  $t$  considéré et le dernier terme, l'énergie dissipée par effet Joule, due au fait qu'il y a eu circulation d'un courant électrique dans le résistor.

- Après un temps très grand devant  $\tau$ , les exponentielles sont négligeables devant 1 et le bilan énergétique final devient :

$$CE^2 = \frac{CE^2}{2} + \frac{CE^2}{2}.$$

La moitié seulement de l'énergie dépensée par la source est stockée dans le condensateur.

- En procédant de même lors de la décharge du condensateur à travers le résistor, on établit sans difficultés que l'énergie stockée dans le condensateur au début de cette phase  $\left(\frac{CE^2}{2}\right)$  est intégralement dissipée par effet Joule dans le résistor.

## 2. Le circuit R-L série

### 2.1 Présentation

Une source idéale de tension électrique  $E$  est en série avec une bobine d'auto-induction d'inductance  $L$  et une résistance  $R$ . À l'instant initial, on ferme l'interrupteur  $K$ . Il n'y a pas

de courant dans la maille :  $i(0) = 0$  par continuité du courant électrique dans une branche contenant une bobine.

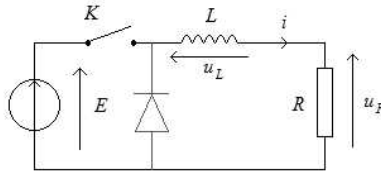


fig. 17

## 2.2 Mise en équation

La loi des mailles dans le circuit où l'interrupteur est fermé donne :  $E = u_L + u_R$ .

Les lois d'Ohm généralisées pour le résistor et la bobine d'auto-induction fournissent :

$$u_R = R i \quad \text{et} \quad u_L = L \frac{di}{dt}.$$

L'équation différentielle portant sur  $u_R$  se déduit des relations précédentes :

$$E = \frac{L}{R} \frac{du_R}{dt} + u_R \quad (12-4)$$

L'homogénéité de l'équation nous assure que le rapport  $\tau = \frac{L}{R}$  possède la dimension d'un temps. Il s'agit de la constante de temps du circuit R-L série.

## 2.3 Solution de l'équation et grandeurs électriques

- L'équation différentielle en  $u_R$  a exactement la même forme que celle régissant la tension  $u_C$  dans le circuit précédent. On obtient :

$$u_R(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = R i(t) \quad \text{et} \quad u_L(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

- On observe que les grandeurs électriques de ce circuit possèdent des propriétés duales de celles du circuit R-C série. Les deux tensions tendent asymptotiquement vers  $E$  et 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . L'intensité du courant électrique tend vers  $\frac{E}{R}$ .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_R(t) = E \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u_L(t) = 0.$$

- C'est ici l'intensité du courant électrique qui est obligatoirement continue dans la maille possédant une bobine d'auto-induction mais la tension aux bornes de cette dernière peut en revanche parfaitement être discontinue. La courbe représentative de  $u_R(t)$  est la même que celle de  $u_C(t)$  de la figure 15. Celle de  $u_L(t)$  est la même que celle de  $u_R(t)$  représentée sur la même figure.
- Une fois achevé le régime transitoire, la valeur de l'intensité électrique est indépendante des caractéristiques de la bobine d'auto-induction. Elle joue le rôle d'un simple fil de connexion.

## 2.4 Problème de l'ouverture du circuit

- Le courant électrique dans la bobine devant être continu, l'ouverture d'un circuit inductif nécessite de prendre des précautions. Elle provoque en effet l'apparition d'un arc électrique entre ses bornes, ce qui, à la longue, l'abîme.

Pour éviter ce phénomène parasite, on utilise une diode « de roue libre » branchée en parallèle sur l'association série de la bobine et du résistor, en tête-bêche sur la source.



- Lorsque l'interrupteur est fermé, elle est polarisée en inverse et aucun courant ne peut la traverser. Lorsqu'on ouvre l'interrupteur, le courant qui traversait la bobine a besoin d'un chemin pour s'écouler, qu'il trouve par l'intermédiaire de cette diode dont la tension à ses bornes s'annule alors.

## 2.5 Bilan énergétique

- Le bilan des puissances est :

$$\underbrace{E i(t)}_{\substack{\text{Puissance} \\ \text{fournie par} \\ \text{la source}}} = \underbrace{u_L(t) i(t)}_{\substack{\text{puissance} \\ \text{reçue par} \\ \text{la bobine}}} + \underbrace{u_R(t) i(t)}_{\substack{\text{puissance} \\ \text{reçue par} \\ \text{le résistor}}}$$

La convention courant-tension est récepteur pour la bobine et le résistor, générateur pour la source.

- Nous avons montré dans la fiche précédente que l'énergie emmagasinée par la bobine à un instant  $t$  devait être  $\frac{L i_L^2(t)}{2}$ , soit  $\frac{1}{2} L \left( \frac{E}{R} \right)^2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2$  dans le cas présent.

En revanche, lorsque le temps s'écoule, la puissance instantanée délivrée par la source de tension est différente de zéro et l'énergie fournie au circuit croît indéfiniment et tend à être intégralement dissipée par effet Joule dans le résistor.

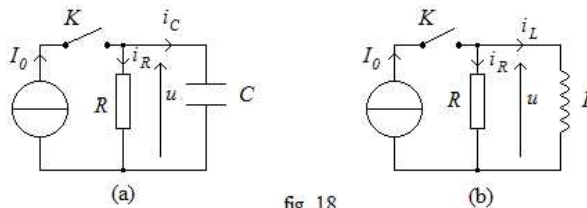
## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** On considère l'association en parallèle d'une source idéale de courant  $I_0$ , d'un résistor de résistance  $R$  et d'un condensateur de capacité  $C$ . (cf. fig. 18a).

Étudiez l'évolution des grandeurs électriques  $i_R(t)$ ,  $i_C(t)$  et  $u(t)$  à la fermeture et à l'ouverture de l'interrupteur  $K$ , le condensateur étant initialement déchargé avant la fermeture de  $K$ .

**Exercice 2 :** On considère l'association en parallèle d'une source idéale de courant  $I_0$ , d'un résistor de résistance  $R$  et d'une bobine d'inductance  $L$ . (cf. fig. 18b).

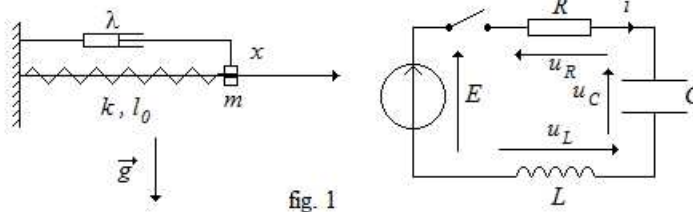
Étudiez l'évolution des grandeurs électriques  $i_R(t)$ ,  $i_L(t)$  et  $u(t)$  à la fermeture et à l'ouverture de l'interrupteur  $K$ .



## 1. Oscillateur amorti

### 1.1 Présentation

Un circuit R-L-C série, ou un oscillateur harmonique mécanique soumis à un frottement visqueux, sont des dispositifs qui présentent des comportements et possèdent des propriétés physiques caractéristiques tels qu'ils constituent une catégorie particulière d'objets physiques appelés **oscillateurs amortis**.



### 1.2 Mises en équation

- Le référentiel d'étude est supposé galiléen ; le repère de projection est  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Les notations sont celles de la fiche 1-§2. Le bilan des forces est similaire à l'exception de la force de frottement fluide supplémentaire due à l'amortisseur, de coefficient de frottement fluide  $\lambda$  :  $\vec{F} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{x}(t) \vec{e}_x$ .

- Seule la projection du principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse sur  $(O, \vec{e}_x)$  nous intéresse :

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = kl_0$$

soit :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0. \quad (13-1)$$

- Pour le circuit R-L-C, une fois l'interrupteur fermé, la loi des mailles et les lois d'Ohm généralisées pour chacun des dipôles passifs conduisent à l'équation différentielle sur la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur :

$$E = LC\ddot{u}_C + RC\dot{u}_C + u_C$$

soit :

$$\ddot{u}_C + \frac{R}{L}\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}. \quad (13-2)$$

### 1.3 Équation canonique

Les équations (13-1) et (13-2) ont la même forme. Posons :

- la **pulsation propre**  $\omega_0$  telle que :  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  ou  $\frac{1}{LC}$ .
- le **facteur de qualité**  $Q$  tel que :  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$  ou  $\frac{R}{L}$ .

En notant  $g(t)$  la grandeur recherchée ( $x(t)$  ou  $u_C(t)$ ) et  $g_0$  la grandeur de régime permanent

( $l_0$  ou  $E$ ), on forme l'équation canonique :

$$\ddot{g} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{g} + \omega_0^2 g = \omega_0^2 g_0. \quad (13-3)$$

## 2. Régime libre de l'oscillateur amorti

### 2.1 Méthode de résolution

- La solution complète de l'équation différentielle est  $g_p(t) + g_g(t)$  où  $g_p(t)$  est une solution particulière et  $g_g(t)$  la solution générale de l'équation homogène :

$$\ddot{g} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{g} + \omega_0^2 g = 0.$$

- On vérifie que la solution particulière constante  $g_p(t) = g_0$  convient. Ainsi :

$$x_p(t) = l_0 \quad \text{ou} \quad u_p(t) = E. \quad (13-4)$$

- L'équation homogène admet une solution de la forme  $g_g(t) = e^{rt}$  si, et seulement si,  $r$  est racine de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0. \quad (13-5)$$

- La nature des racines de l'équation caractéristique dépend du signe du discriminant :

$$\Delta = \left( \frac{\omega_0}{Q} \right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right).$$

Comme la somme des racines  $-\frac{\omega_0}{Q}$  est négative et le produit  $\omega_0^2$  positif, les racines peuvent être réelles négatives, ou complexes conjuguées avec une partie réelle négative.

### 2.2 Régime apériodique

- Si  $\Delta > 0$ , soit  $Q < \frac{1}{2}$ , les racines sont réelles négatives et ont la dimension de l'inverse d'un temps. Notons les deux racines  $-\frac{1}{\tau_1}$  et  $-\frac{1}{\tau_2}$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  étant des constantes de temps caractérisant le mouvement.

- La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :

$$g_g(t) = A e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

et la solution générale de l'équation complète :

$$g(t) = g_0 + A e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (13-6)$$

La progression vers la valeur de régime permanent  $g_0$  s'effectue lentement, mais sans oscillations.

### 2.3 Régime critique

- Le régime critique correspond à  $\Delta = 0$ , soit  $Q = \frac{1}{2}$ . La racine de l'équation caractéristique est double :  $-\omega_0$ .

- La solution générale de l'équation homogène est alors :

$$g_g(t) = (A t + B) e^{-\omega_0 t}$$

et la solution générale de l'équation différentielle de départ :

$$g(t) = g_0 + (At + B)e^{-\omega_0 t}. \quad (13-7)$$

C'est le régime le plus rapide d'accès à la valeur de régime permanent.

## 2.4 Régime pseudo-périodique

- Il correspond à  $\Delta < 0$ , soit  $Q > \frac{1}{2}$ . Les racines de l'équation caractéristique sont alors complexes conjuguées. Notons-les  $-\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$ .
- La solution générale de l'équation homogène s'écrit :

$$g_g(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\Omega t) + B e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\Omega t)$$

et la solution générale de l'équation complète :

$$g(t) = g_0 + A e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\Omega t) + B e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\Omega t). \quad (13-8)$$

Ce régime voit apparaître des oscillations qui peuvent être gênantes pour les systèmes mécaniques.

## 2.5 Conditions initiales

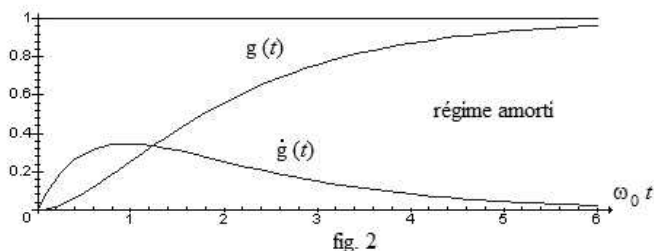
- Les constantes d'intégration  $A$  et  $B$  sont déterminées à l'aide des valeurs initiales de  $g(0)$  et  $\dot{g}(0)$ .
- Soit un circuit R-L-C évoluant sous un régime apériodique avec un condensateur initialement déchargé  $u_C(0) = 0$ , et la nullité du courant dans la bobine à la fermeture de l'interrupteur, ce qui implique  $\dot{u}_C(0) = 0$ .  $A$  et  $B$  doivent être solution du système :

$$\begin{cases} g_0 + A + B = 0 \\ \frac{A}{\tau_1} + \frac{B}{\tau_2} = 0 \end{cases}$$

Ou bien, pour l'oscillateur mécanique,  $x(0) = l_0 + X_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$ , qui correspondent à la masse écartée de la position d'équilibre du ressort  $l_0$  d'une quantité  $X_0$  et lâchée sans vitesse à  $t = 0$  s.

## 2.6 Courbes représentatives

$\frac{g(t)}{g_0}$  et de  $\frac{\dot{g}(t)}{\omega_0 g_0}$  sont représentées sur les graphiques des figures 2, 3 et 4 :



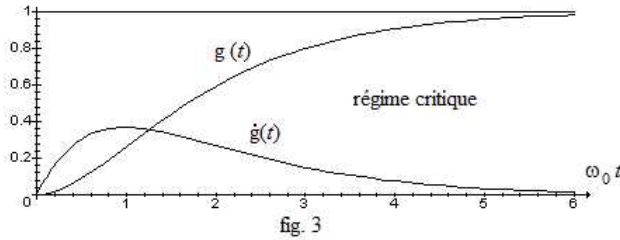


fig. 3

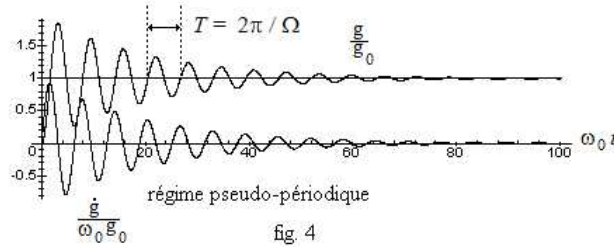


fig. 4

## 2.7 Étude par le portrait de phase

• Chacun des trois comportements suivants peut être identifié à partir de son **portrait de phase**, c'est-à-dire de la représentation de la courbe paramétrée (normalisée dans notre cas)

dont les points ont pour coordonnées  $\left(\frac{g(t)}{g_0}; \frac{\dot{g}(t)}{\omega_0 g_0}\right)$  où  $t \in [0, +\infty[$ .

La courbe est naturellement parcourue de la gauche vers la droite pour le demi-plan supérieur -  $\dot{g}$  y est positif et donc  $g$  croît - et de la droite vers la gauche pour les portions sous l'axe des abscisses -  $\dot{g}$  y est négatif et donc  $g$  décroît.

Pour le circuit R-L-C avec un condensateur initialement déchargé, les trois régimes donnent les trois courbes :

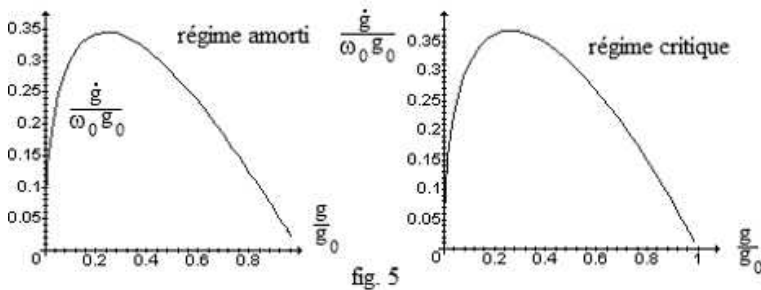


fig. 5

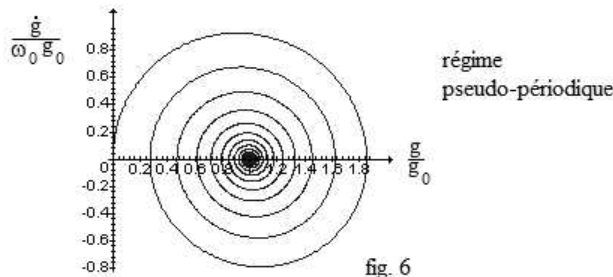


fig. 6

- Les portraits de phase des régimes amorti et critique sont assez voisins quant à leurs allures. La seule distinction, minime, réside dans le fait qu'ayant été tracés pour un même intervalle de temps, le point extrême de la courbe du régime critique, celui le plus à droite, est plus proche de son point de régime permanent que dans le cas du régime amorti.
- Le régime pseudo-périodique se distingue quant à lui par l'enroulement caractéristique de sa trajectoire de phase autour de son point limite, qui traduit les oscillations avec changement du sens de la vitesse.

## 2.8 Conclusion

Laissés à leur libre évolution ou soumis à une consigne constante, les oscillateurs amortis ont des comportements apériodiques ou pseudo oscillants, dans tous les cas amortis.

Au bout de  $5\tau_1$ , le système a évacué son énergie et retrouvé son état d'équilibre stable, ou a atteint son nouveau régime permanent.

## 3. Régime sinusoïdal forcé de l'oscillateur amorti

### 3.1 Principe de l'étude

- Les systèmes sont maintenant soumis systématiquement à une excitation sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , et d'amplitude  $G_0$ . L'équation canonique du système devient :

$$\ddot{g} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{g} + \omega_0^2 g = \omega_0^2 G_0 \cos(\omega t). \quad (13-9)$$

Pour un oscillateur mécanique,  $kG_0$  représente l'intensité maximale d'une force sinusoïdale appliquée à la masse en plus de la tension du ressort et du frottement visqueux.

Pour le circuit R-L-C,  $G_0$  est l'amplitude maximale de la tension sinusoïdale délivrée par un générateur de signaux basses fréquences.

- Nous nous intéressons uniquement à la solution particulière de l'équation différentielle (13-9). En effet, le régime libre s'éteint après un temps de l'ordre de  $5\tau_1$  ou  $5\tau$ . Au bout de ce temps, la solution générale de l'équation est pratiquement égale à sa solution particulière, et ce, quelles que soient les conditions initiales du système. Nous supposons qu'un temps suffisant s'est écoulé pour que  $g(t) \approx g_p(t)$ .

### 3.2 Méthode de résolution

La fonction  $g(t)$  cherchée est la partie réelle de la fonction à valeurs complexes  $\underline{g}(t)$  solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{\underline{g}} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{g}} + \omega_0^2 \underline{g} = \omega_0^2 G_0 e^{j\omega t}.$$

En cherchant  $\underline{g}$  sous la forme  $\underline{g}(t) = \underline{G} e^{j\omega t}$  on obtient :

$$\underline{G} \left( -\omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q} + \omega_0^2 \right) = \omega_0^2 G_0.$$

soit, en introduisant la variable sans dimension  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  :

$$\underline{G} = \frac{G_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}. \quad (13-10)$$

Si on note  $|\underline{G}| = \rho$  et  $\arg(\underline{G}) = \varphi$ , on a donc :

$$\underline{g}(t) = \rho e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \text{d'où} \quad g(t) = \rho \cos(\omega t + \varphi).$$

### 3.3 Résonance de charge ou d'amplitude

- Le module de  $\underline{G}$  donne l'amplitude maximale de la grandeur  $g(t)$  qui est la tension aux bornes du condensateur ou l'amplitude de l'oscillation mécanique autour de sa position d'équilibre en réponse à l'excitation.

Son argument donne son déphasage par rapport à l'excitation. On a :

$$|\underline{G}| = \frac{G_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \quad ; \quad \arg \underline{G} = -\arg \left(1 - x^2 + j \frac{x}{Q}\right).$$

- Les limites aux basses et hautes fréquences du module et de l'argument de l'amplitude complexe sont :

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\underline{G}| = G_0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |\underline{G}| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arg \underline{G} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arg \underline{G} = -\pi$$

Aux basses fréquences, l'excitation est suffisamment lente pour que le système puisse s'ajuster à tout instant à l'excitation.

Aux hautes fréquences, l'excitation est si rapide que le système ne réagit pratiquement plus et qu'il le fait à contretemps.

- L'étude de  $|\underline{G}|$  en fonction de  $x$  montre que :

– Pour les facteurs de qualité  $Q \leq 1/\sqrt{2}$ , la fonction  $|\underline{G}|$  est monotone décroissante de  $G_0$  à 0 pour  $x \in [0; +\infty[$ .

– Pour les facteurs de qualité  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , la fonction  $|\underline{G}|$  est

croissante de  $G_0$  à  $G_M = \frac{Q G_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$  pour  $x \in \left[0; x_m = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}\right]$

puis décroissante de  $G_M$  à 0 pour  $x \in [x_m; +\infty[$ .

On dit qu'il y a alors **résonance d'amplitude** ou de **charge**.

- Il en résulte les courbes de module et de phase suivantes :

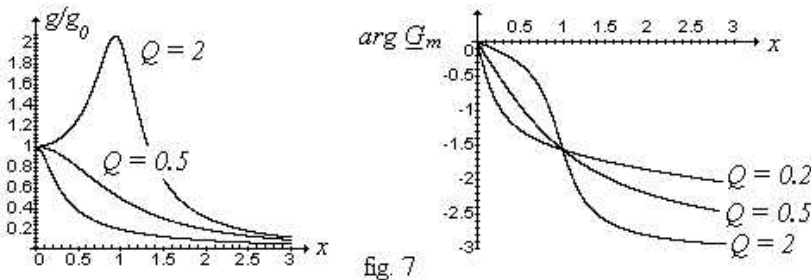


fig. 7

### 3.4 Résonance d'intensité ou de vitesse

- La vitesse est égale à la dérivée par rapport au temps de l'amplitude d'oscillation. L'intensité du courant électrique dans le circuit R-L-C est proportionnelle à la tension aux bornes du condensateur.

La dérivation par rapport au temps d'une grandeur sinusoïdale réelle se traduit par la multiplication par  $j\omega$  de la grandeur complexe associée.

Il en résulte que  $\dot{g} = j\omega g$ .

On étudie la grandeur complexe sans dimension  $\underline{v} = \frac{\dot{g}}{\omega_0 Q G_0}$  ce qui conduit à :

$$\underline{v} = \frac{j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad (13-11)$$

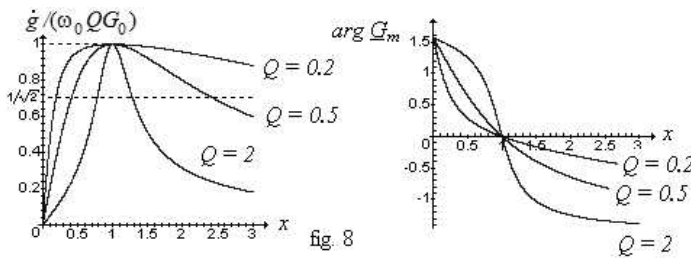
Il en résulte que :

$$|\underline{v}| = \frac{\frac{x}{Q}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad ; \quad \arg \underline{v} = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

- Aux basses et hautes fréquences,  $|\underline{v}|$  tend vers 0. Les déphasages tendent respectivement vers  $\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$ .

$|\underline{v}|$  présente un maximum égal à 1 pour  $x_m = 1$ , quelle que soit la valeur du facteur de qualité ;  $\underline{v}$  est alors en phase avec l'excitation.

Nous obtenons les courbes de module et de phase suivantes :



### 3.5 Bande passante

On constate qu'il y a toujours **résonance de vitesse** ou **d'intensité**.

Le caractère plus ou moins aigu de la courbe de résonance, son acuité, est mesuré par le rapport de la fréquence propre  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  à la **bande passante**  $\Delta f$ .

Cette dernière est définie comme l'intervalle de fréquences pour lesquelles  $|\underline{v}| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On montre à partir de  $|\underline{v}|$  que :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} = \frac{1}{\Delta x} \quad (13-12)$$

Lorsque  $Q > 1$  la résonance est dite aigüe, sinon elle est dite floue.

### 3.6 Construction de Fresnel

- Elle associe à une grandeur sinusoïdale  $g(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi)$  un vecteur  $\vec{G}$ , appelé **vecteur de Fresnel** associé à  $g(t)$ , de norme  $G_m$  et faisant un angle  $\varphi$  avec le demi-axe des abscisses positives. Cela revient à associer, dans le plan complexe, un point  $G$  d'affixe  $G_m e^{j\varphi}$  et à définir le vecteur de Fresnel  $\vec{G}$  par  $\vec{OG}$ .



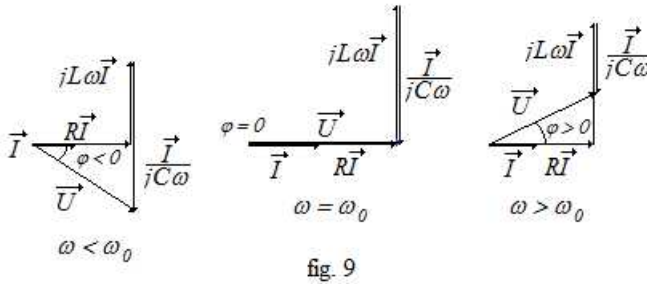
- Exemple : recherche de  $i(t)$  dans le circuit  $R$ - $L$ - $C$  excité par une tension alternative :  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ .

La loi des mailles dans le circuit  $u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$  se transpose sur les grandeurs complexes associées :  $\underline{u}(t) = \underline{u}_R(t) + \underline{u}_L(t) + \underline{u}_C(t)$ .

Géométriquement, sur les vecteurs de Fresnel associés :  $\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C$ .

L'intensité étant la grandeur électrique commune dans la maille, elle est prise comme grandeur de référence. On fixe arbitrairement sa phase à l'origine à 0 et son vecteur de Fresnel  $\vec{I}$  est colinéaire à l'axe des abscisses.

- Aux bornes de la résistance, en convention récepteur,  $\vec{U}_R = R\vec{I}$  ;
- aux bornes de la bobine,  $\vec{U}_L$  fait un angle de  $\frac{\pi}{2}$  avec  $\vec{U}_R$  et a pour norme  $L\omega I$  ;
- aux bornes du condensateur,  $\vec{U}_C$  fait un angle de  $-\frac{\pi}{2}$  avec  $\vec{U}_R$  et a pour norme  $\frac{I}{C\omega}$  .
- Il en résulte les constructions de Fresnel suivantes, selon la valeur de  $\omega$  par rapport à  $\omega_0$  :



### 3.7 Lien entre régime libre et régime sinusoïdal forcé

L'acuité de la résonance d'intensité ou de vitesse (et en général de charge ou d'amplitude) d'un système oscillant amorti est associée à un facteur de qualité élevé et donc à un amortissement -  $R$  ou  $\lambda$  - très faible. Or, le régime transitoire entre deux régimes permanents et le régime libre de ces systèmes physiques particuliers sont d'autant plus long que l'amortissement est faible.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Exprimez le facteur de qualité  $Q$  en fonction des éléments de l'oscillateur :  $R$ ,  $L$  et  $C$  pour l'oscillateur électrique et  $m$ ,  $k$ ,  $\lambda$  pour l'oscillateur mécanique.

**Exercice 2 :** Un oscillateur mécanique amorti possède une masse  $M = 1,25$  t et une raideur  $k = 2 \cdot 10^5$  N.m<sup>-1</sup>. Déterminez la valeur que doit avoir le coefficient de frottement fluide pour que son régime libre soit le régime critique.

**Exercice 3 :** Soit le circuit  $R$ - $L$ - $C$  série où  $R = 120 \Omega$ ,  $L = 75$  mH et  $C = 52$  nF. Le circuit est alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude maximale  $U_m = 10$  V et de fréquence égale à : 1.  $f = 1,5$  kHz, 2.  $f = 3,5$  kHz.

Calculez l'intensité efficace du courant dans le circuit et les valeurs efficaces des tensions aux bornes des trois éléments passifs constitutifs du circuit pour chacune des deux fréquences.

# 14 Filtrage linéaire

## 1. Signaux périodiques

### 1.1 Définitions

• Un signal caractérisé par une grandeur  $s(t)$  est **périodique** s'il existe une durée positive  $T \neq 0$  telle que pour tout  $t$ ,  $s(t + T) = s(t)$ . La plus petite durée non nulle satisfaisant à cette propriété s'appelle la **période** du signal. Sa **fréquence** s'en déduit :  $f = \frac{1}{T}$ .

• La **valeur moyenne**  $\bar{s}$  et la **valeur efficace**  $S_e$  du signal  $s(t)$  sont définies par :

$$\bar{s} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt \quad \text{et} \quad S_e^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (s(t))^2 dt \quad (14-1)$$

• Le signal périodique fondamental est le signal sinusoïdal de fréquence  $f$  et d'amplitude  $S_m$  :  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$  pour lequel  $\bar{s} = 0$  et  $S_e = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$ .

### 1.2 Propriété fondamentale

• Un signal  $s$  périodique, de période  $T$  (et de fréquence  $f$ ) se décompose suivant :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$$

où  $S_n$  est l'amplitude maximale de la composante de fréquence  $n f$  et  $\varphi_n$  sa phase à l'origine.

• La composante  $S_0$  est la **composante continue** ou **valeur moyenne** du signal sur une période. Celle de rang  $n = 1$  est la **composante fondamentale** de  $s$ . Les autres composantes sont les **harmoniques** de  $s$ , chacune étant caractérisée par son rang  $n$ .

• Exemple : une tension carrée  $u(t)$  symétrique, égale à  $U_m$  pendant une demie-période et  $-U_m$  sur l'autre, se développe :

$$u(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4U_m}{(2p+1)\pi} \sin(2\pi(2p+1)ft).$$

### 1.3 Spectre des signaux périodiques

Les spectres des signaux périodiques sont des spectres de raies où seules sont présentes les raies de fréquences  $n f$  (cf. fiche 2, fig 1).


## 2. Fonction de transfert harmonique

### 2.1 Définition

• Soit un signal sinusoïdal  $s_e$  de fréquence  $f$ , d'amplitude  $S_e$ , de pulsation  $\omega = 2\pi f$  excitant un **système linéaire**. La réponse du système à une telle excitation est un signal sinusoïdal  $s_s$  de même fréquence, d'amplitude  $S_s(\omega)$ , déphasé de  $\varphi_\omega$  par rapport au signal d'entrée.

• On appelle  $\underline{H}(\omega)$  la **fonction de transfert harmonique** du système le rapport :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}_s(t)}{\underline{s}_e(t)} \quad (14-2)$$

 La notion de fonction de transfert harmonique n'a de sens que pour les systèmes linéaires. Son expression finale et les valeurs qu'elle prend aux différentes pulsations doivent être indépendantes de  $S_e$ .

## 2.2 Réponse d'un système linéaire

- Si la fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$  d'un système linéaire est donnée, la réponse du système à une excitation sinusoïdale  $s(t) = S_e \cos(\omega t)$  est le signal :

$$|\underline{H}(\omega)| S_e \cos\left(\omega t + \arg\left(\underline{H}(\omega)\right)\right) = s_1(t).$$

- Si le signal excitateur est une somme de signaux sinusoïdaux de même nature et de fréquences  $(f_i)_{i \in I}$  où  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $s_e(t) = \sum_{i \in I} S_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)$ , la réponse du système linéaire à un tel signal est la somme de ses réponses à chacune des composantes sinusoïdales :

$$s_s(t) = \sum_{i \in I} |\underline{H}(\omega_i)| S_i \cos\left(2\pi f_i t + \varphi_i + \arg\left(\underline{H}(\omega_i)\right)\right).$$

## 2.3 Diagramme de Bode

- La fonction de transfert peut être donnée par une représentation graphique appelé **diagramme de Bode**. Elle est constituée de deux courbes :

– la courbe de **gain**,  $G_{dB}(\omega)$  en fonction de  $\omega$ , l'échelle des pulsations étant logarithmique. Le gain est défini par :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(\omega)| \quad (14-3)$$

dont l'unité est le décibel de symbole dB ;

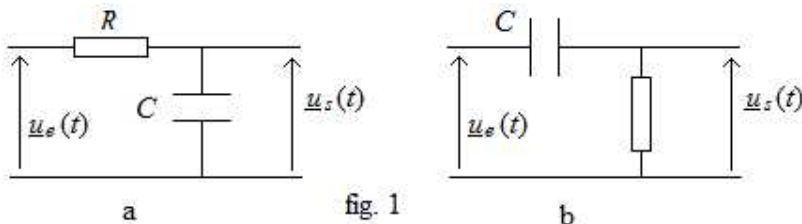
– la courbe de **phase**  $\arg \underline{H}(\omega)$  en fonction de  $\omega$  avec la même échelle logarithmique pour les pulsations.

- Il est donc possible de lire sur la courbe de gain l'information relative au facteur multiplicatif affectant l'amplitude du signal d'entrée pour une pulsation donnée et sur celle de phase, le déphasage qui affectera le signal d'entrée.

## 3. Filtre passe-bas du premier ordre

### 3.1 Schéma électrique

- Un schéma est celui de la figure 1a.



- Il est tacitement considéré qu'aucun courant ne circule dans les départs de branche supérieur et inférieur droits du schéma : le même courant traverse la résistance et le condensateur.

### 3.2 Comportement qualitatif du filtre

- En basses fréquences, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert et « coupe » le courant électrique dans la maille. La tension aux bornes de la résistance est nulle et celle d'entrée se retrouve donc en sortie aux bornes du condensateur.
- En hautes fréquences, le condensateur se comporte comme un court-circuit et la tension à ses bornes tend vers 0. Le filtre laisse donc « passer » les tensions de basses fréquences d'où sa dénomination.

### 3.3 Fonction de transfert

La fonction de transfert est obtenue par le diviseur de tension :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{u_s(t)}{u_e(t)} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\tau\omega} \quad (14-4)$$

de module  $|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$  et d'argument  $\arg \underline{H}(\omega) = -\arctan(\tau\omega)$ .

Leurs limites en basses et hautes fréquences sont :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\underline{H}(\omega)| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |\underline{H}(\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg \underline{H}(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg \underline{H}(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

### 3.4 Les comportements asymptotiques

- Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\underline{H}(\omega) \rightarrow 1$  et  $G_{dB} \rightarrow 0$  dB et  $\arg \underline{H}(\omega) \rightarrow 0$  rad la courbe asymptotique de gain est une droite horizontale d'ordonnée 0 dB.
- Lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ , on a  $\underline{H}(\omega) \sim \frac{1}{j\tau\omega}$  ;  $G_{dB} \sim -20 \log(\tau\omega)$  dB et  $\arg \underline{H}(\omega) \sim -\frac{\pi}{2}$  rad.

Le gain en hautes fréquences varie comme  $-20 \log \tau - 20 \log \omega$ .

Sa courbe asymptotique dans le diagramme de Bode, donc avec une abscisse en  $\log \omega$ , est ainsi une droite de pente négative égale à - 20 dB par décade, notée - 20 dB / déc.

La multiplication par 10, à amplitude constante, de la fréquence d'une tension sinusoïdale à l'entrée du filtre entraîne une diminution de 20 dB du gain et donc une division par 10 de l'amplitude de la tension sortie.

- Les asymptotes se coupent pour une pulsation  $\omega_c$  telle que  $0 \text{ dB} = -20 \log(\tau\omega_c)$  soit  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ . Le gain correspondant est de 0 dB.

Cependant, la fonction de transfert à la pulsation  $\omega_c$  vaut  $\underline{H}(\omega_c) = \frac{1}{1 + j}$  : son module est

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ , son gain égal à environ -3 dB et son argument  $-\frac{\pi}{4}$  rad.

La courbe réelle de gain passe donc par le point de coordonnées  $(\log \omega_c, -3 \text{ dB})$  ; celle de phase par celui de coordonnées  $(\log \omega_c, -\frac{\pi}{4})$ .

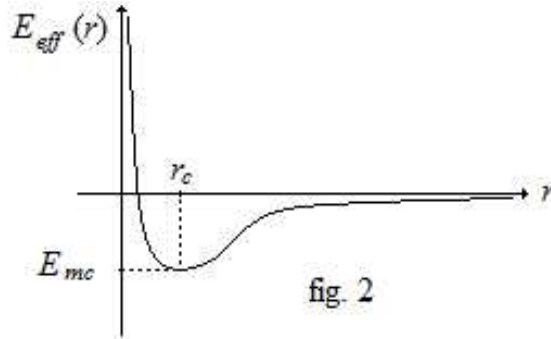
- $\omega_c$  s'appelle la **pulsation de coupure à -3 dB** du filtre.

La **fréquence de coupure à -3 dB** vaut  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$ .

La **bande passante à -3 dB** du filtre est l'intervalle de fréquences  $[0 ; f_c]$ .

### 3.5 Le diagramme de Bode

Il comporte les courbes asymptotiques de gain et de phase arrêtées chacune à la pulsation de coupure et les courbes réelles du filtre :



### 3.6 Usages particuliers du filtre passe-bas

Il a :

- un rôle de « **moyenneur** » : les composantes sinusoïdales de fréquences  $f < f_c$  passent à travers le filtre, les autres sont atténuées.

Si  $f_c$  est très basse, seule la composante continue, donc la valeur moyenne, d'un signal périodique passe le filtre. Le filtre moyenne le signal d'entrée.

- un rôle d'**intégrateur** pour les composantes de fréquences  $f > 10f_c$ . La fonction de transfert est équivalente à  $\frac{1}{j\tau\omega}$ . Or, la division par  $j\omega$  traduit son intégration par rapport à  $t$ .

## 4. Filtre passe-haut du premier ordre

### 4.1 Schéma électrique

Le filtre de tension passe-haut le plus simple est celui dont le schéma est donné à la figure 1b.

### 4.2 Comportement qualitatif du filtre

- En basses fréquences, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert et coupe le courant électrique dans la maille. La tension aux bornes de la résistance et donc la tension de sortie sont nulles.
- En hautes fréquences, le condensateur se comporte comme un court-circuit, la tension à ses bornes tend vers 0 et la tension d'entrée se retrouve en sortie du filtre. Le filtre laisse donc « passer » les tensions de hautes fréquences d'où son appellation.

### 4.3 Fonction de transfert

La fonction de transfert est obtenue par le diviseur de tension :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u}_s(t)}{\underline{u}_e(t)} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega} \quad (14-5)$$

de module  $|\underline{H}(\omega)| = \frac{\tau\omega}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$  et d'argument  $\arg \underline{H}(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\tau\omega)$ .

Leurs limites en basses et hautes fréquences sont :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\underline{H}(\omega)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |\underline{H}(\omega)| = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg \underline{H}(\omega) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg \underline{H}(\omega) = 0$$

#### 4.4 Les comportements asymptotiques

- Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , on a :  $\underline{H}(\omega) \sim j\tau\omega$  ;  $G_{dB} \sim 20 \log(\tau\omega)$  dB ;  $\arg \underline{H}(\omega) \sim \frac{\pi}{2}$  rad.

Le gain en basses fréquences varie comme  $20 \log \tau + 20 \log \omega$ . Sa courbe asymptotique dans le diagramme de Bode, avec une abscisse en  $\log \omega$ , est une droite de pente positive égale à + 20 dB par décade, notée + 20 dB / déc.

La multiplication par 10, à amplitude constante, de la fréquence d'une tension sinusoïdale, tout en demeurant dans le domaine des basses fréquences, conduit à une augmentation du gain de 20 dB ; l'amplitude de la tension de sortie se trouve multipliée par 10.

- Lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $\underline{H}(\omega) \rightarrow 1$  ;  $G_{dB} \rightarrow 0$  dB et  $\arg \underline{H}(\omega) \rightarrow 0$  rad.

La courbe asymptotique de gain est une droite horizontale d'ordonnée 0 dB.

- Les asymptotes se coupent pour une pulsation  $\omega_c$  telle que  $0 \text{ dB} = 20 \log(\tau\omega_c)$  soit  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$  ; le gain correspondant est de 0 dB.

La fonction de transfert à la pulsation  $\omega_c$  vaut  $\underline{H}(\omega_c) = \frac{j}{1+j}$  ; son module  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , son gain environ -3 dB et son argument  $\frac{\pi}{4}$  rad.

La courbe réelle de gain passe donc par le point de coordonnées  $(\log \omega_c, -3 \text{ dB})$  ; celle de phase par celui de coordonnées  $(\log \omega_c, \frac{\pi}{4})$ .

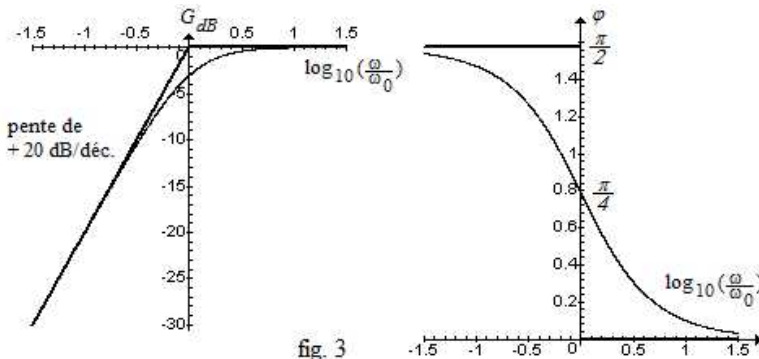
$\omega_c$  s'appelle la **pulsation de coupure à - 3 dB** du filtre.

La **fréquence de coupure à - 3 dB** vaut  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$ .

La **bande passante à - 3 dB** du filtre est l'intervalle de fréquences  $[f_c ; +\infty[$ .

L'intervalle  $[0 ; f_c]$  est la **bande coupée** du filtre.

#### 4.5 Le diagramme de Bode



## 4.6 Utilisation particulière du filtre

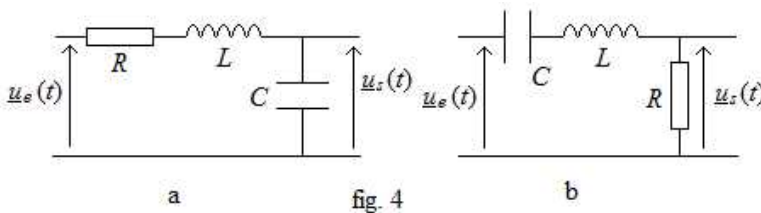
Rôle de **dérivateur** : pour les composantes de fréquences  $f < \frac{f_c}{10}$  la fonction de transfert est équivalente à  $j\tau\omega$ .

$j\omega e^{j\omega t}$  est la dérivée par rapport au temps de  $e^{j\omega t}$ . La multiplication par  $j\omega$  traduit donc la dérivation par rapport au temps des composantes de fréquences  $f < \frac{f_c}{10}$ .

Le signal de sortie est donc le dérivé par rapport au temps, à un coefficient multiplicateur  $\tau$  près, du signal d'entrée lorsque sa fréquence est petite devant celle de coupure.

## 5. Filtre passe-bas du second ordre

### 5.1 Schéma électrique (figure 4a) :



### 5.2 Comportement qualitatif du filtre

- En basses fréquences, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert et coupe le courant électrique dans la maille. Les tensions aux bornes de la résistance et de la bobine sont nulles. La tension d'entrée se retrouve donc en sortie aux bornes du condensateur.
- En hautes fréquences, le condensateur se comporte comme un court-circuit et la tension à ses bornes tend vers 0. Cet effet est renforcé par le fait que la bobine se comporte comme un circuit ouvert en hautes fréquences. Le filtre laisse donc « passer » les tensions de basses fréquences.

### 5.3 Fonction de transfert

- La fonction de transfert est obtenue en utilisant le diviseur de tension :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{u_s(t)}{u_e(t)} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

dont la forme canonique est :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}} \quad (14-6)$$

en posant  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $\frac{1}{Q} = RC\omega_0$  et la **pulsation réduite**  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ , sans dimension.

- Le module de la fonction de transfert est :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + (\frac{u}{Q})^2}}$$

son argument :

$$\arg \underline{H}(\omega) = -\arctan\left(\frac{u}{Q(1-u^2)}\right) \quad \text{si } 0 < u < 1;$$

$$\arg \underline{H}(\omega) = -\pi - \arctan\left(\frac{u}{Q(1-u^2)}\right) \quad \text{si } 1 < u.$$

- Leurs limites en basses et hautes fréquences sont :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\underline{H}(\omega)| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |\underline{H}(\omega)| = 0;$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg \underline{H}(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg \underline{H}(\omega) = -\pi.$$

- Le module de  $\underline{H}(\omega)$  présente un maximum (une **résonance**) si le facteur de qualité  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Cette résonance a lieu pour la pulsation réduite  $u_r$  égale à  $\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  soit une pulsation

de résonance  $\omega_r$  égale à  $\omega_0 u_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ .

On a alors :  $|\underline{H}(\omega_r)| = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > 1$  puisque  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

## 5.4 Les comportements asymptotiques

- Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\underline{H}(\omega) \rightarrow 1$ ,  $G_{dB} \rightarrow 0$  dB et  $\arg \underline{H}(\omega) \rightarrow 0$  rad.

La courbe asymptotique de gain est une droite horizontale d'ordonnée 0 dB.

- Lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ , on a  $\underline{H}(\omega) \sim -\frac{1}{u^2}$  soit  $G_{dB} \sim -40 \log\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)$  dB ;  $\arg \underline{H}(\omega) \sim -\pi$  rad.

Le gain en hautes fréquences varie comme  $40 \log \omega_0 - 40 \log \omega$ . Sa courbe asymptotique est donc une droite de pente négative égale à - 40 dB par décade, notée - 40 dB / déc.

- Les asymptotes se coupent pour une pulsation  $\omega_c$  telle que  $0 \text{ dB} = -40 \log\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)$  soit  $\omega_c = \omega_0$ . Le gain correspondant est de 0 dB.

La fonction de transfert à la pulsation  $\omega_0$  vaut  $\underline{H}(\omega_0) = -jQ$ . Son module est  $Q$ , son gain égal à  $20 \log Q$  et son argument  $-\frac{\pi}{2}$  rad.

## 5.5 Les diagrammes de Bode

Deux allures de diagramme de Bode se dessinent selon que  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  :

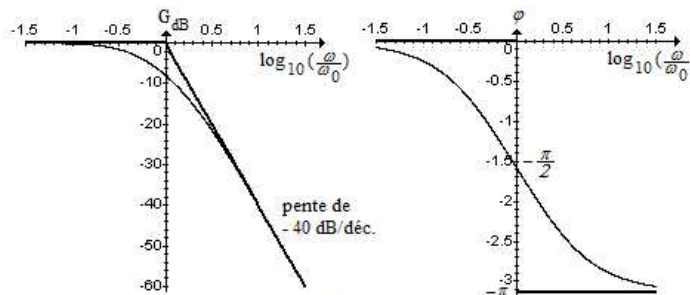
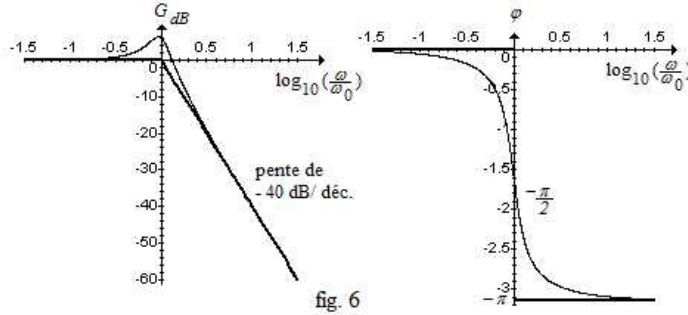


fig. 5



ou  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  :



## 6. Filtre passe-bande du second ordre

### 6.1 Schéma électrique

Le filtre de tension passe-bande le plus simple que l'on puisse concevoir est celui dont le schéma est donné sur la figure 4b.

### 6.2 Comportement qualitatif du filtre

- En basses fréquences, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert et coupe le courant électrique dans la maille. La tension aux bornes de la résistance est nulle.
- En hautes fréquences, la bobine se comporte comme un circuit ouvert et coupe à son tour le courant électrique dans la maille. La tension aux bornes de la résistance tend vers 0. Le filtre coupe les hautes et les basses fréquences. Il ne laisse donc « passer » que les tensions de fréquences intermédiaires dans une certaine bande passante.

### 6.3 Fonction de transfert

- La fonction de transfert est obtenue en utilisant le diviseur de tension :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{u_s(t)}{u_e(t)} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

dont la forme canonique est :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\frac{u}{Q}}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}} = \frac{1}{1 + jQ\left(u - \frac{1}{u}\right)} \quad (14-7)$$

avec les mêmes définitions de  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $u$  que pour le filtre passe-bas du second ordre.

- Le module de la fonction de transfert est :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(u - \frac{1}{u}\right)^2}}$$

son argument :

$$\arg \underline{H}(\omega) = -\arctan Q\left(u - \frac{1}{u}\right).$$

- Leurs limites en basses et hautes fréquences sont :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\underline{H}(\omega)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |\underline{H}(\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg \underline{H}(\omega) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg \underline{H}(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

## 6.4 Les comportements asymptotiques

- Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , on a :  $\underline{H}(\omega) \sim j \frac{u}{Q}$  ;  $G_{dB} \sim 20 \log \left( \frac{u}{Q} \right) \text{ dB}$  ;  $\arg \underline{H}(\omega) \sim \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

Le gain croît comme  $20 \log \omega - 20 \log(Q\omega_0)$  en basses fréquences, donc l'asymptote sur le diagramme de Bode est une droite de pente + 20 dB / déc.

- Lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$  on a :  $\underline{H}(\omega) \sim \frac{1}{jQ\omega}$  ;  $G_{dB} \sim -20 \log(Q\omega) \text{ dB}$  ;  $\arg \underline{H}(\omega) \sim -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

Le gain varie comme  $-20 \log \omega - 20 \log \left( \frac{Q}{\omega_0} \right)$  en hautes fréquences, donc sa courbe asymptotique est une droite de pente négative égale à - 20 dB / déc.

- Les asymptotes se coupent pour une pulsation  $\omega_c$  telle que :

$$20 \log \omega_c - 20 \log(Q\omega_0) = -20 \log \omega_c - 20 \log \left( \frac{Q}{\omega_0} \right) \text{ soit } \omega_c = \omega_0.$$

Le gain correspondant est de  $-20 \log Q$ . La fonction de transfert à la pulsation  $\omega_0$  vaut  $\underline{H}(\omega_0) = 1$ , son module 1, son gain 0 dB et son argument 0 rad.

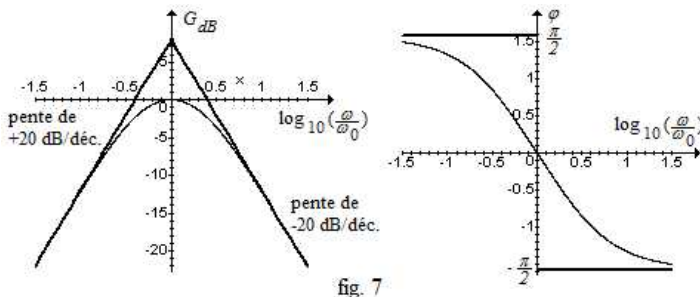
La courbe réelle de gain passe donc par le point de coordonnées  $(\log \omega_0, 0 \text{ dB})$  ; celle de phase par celui de coordonnées  $(\log \omega_0, 0)$ .

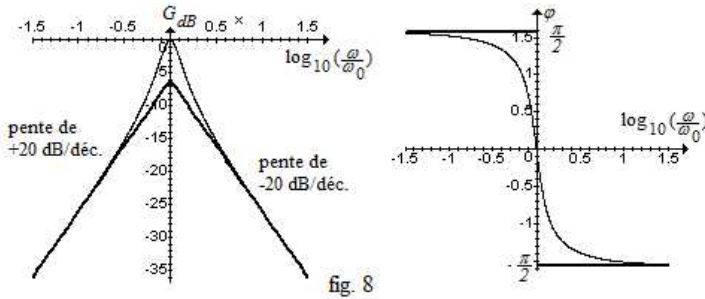
- $\omega_0$  s'appelle la **pulsation de résonance** du filtre.

La **fréquence de résonance** vaut  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ .

## 6.5 Le diagramme de Bode

Deux allures apparaissent selon que  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  ou  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Elles sont données figures 7 et 8.





## 6.6 Largeur de bande passante à $-3$ dB

- C'est l'intervalle de fréquences telles que  $|H(\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

La résolution de cette inéquation conduit à trouver l'intervalle de valeurs de  $u$  :  $[u_m ; u_M]$


avec  $u_m = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$  et  $u_M = \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$ .

La mesure de l'intervalle des pulsations réduites  $\Delta u = u_M - u_m = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0}$  permet d'en déduire la **largeur de bande passante** recherchée :

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} . \quad (14-8)$$

- La bande passante représente l'intervalle des fréquences des tensions sinusoïdales sur lesquelles le filtre agit peu. Sa largeur est d'autant plus étroite que le facteur de qualité est élevé ou son amortissement faible.

Les tensions dont les fréquences sont hors de la bande passante voient leurs amplitudes d'autant plus diminuées que leurs fréquences sont éloignées des limites de celle-là. On dit qu'elles sont « coupées », c'est-à-dire éliminées par le filtre. Ce dernier joue donc un rôle de sélecteur - imparfait - d'une gamme donnée de tensions sinusoïdales, celles dont la fréquence appartient à la bande passante.

 Il est fréquent que « largeur de bande passante » et « bande passante » soient confondues : la mesure est alors prise pour l'ensemble.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Une tension sinusoïdale de fréquence 5 kHz et d'amplitude  $U_m = 5$  V attaque un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure égale à 3 kHz.

Déterminez l'amplitude de la tension de sortie du filtre.

**Exercice 2 :** Déterminez la fréquence de résonance  $f_0$  et la largeur de la bande passante  $\Delta f$  d'un filtre passe-bande dont le schéma électrique est celui de la figure 4b avec  $R = 470 \Omega$ ,  $L = 36$  mH et  $C = 22$  nF.

# 15 Mécanique

## 1. Cinématique du point matériel et du solide

La **cinématique** est l'étude des mouvements des corps matériels indépendamment des causes qui les produisent.

### 1. Espace et temps classiques

#### 1.1 L'espace classique

- Nos perceptions sensorielles communes nous invitent à placer les événements décrits et étudiés dans le cadre de la physique classique dans un **espace à trois dimensions** (« longueur-largeur-hauteur »), **continu**, **homogène**, **isotrope** et **euclidien**.
- L'homogénéité de l'espace signifie qu'il n'y a pas de position privilégiée : la translation (au sens géométrique) d'une région donnée de l'espace à une autre d'une expérience n'induit aucune modification quant à son déroulement.
- Son isotropie signifie qu'il n'y a aucune direction privilégiée : la rotation d'une expérience (là encore au sens géométrique) n'a aucune incidence quant à son déroulement.
- Enfin, son caractère euclidien exprime la possibilité d'y procéder à des mesures de distances et d'angles conformes aux postulats de la géométrie euclidienne.
- La continuité de la droite réelle, similaire à l'intuition de continuité selon l'une des directions quelconque de notre espace physique, et le caractère tridimensionnel de l'espace nous font choisir pour modèle mathématique de sa représentation, l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

#### 1.2 Le temps classique

Le temps classique est conçu comme s'écoulant uniformément (il n'y a pas de date privilégiée) et identique pour tous les observateurs quels que soient leurs états de mouvement.

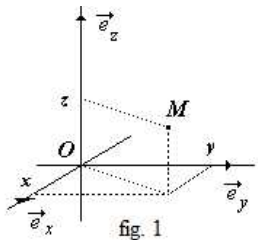
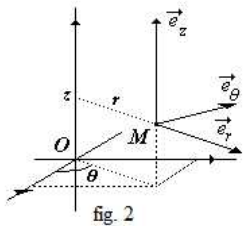
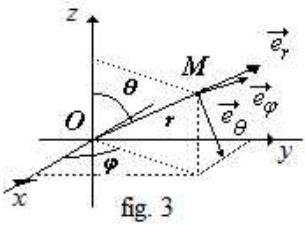
## 2. Repérage dans l'espace

### 2.1 Référentiel

Un **référentiel** est un **solide de référence** muni d'un **repère de projection** et d'une **horloge** pour repérer les instants. La définition repose sur l'intuition que nous possédons de la notion de solide qui sera précisée par la suite.

### 2.2 Les repères couramment utilisés

Un repère de projection est constitué d'un point origine  $O$  et de trois vecteurs constituant une base orthonormée directe.

Coordonnées	Vecteur de position	Cordonnées de $M$
<p><b>cartésiennes</b></p>  <p>fig. 1</p>	$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z.$	$M(x, y, z)$
<p><b>cylindriques</b></p>  <p>fig. 2</p>	$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z.$	$M(r, \theta, z)$ $r \geq 0$
<p><b>sphériques</b></p>  <p>fig. 3</p>	$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$	$M(r, \theta, \varphi)$ $r \geq 0 ; 0 \leq \theta < \pi$

Le rapport entre les bases est :


**base cartésienne-base cylindrique**

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y & \text{(15-1)} \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y & \text{(15-2)} \end{cases}$$

**base cartésienne-base sphérique**

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \end{cases}$$

Les directions des vecteurs des bases cylindriques et sphériques ne sont pas fixes dans l'espace et évoluent avec le point  $M$ .

 Les vecteurs de base de tous les repères présentés sont dénués de dimension physique : ceci se traduit par l'absence d'unité après la valeur de leur norme ou de leur produit scalaire.

## 2.5 Correspondances entre les repérages

Les coordonnées dans les différents repères utilisés sont naturellement liées entre elles.

- Entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arg(x + iy) \\ z = z \end{cases}$$

- Entre les coordonnées cartésiennes et sphériques :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \varphi = \arg(x + iy) \end{cases}$$

## 2.6 Repérage dans le temps

Un ensemble arbitraire d'événements se succédant est choisi, qui constitue une chronologie. Ces événements sont numérotés dans l'ordre croissant selon leur succession.

« Repérer un événement dans le temps », c'est désigner l'événement de la chronologie avec lequel il coïncide et lui affecter le même numéro, que l'on appelle l'**instant** auquel l'événement s'est produit.

## 2.7 Limites du cadre classique

La mécanique classique postule un espace euclidien. La relativité générale dans le cadre de laquelle la théorie cosmologique de Big Bang s'inscrit, décrit à grande échelle un espace où les postulats de la géométrie euclidienne sur les parallèles sont suspendus. De même, postule-t-elle un temps universel, identique pour tous les observateurs, quel que soit leur état de mouvement. Les relativités restreinte et générale abolissent cette vision et inventent autant de temps que d'observateurs, chacun de ceux-là étant solidaires des états relatifs de mouvement de ceux-ci.

Cependant, la mécanique classique continue de présenter un cadre de description des phénomènes physiques largement adéquat pour un grand nombre d'entre eux, encore utile aux ingénieurs et aux techniciens.

# 3. Description du mouvement d'un point matériel

## 3.1 Notion de point matériel

Tout corps  $C$  dont les dimensions selon les trois directions de l'espace sont petites devant les distances que le corps peut être amené à parcourir peut être assimilé à un point. Ce corps ayant une masse, on parle de **point matériel**.



*La Terre n'est certainement pas un point matériel pour nous ! Elle le devient peu ou prou lorsque l'on étudie son mouvement autour du Soleil. La notion est donc toute relative et il faut savoir, pour chaque problème, se poser la pertinence de son adoption.*

## 3.2 Notion de mouvement

Soit un référentiel  $\mathcal{R}$  ; un point matériel  $M$  est en mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  si ses coordonnées dans un repère de projection attaché à ce référentiel varient au cours du temps.

Le mouvement est une notion relative : un point  $M$ , fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$  sera mobile par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ .



*Le langage importe : affirmer « le point matériel  $M$  est en mouvement » sans préciser le référentiel par rapport auquel on parle est dénué de sens !*

### 3.3 Trajectoire d'un point matériel

La trajectoire  $\mathcal{T}$  d'un point matériel  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est l'ensemble des points de l'espace successivement occupés par  $M$  au cours de son mouvement dans le référentiel.

Si le mouvement se déroule, sur l'intervalle de temps  $[t_1 ; t_2] \subset \mathbb{R}$ , alors :

$$\mathcal{T} = \{(x(t), y(t), z(t)) ; t \in [t_1 ; t_2]\}.$$

La trajectoire est une courbe géométrique plus ou moins simple : droite, cercle, parabole, ellipse, ... ou des portions seulement de ces courbes.

Comme le mouvement, la trajectoire est relative.

### 3.4 Vecteur-vitesse et vecteur-accélération

- La **vitesse** du point matériel  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est le vecteur dérivé par rapport au temps du vecteur position de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} (t) \quad (15-3)$$

C'est un vecteur qui est tangent en chacun des points de la trajectoire.



*La confusion est souvent possible entre la « vitesse », en tant que vecteur et la « vitesse » en tant que norme du vecteur-vitesse. Le contexte doit vous aider à repérer ce qui est demandé. Il est toujours plus prudent, en cas de doute de travailler sur le vecteur-vitesse puis de donner sa norme.*

- Le second élément de description du mouvement est l'**accélération** du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Elle est définie comme le vecteur dérivé par rapport au temps du vecteur vitesse de  $M$  dans le même référentiel :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} (t) = \left. \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} (t) \quad (15-4)$$

- **Cordonnées cartésiennes**

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \dot{x}(t) \vec{e}_x + \dot{y}(t) \vec{e}_y + \dot{z}(t) \vec{e}_z \quad \text{a pour norme : } v_{M/\mathcal{R}} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}.$$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \ddot{x}(t) \vec{e}_x + \ddot{y}(t) \vec{e}_y + \ddot{z}(t) \vec{e}_z \quad \text{a pour norme : } a_{M/\mathcal{R}}(t) = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t) + \ddot{z}^2(t)}.$$

- **Cordonnées cylindriques**

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta + \dot{z}(t) \vec{e}_z \quad \text{a pour norme : } v_{M/\mathcal{R}} = \sqrt{\dot{r}^2(t) + (r(t) \dot{\theta}(t))^2 + \dot{z}^2(t)}.$$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z \quad \text{de norme : } a_{M/\mathcal{R}} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}.$$



*Le passage du vecteur vitesse au vecteur accélération en coordonnées cylindriques doit se faire en prenant soin de dériver les différentes coordonnées de positions et les vecteurs de base, non constants puisque leur orientation change avec le déplacement du point matériel.*

## 4. Exemples de mouvements du point matériel

Tout les mouvements décrits dans cette section concernent un seul point matériel et se produisent dans un même référentiel  $\mathcal{R}$ . Nous omettrons de rappeler à chaque fois l'indication indiciaire  $\ll M/\mathcal{R} \gg$  ce qu'il faudrait faire en toute rigueur, en l'absence d'ambiguïté.

Le référentiel est muni d'un repère de coordonnées cartésiennes et d'un repère de coordonnées cylindriques.

### 4.1 Mouvement rectiligne uniforme

- Le mouvement d'un point matériel est **rectiligne uniforme** si son vecteur-vitesse est constant au cours du temps. Sa direction, son sens et sa norme sont constants au cours du temps.

La trajectoire du point est alors une droite parcourue à vitesse (norme) constante  $v$ . Le repère naturel d'un tel mouvement est celui de coordonnées cartésiennes dont un des vecteurs de base serait colinéaire au vecteur vitesse.

- Dans le cas général, notons en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} : \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad v = |v_0|$$

Le vecteur-vitesse du mouvement de  $M$  et sa norme étant constants, les équations horaires des coordonnées du point  $M$  sont :

$$\overrightarrow{OM}(t) : \begin{cases} v_{0x}t + x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{cases}$$

$(x_0, y_0, z_0)$  étant les coordonnées du point atteint par le point  $M$  à l'instant  $t = 0$ . Ces équations horaires sont aussi les équations paramétriques de la trajectoire de  $M$  dans le référentiel.

### 4.2 Mouvement uniformément accéléré

- Le mouvement d'un point matériel est **uniformément accéléré** si son vecteur-accélération est constant au cours du temps. Sa direction, son sens et sa norme sont constants au cours du temps.

Le repère de coordonnées le plus adapté à l'étude du mouvement est celui de coordonnées cartésiennes : afin de faciliter les calculs, l'un des vecteurs de base,  $\vec{e}_x$  par exemple, est dirigé suivant le vecteur-accélération.



- Posons que l'accélération d'un point matériel est, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} : \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Par intégration du vecteur-accélération entre l'instant initial  $t = 0$  et un instant  $t$  quelconque, on obtient le vecteur-vitesse du point matériel :

$$\vec{v} : \begin{vmatrix} at + v_{0x} \\ v_{0y} \\ 0 \end{vmatrix}$$

car il est toujours possible de décomposer le vecteur-vitesse à l'instant initial en sa composante suivant la direction de l'accélération,  $v_{0x}$ , et sa composante perpendiculaire à l'accélération et de prendre le second vecteur de la base ( $\vec{e}_y$  par exemple) suivant la direction de la composante perpendiculaire de la vitesse qui a alors pour projection sur ce vecteur  $v_{0y}$ , sa troisième composante sur  $\vec{e}_z$  s'annulant par le choix ainsi fait, sans restreindre la généralité du problème.

- En intégrant le vecteur vitesse par rapport au temps, on détermine le vecteur position en fonction du temps :

$$\overrightarrow{OM} : \begin{vmatrix} \frac{1}{2} at^2 + v_{0x} t + x_0 \\ v_{0y} t + y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$$

où  $(x_0, y_0, z_0)$  désigne les coordonnées de la position du point matériel à l'instant initial.

- Le mouvement se déroule dans le plan de coordonnée  $z = z_0$  perpendiculaire à  $\vec{a}$  et à  $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0y} \vec{e}_y$ .

L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant le paramètre temps entre les équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$ . On obtient :

$$x = \frac{1}{2} a \left( \frac{y - y_0}{v_{0y}} \right)^2 + v_{0x} \left( \frac{y - y_0}{v_{0y}} \right) + x_0$$

dans laquelle on reconnaît l'équation d'une parabole de sommet  $S$  de coordonnées cartésiennes  $\left( -\frac{v_{0x}^2}{2a}, y_0 - \frac{v_{0x}v_{0y}}{a}, z_0 \right)$ , d'axe  $(S, \vec{e}_x)$ .

Le point matériel passe par le sommet de sa trajectoire à l'instant  $t_S = -\frac{v_{0x}}{a}$ .

Cet instant n'est postérieur à l'instant initial que si  $a \cdot v_{0x} < 0$  soit  $\vec{a} \cdot \vec{v}_0 < 0$  : la vitesse initiale doit posséder une composante selon la direction de l'accélération dirigée en sens opposé à cette dernière.

Au cours du temps,  $v_x(t)$  s'annule puis devient positif et le mouvement se poursuit dans le sens de l'accélération.

## 4.3 Mouvement circulaire uniforme

- Le mouvement d'un point est **circulaire uniforme** si sa trajectoire est un cercle ou un arc de cercle parcouru à « vitesse » constante. Le repère de projection le plus simple pour étudier ce type de mouvement est celui de coordonnées cylindriques dont l'axe  $(Oz)$  est perpendiculaire au plan de la trajectoire et contient le centre du cercle.

•  $(r(t), \theta(t), z(t))$  étant les coordonnées du point matériel  $M$ , la trajectoire est paramétrable par  $r(t) = R$ , le rayon du cercle sur lequel s'inscrit la trajectoire, et  $z(t) = z_0$ , l'altitude du plan de la trajectoire.

Les composantes de la vitesse dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  sont :

$$\vec{v} : \begin{vmatrix} 0 \\ R \dot{\theta}(t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Seule la norme du vecteur-vitesse peut être constante puisque sa direction varie à tout instant.

La **vitesse angulaire**  $\dot{\theta}(t) = \omega$  est donc constante. On en déduit les coordonnées complètes du point matériel en coordonnées cylindriques :

$$(R, \omega t + \theta_0, z_0).$$

L'angle polaire qui repère la position du point matériel sur le cercle varie linéairement au cours du temps, ce qui signifie que sa rotation a toujours le même sens : dans le sens trigonométrique si  $\omega > 0$ , dans le sens horaire sinon.

• L'accélération a pour composantes dans la même base que la vitesse :

$$\vec{a} : \begin{vmatrix} -R\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad \vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_r.$$

Le vecteur-accélération est dirigé à tous instants vers le centre de la trajectoire : il est **centripète**. Sa norme est constante égale à  $R\omega^2$ . On peut ainsi retenir le schéma suivant :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

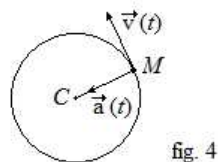


fig. 4

#### 4.4 Mouvement circulaire non uniforme

Si le mouvement est circulaire de rayon  $R$  mais non uniforme,  $\dot{\theta}(t)$  cesse d'être une constante au cours du temps. Les vecteurs-vitesse et accélération s'en déduisent :

$$\vec{v} : \begin{vmatrix} 0 \\ R \dot{\theta}(t) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad \vec{a} : \begin{vmatrix} -R \dot{\theta}^2(t) \\ R \ddot{\theta}(t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Si la vitesse est toujours tangente en chaque point de la trajectoire, l'accélération cesse d'être centripète. Elle est cependant toujours dirigée vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire. Cela donne le schéma suivant :

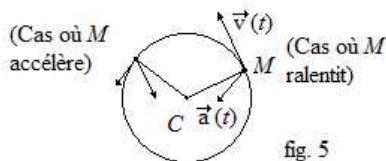


fig. 5

## 5. Mouvements du solide

### 5.1 Définition du solide

Un solide est un ensemble  $\mathcal{S}$  de points, connexe ou non, tels que la distance entre deux points quelconques de  $\mathcal{S}$  soit constante au cours du temps.

Ceci définit un solide idéal très différent de celui qu'étudie la mécanique des milieux déformables en ce qu'elle s'intéresse aux déformations qu'un solide peut subir sous l'effet de contraintes mécaniques.

Par ailleurs, ce solide parfait est incompatible avec les conséquences de la théorie de la relativité restreinte.

### 5.2 Champ des vitesses

• La constance à tous instants de la distance entre deux points quelconques du solide implique une relation particulière entre leurs vitesses. Soit le référentiel  $\mathcal{R}$  dans lequel on étudie le mouvement du solide ; soit  $M$  et  $P$  deux points du solide,  $MP = \text{cte}$  peut s'écrire  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = \text{cte}^2$ . La dérivée par rapport au temps dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de l'expression précédente conduit à :

$$\overrightarrow{MP} \cdot \frac{d\overrightarrow{MP}}{dt} = 0.$$

Or, la dérivée par rapport au temps du vecteur est égale à la différence des vitesses de chacun des deux points dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :  $\vec{v}_{P/\mathcal{R}} - \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ . Son orthogonalité à tous instants au vecteur  $\overrightarrow{MP}$  se traduit par l'existence d'un vecteur  $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}(t)$  tel que :

$$\vec{v}_{P/\mathcal{R}} - \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}(t) \wedge \overrightarrow{MP}. \quad (15-5)$$

On appelle  $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}(t)$  le **vecteur-rotation instantané** du solide dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . (15-5) est la **relation de Varignon**.

• C'est bien le même vecteur-rotation qui sert, à un instant donné, pour exprimer la relation de Varignon entre deux points quelconques du solide.

### 5.3 Exemples

•  $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}(t) = \vec{0}$  : tous les points du solide possèdent la même vitesse. Le solide est dit en **translation** dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Il se déplace parallèlement à lui-même dans ce référentiel.

Si de plus la direction de la vitesse commune à tous les points de  $\mathcal{S}$  est constante, on parle de **translation rectiligne** du solide dans  $\mathcal{R}$ , par exemple un solide glissant sur un plan incliné sans tourner sur lui-même.

Si la vitesse commune des points est de la forme  $L\dot{\theta}\vec{e}_\theta$  dans un repère de coordonnées cylindrique adéquat, le solide est dit en **translation circulaire** dans  $\mathcal{R}$ , par exemple une nacelle de manège de type « grande roue ».

•  $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}(t) = \dot{\theta}(t)\vec{e}_z = \omega(t)\vec{e}_z$ .

Plaçons l'origine  $O$  du repère de coordonnées cylindriques sur l'axe de rotation ;  $O$  est fixe dans  $\mathcal{R}$  donc sa vitesse est nulle.

La relation de Varignon entre  $O$  (point appartenant au solide ou considéré comme solidaire) et un point  $M$  de coordonnées  $(r_M, \theta_M(t), z_M)$  du solide conduit à :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{OM} = r_M\omega(t)\vec{e}_\theta = r_M\dot{\theta}_M(t)\vec{e}_\theta \quad (15-6)$$

puisque  $\overrightarrow{OM} = r_M \vec{e}_r + z_M \vec{e}_z$ , où  $r_M$  représente aussi la distance de  $M$  à l'axe de rotation.



Tous les points du solide possèdent la même vitesse angulaire  $\dot{\theta}(t)$ .

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Calculez la vitesse et l'accélération d'un point matériel dont le vecteur position dans le repère de coordonnées cartésiennes  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  du référentiel  $\mathcal{R}$  est :

$$\text{Pour } 0 \leq t < 5 \text{ s, } \overrightarrow{OM} : \begin{cases} x(t) = 3t \\ y(t) = 4t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Pour } 5 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s, } \overrightarrow{OM} : \begin{cases} x(t) = 3t + 0,21(t-5)^2 \\ y(t) = 4t + 0,28(t-5)^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Donnez les équations des portions de trajectoire.

**Exercice 2 :** Les lois horaires d'un point matériel  $M$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  donné sont, dans un repère de coordonnées cartésiennes :  $x(t) = a \cos(\omega t)$ ,  $y(t) = a \sin(\omega t)$ ,  $z(t) = vt$ .

Exprimez la vitesse et l'accélération de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  et calculez leur norme.

Déterminez l'équation cartésienne de la projection de la trajectoire dans le plan  $xOy$ .

Qualifiez le mouvement de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .

# 16 Mécanique

## 2. Dynamique du point matériel

La **dynamique** est la partie de la mécanique consacrée à l'étude et à la prévision des mouvements des corps matériels dans des référentiels donnés, en se fondant sur les causes qui les produisent.

### 1. Éléments de cinétique

#### 1.1 La masse

- La dynamique fait appel à la notion de **masse** dans l'expression des grandeurs physiques auxquelles elle s'intéresse.

À tout corps ou tout point matériel est attaché un scalaire positif, sa masse  $m$ , indépendante de l'état de mouvement de l'observateur, chargé de traduire la plus ou moins grande aptitude de ce corps à persister dans son état de mouvement, ce que l'on appelle sa plus ou moins grande inertie.

Cette masse est dénommée **masse inerte**, par opposition à la **masse pesante** du même corps, sa masse comme scalaire traduisant l'interaction gravitationnelle à laquelle elle est soumise de la part de tous les autres corps et dont elle est elle-même une source.

La mécanique classique a constaté expérimentalement la constance du rapport des deux masses pour tous les corps matériels qu'elle a étudiés, la relativité générale en a postulé leur identité.

- La masse est une des dimensions de fondamentale de la physique, notée  $M$ . Son unité dans le Système International est le kilogramme, de symbole  $kg$ .

#### 1.2 Le centre d'inertie

Si l'on considère un ensemble  $\mathcal{S}$  de points matériels de masse  $\{m_i\}_{i=1,\dots,n}$ , occupant respectivement les positions  $\{M_i\}_{i=1,\dots,n}$  à un instant  $t$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  d'origine  $O$ , le **centre d'inertie** ou **centre de masse** du système de points, noté  $G$ , est défini par la relation :

$$M_S \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i} \quad \text{où} \quad M_S = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (16-1)$$

$M_S$  est la **masse** du système des points matériels. Cette grandeur est postulée être une grandeur additive en mécanique classique, ce qui cesse d'être exact à l'échelle nucléaire.



*Le centre d'inertie peut être un point géométrique ne coïncidant avec aucun des points matériels du système.*

- La définition du centre d'inertie se généralise à un corps solide, qu'il suffit de concevoir comme une collection continue de points matériels.

#### 1.3 La quantité de mouvement

- On appelle **quantité de mouvement** d'un point matériel de masse  $m$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  dans lequel sa vitesse est  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$  le vecteur :

$$\vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m \vec{v}_{M/\mathcal{R}}. \quad (16-2)$$

- Pour le système  $S$  de points matériels décrit au paragraphe précédent, ou pour un corps solide, cette grandeur est postulée comme étant additive et l'on définit la quantité de mouvement du système  $S$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , notée  $\vec{p}_{S/\mathcal{R}}$ , par :

$$\vec{p}_{S/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$$

- La dérivation par rapport au temps, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , de la relation (16-1) définissant le centre d'inertie du système conduit au résultat très important :

$$\vec{p}_{S/\mathcal{R}} = M_S \vec{v}_{G/\mathcal{R}}. \quad (16-3)$$

La quantité de mouvement totale du système matériel est égale à la quantité de mouvement de son centre d'inertie auquel est attaché toute la masse du système. On l'appelle la **résultante cinétique**.

- La quantité de mouvement a pour dimension :  $M.L.T^{-1}$ . Son unité est le  $kg.m.s^{-1}$ .

## 2. Lois fondamentales

Trois principes fondamentaux inséparables les uns des autres constituent le socle sur lequel repose le caractère opérationnel de la dynamique classique.

### 2.1 Principe d'inertie

#### Principe d'inertie pour un point

*Il existe des référentiels, appelés référentiels galiléens ou inertiels, dans lesquels un point matériel qui n'est soumis à aucune force est au repos ou possède un mouvement rectiligne uniforme.*

#### Principe d'inertie pour un corps

*Il existe des référentiels, appelés référentiels galiléens ou inertiels, dans lesquels le centre d'inertie d'un corps matériel qui n'est soumis à aucune force est au repos ou possède un mouvement rectiligne uniforme.*

### 2.2 Principe fondamental de la dynamique

#### Principe fondamental de la dynamique

*Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement  $\vec{p}_{M/\mathcal{R}_g}$  d'un point matériel  $M$ , de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}$  dans le référentiel, ou celle  $\vec{p}_{S/\mathcal{R}}$  d'un corps matériel est égal à la résultante des forces  $\sum \vec{f}$  qui s'exercent sur le point ou le corps*


$$\left. \frac{d\vec{p}_{M/\mathcal{R}_g}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \sum \vec{f} \quad \text{ou} \quad \left. \frac{d\vec{p}_{S/\mathcal{R}_g}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \sum \vec{f}. \quad (16-4)$$

- Ce principe est souvent écrit, pour un point matériel ou pour un système matériel de masse  $M_S$  constante :

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \sum \vec{f} \quad \text{ou} \quad M_S \vec{a}_{G/\mathcal{R}_g} = \sum \vec{f}, \quad (16-5)$$

où  $\vec{a}_{M/\mathcal{R}_g}$  et  $\vec{a}_{G/\mathcal{R}_g}$  sont les accélérations respectives du point  $M$  et du centre d'inertie  $G$  dans le référentiel galiléen. On désigne parfois par **résultante dynamique** la quantité  $M_S \vec{a}_{G/\mathcal{R}_g}$ .

- On en déduit que la dimension de toute force est  $M.L.T^{-2}$ . Son unité est le newton, de symbole N. On a :  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg.m.s}^{-2}$ .

 C'est le mouvement du seul centre d'inertie  $G$  du corps solide que le principe fondamental permet de prévoir. Cependant, si ce corps est en translation rectiligne ou circulaire dans le référentiel, alors la connaissance du mouvement de  $G$  implique celle du mouvement de tous les autres points du solide.

## 2.3 Principe de l'action et de la réaction

- Lorsque deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  sont en interaction, le point  $M_1$  (resp.  $M_2$ ) exerçant une force  $\vec{f}_{12}$  (resp.  $\vec{f}_{21}$ ) sur  $M_2$  (resp.  $M_1$ ), le principe de l'action et de la réaction énonce que la résultante vectorielle des deux forces est nulle et que les deux forces sont colinéaires à la droite joignant  $M_1$  à  $M_2$ .

$$\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \vec{f}_{12} = \vec{0}. \quad (16-6)$$

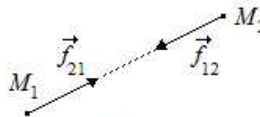


fig. 1

- Ce principe a une conséquence importante sur les forces à prendre en compte lors de l'étude du mouvement du centre d'inertie d'un corps solide  $C$ . La solidarité qui existe entre ses points traduit en effet l'existence de forces d'interactions entre chaque couple de ses points. Écrivons le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen, pour chaque point matériel  $M_i$  du solide  $C$ , en séparant parmi les forces qui s'exercent sur lui celles qui ont leur source à l'extérieur du corps, que nous désignerons par **forces extérieures**, de celles qui proviennent des autres points du corps en question, les **forces intérieures** :

$$m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g} = \sum \vec{f}_{ext \rightarrow M_i} + \sum_j \vec{f}_{M_j \rightarrow M_i}$$

En faisant la somme membre à membre de toutes les équations traduisant le principe fondamental pour chacun des points  $M_i$  du corps matériel, la résultante des forces intérieures s'annule, ces forces s'annulant deux à deux en vertu du principe de l'action et de la réaction et la somme des termes du membre de gauche n'est autre que la résultante dynamique du système. Ainsi, nous pouvons maintenant préciser la forme prise par le principe fondamental de la dynamique pour un solide :

### Théorème de la résultante cinétique

La dérivée de la résultante cinétique d'un système matériel dans un référentiel galiléen est égale à la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur lui :

$$M_S \vec{a}_{G/\mathcal{R}_g} = \sum_i \sum \vec{f}_{ext \rightarrow M_i} = \sum \vec{f}_{ext}. \quad (16-7)$$

## 2.4 Conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé

- Un système matériel (point ou corps) est dit **isolé** s'il n'est soumis à aucune force.

D'après le principe fondamental de la dynamique, la dérivée par rapport au temps de sa résultante cinétique est nulle donc sa résultante cinétique est constante dans tout référentiel galiléen.

C'est ce que l'on appelle la **conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé dans un référentiel galiléen**.

- Il en est de même pour un système pseudo-isolé pour lequel c'est seulement la résultante des forces qui est nulle.

## 2.5 Invariance des forces

La mécanique classique ou newtonienne postule l'invariance des forces dans tous les référentiels, galiléens ou non. C'est cette invariance qui permet de prouver que deux référentiels galiléens sont obligatoirement en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

En effet, si un même bilan des forces peut être fait pour deux observateurs galiléens, alors :

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \sum \vec{f} \quad \text{et} \quad m \vec{a}_{M/\mathcal{R}'_g} = \sum \vec{f}$$

Par différence,  $\vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} - \vec{a}_{M/\mathcal{R}'_g} = \vec{0}$  d'où l'on tire, grâce à la définition des accélérations, que la différence des vitesses est constante :  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g} - \vec{v}_{M/\mathcal{R}'_g} = \vec{v}_{\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g}$ , cette différence étant la vitesse du référentiel  $\mathcal{R}'_g$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_g$ .

## 3. Conseils pour résoudre un problème de mécanique

### 3.1 Définition du système

Le premier choix à faire est de définir précisément le système étudié. Ceci ne pose aucun problème si le corps est assimilable à un point matériel.

En revanche, pour un système composé de plusieurs solides, c'est plus délicat : il est possible de définir le système dans son ensemble et d'espérer obtenir quelques propriétés sur le mouvement de son centre d'inertie. Cependant, le plus souvent, il vaut mieux considérer chacun des corps comme autant de systèmes à étudier simultanément.

### 3.2 Choix du référentiel

Le référentiel à choisir est celui dans lequel on pressent que le mouvement ne sera pas trop compliqué et aisément interprétable. On veille à ce qu'il puisse être considéré comme galiléen pour le mouvement considéré.

### 3.3 Bilan des forces

On recense toutes les forces qui vont intervenir dans le mouvement du système, sans oublier les réactions de supports éventuels. On a intérêt à faire un schéma stylisé soigné du problème qui aidera pour les deux étapes suivantes.

### 3.4 Choix du repère de projection

On choisit le repère orthonormé de projection qui devrait être le plus pratique, à savoir celui dans lequel les forces et en particulier celles de réaction des supports auront le plus de composantes nulles.



*Prenez le temps de bien choisir le repère car un problème simple lorsqu'il est traité dans un certain repère peut se révéler très délicat à traiter dans un autre.*



### 3.5 Application du principe fondamental de la dynamique

• Appliquer le principe fondamental permet d'obtenir les équations différentielles portant sur les variables de position qui identifient le système. Ces équations sont obtenues en :

- ❶ écrivant l'une des deux relations : (16-5) pour un point matériel ou (16-7) pour le centre d'inertie d'un solide en translation ;
- ❷ en exprimant le vecteur accélération du point ou du centre d'inertie du solide en fonction des dérivées secondes de leur vecteur position ;
- ❸ en projetant les forces dans le repère de projection choisi.

• Les mouvements étudiés sont souvent, dans un premier temps, unidimensionnels. Il vous faut donc présenter une équation différentielle portant sur la seule variable de position pertinente de sorte qu'aient pu être éliminées les réactions inconnues des supports. Une telle équation est ce que l'on désigne fréquemment comme l'équation du mouvement.

### 3.6 Les lois horaires du mouvement

La résolution du système des trois équations différentielles issues de la traduction du principe fondamental ou du théorème de la résultante cinétique et la connaissance des conditions initiales (position et vitesse à l'instant initial) permettent d'exprimer les lois horaires du mouvement étudié du point matériel ou du solide en translation.

### 3.7 L'équation de la trajectoire

Lorsque le temps peut être éliminé entre les lois horaires du mouvement du point matériel, on peut obtenir l'équation de sa trajectoire dans le référentiel d'étude.

## 4. Caractère galiléen des référentiels

### 4.1 Le référentiel de Copernic

Appelé aussi référentiel de Kepler ou héliocentrique, il a pour origine le centre de masse du système solaire et trois axes dirigées vers trois étoiles fixes.

Son caractère galiléen est établi par la conformité des mouvements qu'on y observe avec les conclusions que nous pouvons tirer de notre connaissance des lois de force de la physique et des principes fondamentaux de la mécanique.

### 4.2 Le référentiel géocentrique

Il a pour origine le centre d'inertie de la Terre et des axes fixes par rapport à ceux du référentiel de Copernic. A priori, le mouvement de son origine n'étant pas rectiligne uniforme, ce référentiel n'est pas galiléen dans l'absolu. Cependant, il en constitue une bonne approximation lorsque les phénomènes étudiés durent peu devant la rotation annuelle du centre d'inertie terrestre.

### 4.3 Le référentiel terrestre

Il a pour origine le point de la surface de la Terre où le laboratoire se trouve et trois axes solidaires de la Terre. A cause de la rotation propre de la Terre, il ne peut être considéré comme galiléen que pour des phénomènes dont la durée est petite devant la rotation diurne de notre planète. C'est à lui que l'on se réfère quand on évoque comme référentiel d'étude le « référentiel du laboratoire ».

## 5. Exemples de forces

### 5.1 Les forces fondamentales

- La force d'interaction gravitationnelle de Newton et celle qui en est dérivée à une


échelle modeste de mouvement, le poids :

$$\vec{f}_{m_2 \rightarrow m_1} = -\mathcal{G} m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{M_2 M_1}}{\|\overrightarrow{M_2 M_1}\|^3}$$

où  $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  est la **constante de gravitation universelle**.

Elle est déclinée à la surface d'un astre  $\mathcal{A}$  en  $\vec{P} = m \vec{g}_{\mathcal{A}}$  où  $\vec{g}_{\mathcal{A}}$  est l'accélération de la pesanteur sur l'astre en question.

Sur Terre, cette accélération possède, à nos latitudes, une norme  $g$  égale à  $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

 Dans un problème qui porte sur l'étude de l'interaction gravitationnelle, seule la force d'interaction gravitationnelle doit être recensée dans le bilan des forces, pas le poids ! Cela reviendrait en grande partie à recenser deux fois la force de gravitation !

• **La force électromagnétique de Lorentz** sur une particule ponctuelle de charge  $q$ , animée d'une vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}_g$  galiléen, plongée dans un champ électromagnétique constitué d'un champ électrique  $\vec{E}$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}$  :

$$\vec{f}_L = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}),$$

dont la force électrostatique de Coulomb constitue l'expression statique.

• **La force électrostatique** subie par une charge ponctuelle  $q_1$  située au point  $M_1$  de la part d'une autre charge ponctuelle  $q_2$  située en  $M_2$  est :

$$\vec{f}_{q_2 \rightarrow q_1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_2 M_1}}{\|\overrightarrow{M_2 M_1}\|^3}$$

où le facteur  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{F}^{-1}$  ; elle est identique à la force de Lorentz dans le cas statique en l'absence de champ magnétique.

## 5.2 Les forces phénoménologiques

Elles prennent en compte des actions constatées sur les corps, mais difficilement exprimables en termes d'interactions fondamentales, bien que ces dernières en soient *in fine* les causes. On se contente alors de les exprimer en fonction des variables qui nous sont accessibles et font toujours apparaître des coefficients empiriques. Par exemple :

• **La tension d'un ressort** de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ ,  $\vec{T} = -k(l - l_0) \vec{u}$ .

• **La poussée d'Archimède**  $\vec{\Pi} = -\rho_f V_f \vec{g}$ , où  $\rho_f V_f$  est la masse du fluide déplacé,  $\rho_f$  étant sa masse volumique et  $V_f$  le volume de fluide déplacé.

• **Les forces de frottement fluide** comme la résistance de l'air. De direction et de sens opposés à la vitesse, de norme proportionnelle à une puissance  $n$  de la vitesse, variable en fonction de la gamme de vitesse considérée, elle peut s'exprimer :  $\vec{f} = -\lambda v^{n-1} \vec{v}$ .

On prend souvent  $n = 1$  car cette valeur permet une résolution analytique de l'équation du mouvement et qu'elle reflète d'ailleurs assez fidèlement « aux faibles vitesses » les expériences.

## 5.3 Forces de liaison ou de contact

Elles sont censées modéliser les contacts entre solides.

Il existe très peu de modèles pour ces forces. Parmi eux, les lois de Coulomb du frottement de glissement.

- Soit  $\vec{R} = R_n \vec{n} + R_t \vec{t}$  la force qu'exerce un support quelconque sur le solide dont le mouvement est étudié,  $\vec{n}$  étant le vecteur normal au plan de contact entre les solides, dirigé du support vers le solide et  $\vec{t}$  un vecteur directeur du plan de contact, colinéaire à la vitesse de translation du point de contact  $I$  solide par rapport au support  $\vec{v} = v \vec{t}$  où  $v = \|\vec{v}\| \geq 0$  ;
- si le solide est mobile par rapport au support,  $\vec{R} \cdot \vec{v} < 0$  et  $R_t = -f_d R_n$  où  $f_d$  est le coefficient de frottement de glissement dynamique ;
- s'il y est au repos, alors  $|R_t| < f_s R_n$  où  $f_s$  est le coefficient de frottement statique  $f_d < f_s$ .

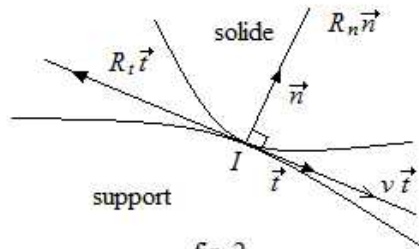


fig. 2

- Lorsqu'elles interviennent dans un modèle, il est nécessaire de supposer le solide en mouvement pour déterminer son équation, de déduire ensuite de l'une des autres projections du principe fondamental de la dynamique les composantes des forces de contact et de vérifier que l'hypothèse du mouvement est fondée, à savoir que la relation  $R_t = -f_d R_n$  est satisfaite par les conclusions des calculs.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Un projectile  $M$  de masse  $m$  est tiré dans le champ de pesanteur uniforme  $\vec{g}$  du haut d'une plateforme de tir avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale.

Établissez les lois horaires du mouvement du point matériel en l'absence de frottement.

Déduisez-en la portée du tir, si le projectile atterrit dans un plan en dénivelé  $H$  par rapport à la plateforme.

Quel angle de tir choisir dans chacun des cas pour obtenir la plus grande portée, la vitesse initiale  $v_0$  du projectile étant fixée ?

**Exercice 2 :** Un pendule simple est constitué d'un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , suspendu par un fil inextensible et sans masse de longueur  $l$  attaché en  $O$ .

On suppose qu'il oscille dans un plan fixe vertical et que sa position y est repérée par l'angle  $\theta(t)$  que fait le fil avec la verticale descendante.

Retrouvez le raisonnement conduisant à l'harmonicité des petites oscillations du pendule.

# 17 Mécanique

## 3. Point de vue énergétique

### 1. Puissance et travail d'une force

#### 1.1 Puissance d'une force

Soit une force  $\vec{f}$  dont le point d'application  $A$  se déplace à la vitesse  $\vec{v}_{A/\mathcal{R}}$  à l'instant  $t$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

La **puissance cinétique** ou **puissance** de la force  $\vec{f}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}_{A/\mathcal{R}}. \quad (17-1)$$

- La dimension de la puissance est le produit de la dimension de la force par celle de la vitesse, soit  $M.L^2.T^{-3}$ .

Son unité est le watt, de symbole W. On a :  $1 \text{ W} = 1 \text{ J.s}^{-1} = 1 \text{ N.m.s}^{-1} = 1 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-3}$ .

 Comme la vitesse dépend du référentiel par rapport auquel elle est mesurée, il en est de même de la puissance.

- Une force est dite **motrice** dans le référentiel  $\mathcal{R}$  si sa puissance y est positive, c'est à dire si l'angle formé par les vecteurs force et vitesse est aigu ; sinon, la force est dite **résistante**.

Si la force est perpendiculaire au déplacement de son point d'application, sa puissance cinétique est nulle.

#### 1.2 Travail d'une force

- On appelle **travail élémentaire** d'une force  $\vec{f}$  dont le point d'application  $A$ , animé de la vitesse  $\vec{v}_{A/\mathcal{R}}$  à l'instant  $t$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , s'est déplacé entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , la quantité :

$$\delta W(\vec{f}) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{f}) dt = \vec{f} \cdot \vec{v}_{A/\mathcal{R}} dt. \quad (17-2)$$

Comme  $\vec{v}_{A/\mathcal{R}} dt$  représente par ailleurs le déplacement élémentaire  $d\vec{OA} = d\vec{r}$  du point d'application de la force, il est fréquent de trouver comme définition du travail élémentaire :

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r}. \quad (17-3)$$

- Le **travail** de la force  $\vec{f}$  entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , entre lesquels le point  $A$  est passé de la position  $A_1$  à la position  $A_2$ , est :

$$W_{A_1 \rightarrow A_2}(\vec{f}) = \int_{A_1}^{A_2} \delta W(\vec{f}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{f}) dt = \int_{A_1}^{A_2} \vec{f} \cdot d\vec{r}. \quad (17-4)$$

- La dimension du travail est le produit de la dimension de la force par celle du déplacement, soit  $M.L^2.T^{-2}$ . Son unité est le joule, de symbole J. On a :  $1 \text{ J} = 1 \text{ N.m} = 1 \text{ kg.m.s}^{-2}$ , soit le déplacement d'une force de un newton sur une distance de un mètre, la force et le déplacement étant colinéaires.

### 1.3 Comment calculer un travail ?

- C'est la forme (17-2) qui décrit le procédé opératoire par lequel exprimer le travail élémentaire puis le travail d'une force.

Prenons un repère de coordonnées cartésiennes  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ; dans une des situations les plus complexes où la force dépendrait de la position  $\vec{r}$  et du temps  $t$ , comme c'est le cas pour les forces de champ :

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = f_x(\vec{r}, t) \vec{e}_x + f_y(\vec{r}, t) \vec{e}_y + f_z(\vec{r}, t) \vec{e}_z,$$

si le déplacement du point d'application  $A$  de la force a pour loi horaire

$$\vec{OA}(t) = \vec{r}_A(t) = x_A(t) \vec{e}_x + y_A(t) \vec{e}_y + z_A(t) \vec{e}_z,$$

et pour vitesse dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{v}_{A/\mathcal{R}}(t) = \dot{\vec{r}}_A(t) = \dot{x}_A(t) \vec{e}_x + \dot{y}_A(t) \vec{e}_y + \dot{z}_A(t) \vec{e}_z,$$

alors le travail élémentaire s'écrit très complètement :

$$\delta W(\vec{f}) = (f_x(\vec{r}_A(t), t) \dot{x}_A(t) + f_y(\vec{r}_A(t), t) \dot{y}_A(t) + f_z(\vec{r}_A(t), t) \dot{z}_A(t)) dt,$$

expression de la forme  $\delta W(\vec{f}) = F(t) dt$ .

- Le travail entre les instant  $t_1$  et  $t_2$  (ou entre les positions  $A_1$  et  $A_2$ ) est alors :

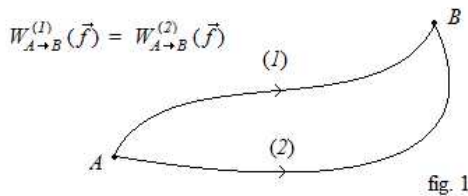
$$W_{A_1 \rightarrow A_2}(\vec{f}) = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$$

qui se calcule comme une intégrale normale (si l'on peut !).

## 2. L'énergie potentielle

### 2.1 Forces conservatives

Les travaux de certaines forces calculés le long de trajectoires différentes entre deux points  $A$  et  $B$  quelconques sont égaux et ne dépendent que des positions des points  $A$  et  $B$ . On appelle de telles forces des **forces conservatives**.



### 2.2 Définition de l'énergie potentielle

- Pour une force conservative, il est possible de trouver une fonction  $\mathcal{E}_p(x, y, z)$  ou  $\mathcal{E}_p(M)$  des coordonnées de la position de son point d'application  $M$  telle que le travail entre les points  $A$  et  $B$  de la force soit égal à la différence des valeurs de la fonction  $\mathcal{E}_p$  pour les coordonnées du point de départ  $A$  et du point d'arrivée  $B$  :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B) = -\Delta_{A \rightarrow B} \mathcal{E}_p \quad (17-5)$$

- La fonction  $\mathcal{E}_p$  des coordonnées de position est appelée l'**énergie potentielle dont dérive la force  $\vec{f}$** . Pour un trajet infinitésimal, la relation précédente se traduit par :

$$\delta W_{M \rightarrow M+d\vec{M}}(\vec{f}) = -d\mathcal{E}_p(M) \quad (17-6)$$

en notant  $d\vec{M}$  le déplacement élémentaire du point  $M$  à un point infiniment voisin. (17-6) fournit implicitement le procédé de détermination de la fonction énergie potentielle.

- La dimension d'une énergie potentielle est la même que celle du travail  $M.L^2.T^{-2}$  et son unité est la même, le joule.

## 2.3 L'énergie potentielle de pesanteur

- Le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  d'un corps de masse  $m$  dans le champ de pesanteur considéré comme uniforme, donc indépendant des coordonnées de position est une force conservative.

Soit un repère de coordonnées cartésiennes  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  tel que  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ ,  $\vec{e}_z$  indiquant la verticale ascendante.

Soit  $d\vec{M} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$ , le déplacement élémentaire du point d'application  $G$  du poids, alors l'application de (17-3) et la définition (17-6) permettent d'écrire :

$$\delta W_{M \rightarrow M+d\vec{M}}(\vec{P}) = -d\mathcal{E}_{pp}(M) = -mgdz = d(-mgz)$$

d'où l'énergie potentielle de pesanteur :

$$\mathcal{E}_{pp}(M) = mgz + cte. \quad (17-7)$$

- Une énergie potentielle est toujours définie à une constante arbitraire près. Cette constante est définie par le choix du point en lequel on décide de donner une certaine valeur à l'énergie potentielle.
- Dans une région de l'espace où il est légitime de considérer la direction et l'intensité du champ de pesanteur comme constantes, on retiendra que l'énergie potentielle de pesanteur est égale au produit de la norme du poids par l'altitude, cette dernière étant définie de manière positive vers le haut à partir de n'importe quel niveau de référence.
- L'expression de l'énergie potentielle de pesanteur peut s'écrire, sans référence à un repère de projection quelconque :

$$\mathcal{E}_{pp}(M) = -m\vec{g} \cdot \vec{OM} + cte. \quad (17-8)$$

## 2.4 Énergie potentielle élastique

- La tension  $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}$  d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  est aussi une force conservative.

Supposons que l'extrémité fixe du ressort soit en  $O$  et que  $\vec{u} = \vec{e}_x$ . La longueur  $l$  du ressort se confond alors avec la position  $x$  du point d'application de la tension sur le corps qui est placé à son autre extrémité  $M$ . L'application de (17-3) et la définition (17-6) conduisent à :

$$\delta W_{M \rightarrow M+d\vec{M}}(\vec{T}) = -k(x - l_0)dx = -d\mathcal{E}_{pe}(M),$$

soit, dans le cadre fixé :

$$\mathcal{E}_{pe}(M) = \frac{1}{2} k (x_M - l_0)^2 + cte.$$

- Cette expression se généralise en :

$$\mathcal{E}_{pe}(M) = \frac{1}{2} k (l_M - l_0)^2 + cte \quad (17-9)$$

où  $l_M$  est la longueur du ressort entre ses extrémités, quelle que soit son orientation dans l'espace, pourvu qu'il soit droit.

Il est habituel de prendre la constante égale à 0 lorsque le ressort est détendu, donc lorsque sa longueur est égale à sa longueur à vide.

## 2.5 Énergie potentielle des forces de champ en $\frac{1}{r^2}$

• La force d'attraction universelle ou la force électrostatique de Coulomb sont deux forces ayant la même forme. Si l'on suppose qu'est fixée en  $O$  une masse ponctuelle  $m_O$  ou une charge électrique ponctuelle  $q_O$ , alors la force qu'elle exerce sur une autre masse  $m_M$  ou une autre charge électrique  $q_M$  située en  $M$  tel que  $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$  en coordonnées sphériques, a la forme :

$$\vec{f}_{O \rightarrow M} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r$$

avec  $k = -\mathcal{G}m_Om_M$ , ( $\mathcal{G}$  constante de gravitation universelle) pour la force d'attraction ;

ou  $k = \frac{q_Oq_M}{4\pi\epsilon_0}$ , pour la force électrostatique de Coulomb.

• Or, le déplacement élémentaire du point  $M$  en coordonnées sphérique s'écrit :

$$d\vec{M} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi,$$

d'où :

$$\delta W_{M \rightarrow M+d\vec{M}}(\vec{f}_{O \rightarrow M}) = \frac{k}{r^2} dr = -d\mathcal{E}_{pf}(M)$$

soit :

$$\mathcal{E}_{pf}(M) = \frac{k}{r} + cte. \quad (17-10)$$

• Il est habituel de prendre l'énergie potentielle nulle à l'infini, ce qui implique que la constante soit elle-même nulle.

## 2.6 Composante d'une force conservative et énergie potentielle

Une force conservative n'ayant qu'une seule composante non nulle sur l'un des vecteurs de base du repère de projection, par exemple  $\vec{f}(x) = f_x(x)\vec{e}_x$ , a une énergie potentielle associée égale, d'après la relation (17-6), à :

$$f_x(x) dx = -d\mathcal{E}_p(x) \quad \text{soit} \quad \frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x) = -f_x(x). \quad (17-11)$$

## 3. L'énergie cinétique

### 3.1 Définition

• Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , l'énergie cinétique d'un point matériel de masse  $m$  animé d'une vitesse  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$  est par définition :

$$\mathcal{E}_c(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m \vec{v}_{M/\mathcal{R}}^2 \quad (17-12)$$

- La dimension de l'énergie cinétique est  $M.L^2.T^{-2}$ , comme le travail et comme l'énergie potentielle. Son unité est donc le joule.
- L'énergie cinétique trouve son origine dans le produit scalaire de la vitesse du point matériel et de la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement du point matériel :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \cdot \frac{d}{dt} (m \vec{v}_{M/\mathcal{R}}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v}_{M/\mathcal{R}}^2 \right). \quad (17-13)$$

### 3.2 Additivité de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique dans un référentiel  $\mathcal{R}$  d'un ensemble  $\mathcal{S}$  de points matériels  $\{M_i\}$  de masses respectives  $\{m_i\}$  animés des vitesses  $\{\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}\}$  où  $i = 1, \dots, N$ , est la somme des énergies cinétiques de chacun des points :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}^2 \quad (17-14)$$

### 3.3 Solide en translation

- Le solide en translation offre un cas particulier de la propriété précédente. Les points matériels sont alors solidaires et tous animés de la même vitesse dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , en l'occurrence celle du centre d'inertie du solide,  $\vec{v}_{G/\mathcal{R}}$ .

La mise en facteur du carré de cette vitesse fait apparaître la masse  $M_S = \sum_{i=1}^N m_i$ , et l'énergie cinétique du solide s'écrit alors :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} M_S \vec{v}_{G/\mathcal{R}}^2 \quad (17-15)$$

- Sous l'hypothèse d'un mouvement de translation, l'énergie cinétique du solide a la forme de celle d'un point matériel  $G$  de masse  $M_S$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , ce qui autorisera un manie-ment similaire à celui que l'on fera de l'énergie cinétique d'un point matériel unique.

### 3.4 Solide en rotation

- Un second cas particulier est celui du solide en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ . Nous avons vu (cf. (15-6)) que la vitesse d'un de ses points  $M_i$  quelconque a la forme  $r_{M_i} \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta$  où  $r_{M_i}$  est la distance de  $M_i$  à l'axe de rotation  $\Delta$  et où la vitesse angulaire  $\dot{\theta}(t)$  autour de cet axe est commune à tous les points. L'élévation au carré des vitesses et la mise en facteur de  $\dot{\theta}^2(t)$  permet d'écrire :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N m_i r_{M_i}^2 \right) \dot{\theta}^2(t)$$

- La somme entre parenthèse dans l'expression précédente définit complètement le moment cinétique dans son mouvement de rotation pure autour de l'axe fixe. On l'appelle le **moment cinétique du solide autour de  $\Delta$** , noté  $J_\Delta$ . L'énergie cinétique du solide s'écrit ainsi :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2(t) \quad \text{où} \quad J_\Delta = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2. \quad (17-16)$$

- Le moment cinétique a pour dimension  $M L^2$ . Son unité est le  $\text{kg.m}^2$ .



## 4. Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétiques

### 4.1 Théorème de la puissance cinétique

*Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  est égale à la somme des puissances cinétiques dans  $\mathcal{R}_g$  des forces s'exerçant sur lui.*

- L'application au point  $M$  du principe fondamental de la dynamique conduit à :

$$\frac{d}{dt} (m \vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}) = \sum_k \vec{f}_k$$

qui, multipliée par la vitesse de  $M$  dans  $\mathcal{R}_g$ , et en utilisant la relation (17-13) donne la formulation mathématique du théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(M/\mathcal{R}_g) = \sum_k \mathcal{P}_{\mathcal{R}_g}(\vec{f}_k). \quad (17-17)$$

### 4.2 Théorème de l'énergie cinétique

*Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  où il se trouve respectivement en  $M_1$  et  $M_2$  est égale à la somme des travaux dans  $\mathcal{R}_g$  des forces s'exerçant sur lui le long du chemin parcouru de  $M_1$  à  $M_2$ .*

- Le théorème énoncé résulte de l'intégration par rapport au temps entre  $t_1$  et  $t_2$  de la relation mathématique traduisant celui de la puissance cinétique (17-17) :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(M/\mathcal{R}_g) dt = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{\mathcal{R}_g}(\vec{f}_k) dt,$$

soit, d'après (17-2) et (17-4) et en notant :

$$\Delta_{M_1 \rightarrow M_2} \mathcal{E}_c(M/\mathcal{R}_g) = \mathcal{E}_{c,2}(M/\mathcal{R}_g) - \mathcal{E}_{c,1}(M/\mathcal{R}_g)$$

où  $\mathcal{E}_{c,1}(M/\mathcal{R}_g)$  (resp.  $\mathcal{E}_{c,2}(M/\mathcal{R}_g)$ ) est l'énergie cinétique du point  $M$  à l'instant  $t_1$  (resp.  $t_2$ ) lorsqu'il a atteint le point  $M_1$  (resp.  $M_2$ ) alors :

$$\Delta_{M_1 \rightarrow M_2} \mathcal{E}_c(M/\mathcal{R}_g) = \sum_k W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{f}_k). \quad (17-18)$$

### 4.3 Extension au solide en translation

Pour un solide en translation, dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , les théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétiques énoncés pour le point matériel se transposent comme suit.

#### **Théorème de la puissance cinétique pour un solide en translation**

*Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide  $S$  de masse  $M_S$  et de centre d'inertie  $G$  en translation dans  $\mathcal{R}_g$  est égale à la somme des puissances cinétiques dans  $\mathcal{R}_g$  des forces extérieures s'exerçant sur lui.*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \sum_k \mathcal{P}_{\mathcal{R}_g}(\vec{f}_k^{(ext)})$$

**Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en translation**

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , la variation de l'énergie cinétique d'un solide  $S$  de masse  $M_S$  en translation dans  $\mathcal{R}_g$  entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  où son centre d'inertie  $G$  se trouve respectivement en  $G_1$  et  $G_2$  est égale à la somme des travaux dans  $\mathcal{R}_g$  des forces extérieures s'exerçant sur lui le long du chemin parcouru de  $G_1$  à  $G_2$ .

$$\Delta_{G_1 \rightarrow G_2} \mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \sum_k W_{G_1 \rightarrow G_2} \left( \vec{f}_k^{(ext)} \right).$$

**5. Théorèmes de l'énergie et de la puissance mécaniques****5.1 Séparation des forces conservatives et des autres**

- Il est intéressant de faire la séparation des forces conservatives  $\vec{f}_k^{(c)}$  des autres, non conservatives,  $\vec{f}_{k'}^{(nc)}$ .
- Les travaux des premières sont l'opposé de la variation des énergies potentielles  $\mathcal{E}_{p,k}$  dont ces forces dérivent :  $W_{M_1 \rightarrow M_2} \left( \vec{f}_k^{(c)} \right) = -\Delta_{M_1 \rightarrow M_2} \mathcal{E}_{p,k}$ .

Le théorème de l'énergie cinétique peut être réécrit :

$$\Delta_{M_1 \rightarrow M_2} \left( \mathcal{E}_c(M/\mathcal{R}_g) + \sum_k \mathcal{E}_{p,k} \right) = \sum_{k'} W_{M_1 \rightarrow M_2} \left( \vec{f}_{k'}^{(nc)} \right). \quad (17-19)$$

**5.2 L'énergie mécanique**

- L'expression (17-18) fait apparaître une nouvelle grandeur, ayant les dimensions d'une énergie, soit  $M L^2 T^{-2}$ , l'**énergie mécanique** du point  $M$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , définie comme la somme de l'énergie cinétique du point  $M$  dans ledit référentiel et des énergies potentielles dont dérivent les forces conservatives :

$$\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g) = \mathcal{E}_c(M/\mathcal{R}_g) + \sum_k \mathcal{E}_{p,k}. \quad (17-20)$$

- Comme les énergies potentielles ne sont définies qu'à une constante près, l'énergie mécanique du point matériel n'est elle-même définie qu'à une constante près.

**5.3 Théorème de l'énergie mécanique****Théorème de l'énergie mécanique**

La variation de l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g)$  du point matériel  $M$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  alors que  $M$  passe de  $M_1$  à  $M_2$  est égale à la somme des travaux des seules forces non conservatives auxquelles il est soumis.

$$\Delta_{M_1 \rightarrow M_2} \mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g) = \sum_{k'} W_{M_1 \rightarrow M_2} \left( \vec{f}_{k'}^{(nc)} \right). \quad (17-21)$$

## 5.4 Théorème de la puissance mécanique

### Théorème de la puissance mécanique

La dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g)$  du point matériel  $M$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  à l'instant  $t$  est égale à la somme des puissances cinétiques à ce même instant des seules forces non conservatives auxquelles il est soumis.

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g)(t) = \sum_{k'} \mathcal{P}_{\mathcal{R}_g} \left( \vec{f}_{k'}^{(nc)} \right). \quad (17-22)$$

- Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté sur le point matériel considéré et sur le référentiel d'étude, on peut alléger les notations et écrire :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_m(t) = \sum_{k'} \mathcal{P} \left( \vec{f}_{k'}^{(nc)} \right). \quad (17-23)$$

## 5.5 Extension au solide en translation

Les deux théorèmes précédents se transposent pour le solide en translation dans le référentiel  $\mathcal{R}_g$ . L'énergie mécanique du solide est alors considérée comme étant celle du centre d'inertie  $G$  du solide auquel est affecté toute la masse du solide et ayant pour énergie potentielle la somme des énergies potentielles des forces conservatives s'appliquant au solide.

## 6. Étude d'un système conservatif

### 6.1 Définition

Un système, qu'il s'agisse d'un point matériel ou d'un solide en translation, est dit **conservatif** s'il n'est soumis qu'à des forces conservatives.

Leur résultante  $\sum_k \vec{f}_k^{(c)}$  est associée à une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p = \sum_k \mathcal{E}_{p,k}$ , la force  $\vec{f}_k^{(c)}$  étant associée à l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_{p,k}$ .


### 6.2 Propriété

- D'après le théorème de la puissance mécanique, l'absence de forces non conservatives s'exerçant sur le système implique que :

*L'énergie mécanique d'un système conservatif dans un référentiel galiléen est constante au cours du temps.*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g)(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}_m(G/\mathcal{R}_g)(t) = 0$$

- Cette constante,  $\mathcal{E}_{m,0}$ , est déterminée, par exemple, par la valeur de l'énergie cinétique du système à l'instant  $t_0$  où débute l'étude de son mouvement et la valeur de son énergie potentielle, fonction des coordonnées de la position du point matériel  $M$  ou du centre d'inertie  $G$  pour un solide en translation où il se trouve à cet instant  $t_0$ .

 La traduction explicite des deux relations précédentes est souvent une voie plus simple à utiliser pour trouver l'équation du mouvement du point matériel ou du centre d'inertie lorsque son mouvement est unidimensionnel.

- Lorsque le système est conservatif, on appelle l'énergie mécanique une **intégrale première du mouvement**.

### 6.3 Cas d'un mouvement à un degré de liberté

• Soit un point matériel  $M$  de masse  $m$  ou le centre d'inertie  $G$  d'un solide en translation dans un référentiel galiléen, affecté de la même masse, repéré dans un repère de projection adéquat du référentiel par une seule coordonnée, son abscisse  $x(t)$  par exemple, de sorte que son énergie cinétique soit égale à  $\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)$ . Supposons-le conservatif, d'énergie potentielle totale  $\mathcal{E}_p(x)$ . Son énergie mécanique dans le référentiel galiléen est égale à :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_{m,0}.$$

• L'énergie cinétique étant une grandeur positive ou nulle, les seules positions d'abscisses  $x$  accessibles par  $M$  ou  $G$  au cours de leur mouvement sont celles pour lesquelles :

$$\mathcal{E}_p(x) \leq \mathcal{E}_{m,0}.$$

• Imaginons que le graphe de l'énergie potentielle en fonction de  $x$  soit celui de la figure 2 :

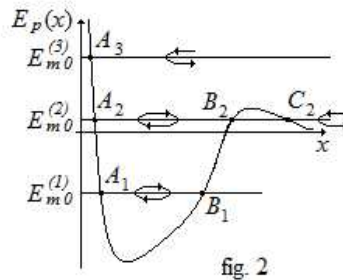


fig. 2

• Diverses possibilités de mouvement apparaissent selon la valeur de l'énergie mécanique initiale :

– si  $\mathcal{E}_{m,0} = \mathcal{E}_{m,0}^{(1)}$ , les positions accessibles au point  $M$  sont celles dont les abscisses sont comprises entre  $x_{A_1}$  et  $x_{B_1}$ . La trajectoire est bornée par ces deux extrémités, et son mouvement est périodique.

– si  $\mathcal{E}_{m,0} = \mathcal{E}_{m,0}^{(2)}$ , deux situations sont possibles en fonction des conditions initiales.

Soit l'abscisse initiale de la position du point matériel est comprise entre  $x_{A_2}$  et  $x_{B_2}$  auquel cas le mouvement possède les mêmes propriétés que le précédent. Il est périodique et sa trajectoire est bornée.

Soit l'abscisse initiale de la position du point matériel est supérieure à  $x_{C_2}$ . Sa trajectoire cesse d'être bornée et son mouvement cesse d'être périodique.

– si  $\mathcal{E}_{m,0} = \mathcal{E}_{m,0}^{(3)}$ , le mouvement présente les propriétés du second cas précédent, lorsque l'abscisse initiale est supérieure à  $x_{C_2}$ .

• Deux cas particuliers apparaissent lorsque l'énergie mécanique initiale est égale à  $\mathcal{E}_{m,0}^{(4)}$  ou  $\mathcal{E}_{m,0}^{(5)}$ , valeurs correspondant à des extrema de la courbe de l'énergie potentielle en fonction de l'abscisse  $x$ .

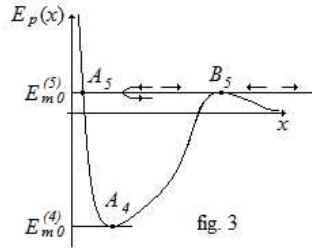


fig. 3

– si  $\mathcal{E}_{m,0} = \mathcal{E}_{m,0}^{(4)}$ , la vitesse du point matériel ne peut qu'être nulle : il est à l'arrêt au point d'abscisse  $x_{A_4}$  et y reste.

– si  $\mathcal{E}_{m,0} = \mathcal{E}_{m,0}^{(5)}$ , la trajectoire est bornée si l'abscisse de la position initiale du point matériel est comprise entre  $x_{A_5}$  et  $x_{B_5}$ , mais le mouvement cesse d'être périodique : dès que le point atteint la position d'abscisse  $x_{B_5}$ , sa vitesse y est nulle et la résultante des forces aussi, d'après (17-11). Le point matériel s'arrête définitivement, de sorte qu'il peut au mieux faire un seul aller-retour.

Si l'abscisse de sa position initiale est supérieure à  $x_{B_5}$ ,  
soit le point matériel se dirige vers les abscisses décroissantes, atteint le point d'abscisse  $x_{B_5}$  et y demeure ; sa trajectoire est alors bornée,  
soit il s'éloigne définitivement vers les abscisses croissantes et sa trajectoire est non bornée.

## 6.4 Les positions d'équilibre et leur stabilité

• L'étude de la courbe de l'énergie potentielle en fonction de l'unique variable de position du mouvement permet de déterminer les positions d'équilibre du point matériel ou du centre d'inertie d'un solide en translation.

Ces positions d'équilibre sont les points où la résultante des forces s'annule. Donc, d'après (17-11), de sont les points en lesquels la dérivée de l'énergie potentielle s'annule, soit les positions de ses extrema.

L'abscisse  $x_0$  de ces points doit satisfaire :

$$\text{positions d'équilibre} \iff \frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_0) = 0. \quad (17-24)$$

• On dit d'une position d'équilibre qu'elle est **stable** si, après avoir écarté le point matériel de sa position d'équilibre d'abscisse  $x_0$ , la force qui apparaît au voisinage du point d'abscisse  $x_0$  tend à le faire revenir vers celui-ci.

Dans le cas contraire, la position d'équilibre est dite **instable**.

Toujours d'après (17-11), pour qu'une position d'équilibre soit stable, il faut donc qu'un léger déplacement du point matériel à droite (resp. à gauche) de sa position d'équilibre y voit naître une force dirigée vers la gauche (resp. la droite).

Ceci ne se produit que si :

$$f_x(x_0 - \varepsilon) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_0 - \varepsilon) \geq 0$$

et

$$f_x(x_0 + \varepsilon) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_0 + \varepsilon) \leq 0$$

ce qui correspond à une dérivée de l'énergie potentielle croissante en  $x_0$ .

• Le critère de stabilité de la position d'équilibre d'abscisse  $x_0$  est donc :

$$\text{stabilité} \iff \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0) \geq 0. \quad (17-25)$$

## 6.5 Petits mouvements autour d'une position d'équilibre

- Soit un système conservatif d'énergie cinétique  $\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)$  et d'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(x)$  possédant une position d'équilibre d'abscisse  $x_0$ .

Pour étudier les petits mouvements du point matériel autour de la position d'équilibre, nous considérons un petit déplacement  $\varepsilon(t)$  au voisinage de  $x_0$  tel que  $x(t) = x_0 + \varepsilon(t)$  avec  $|\varepsilon| \ll x_0$  ;  $\dot{x}(t) = \dot{\varepsilon}(t)$ .

La conservation de l'énergie mécanique du système permet d'écrire que :

$$\frac{1}{2} m \dot{\varepsilon}^2(t) + \mathcal{E}_p(x_0 + \varepsilon) = \text{cte}$$

- L'énergie potentielle en  $x(t)$  est approchée par un développement limité au second ordre en  $\varepsilon$  :

$$\mathcal{E}_p(x_0 + \varepsilon) \approx \mathcal{E}_p(x_0) + \frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_0) \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0) \varepsilon^2.$$

Comme  $x_0$  est une position d'équilibre, la dérivée première de l'énergie potentielle en  $x_0$  est nulle et :

$$\mathcal{E}_p(x_0 + \varepsilon) \approx \mathcal{E}_p(x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0) \varepsilon^2.$$

- Traduisons la conservation de l'énergie mécanique au cours du temps en exprimant la nullité de la dérivée par rapport au temps de l'approximation de l'énergie mécanique que nous pouvons déduire de l'expression précédente :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2} \cdot 2 m \dot{\varepsilon} \ddot{\varepsilon} + \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0) \varepsilon \dot{\varepsilon}.$$

En mettant  $\dot{\varepsilon}$  en facteur, et en affirmant que, s'il y a mouvement,  $\dot{\varepsilon}$  ne peut être en permanence nulle, nous concluons que l'équation précédente est satisfaite pour tout  $t$  si :

$$0 = m \ddot{\varepsilon} + \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0) \varepsilon \quad \text{soit} \quad 0 = \ddot{\varepsilon} + \frac{1}{m} \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0) \varepsilon.$$

- Si la dérivée seconde de l'énergie potentielle par rapport à la variable de position est positive en la position d'équilibre, l'équilibre est stable car l'équation différentielle régissant des petits mouvements autour de la position d'équilibre est alors celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0)}$$

dont la solution est décrite par une fonction sinusoïdale du temps.

- A contrario, si la dérivée seconde est négative, l'équation différentielle est du type :

$$0 = \ddot{\varepsilon} - \alpha^2 \varepsilon \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

dont la solution générale est  $\varepsilon(t) = A e^{-\alpha t} + B e^{\alpha t}$  qui diverge au cours du temps. Le point matériel s'éloigne de la position d'équilibre ; cette dernière est instable.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** On considère une force  $\vec{f}$  qui s'exerce sur une particule matérielle, de la forme :

$$\vec{f}(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{(x - x_B)^2} \vec{e}_x & \text{si } x < x_B \\ -\frac{\beta}{(x - x_B)^2} \vec{e}_x & \text{si } x > x_B \end{cases}$$

où  $x$  est la position à l'instant  $t$  de la particule,  $x_B$  et  $\beta$  étant positifs.

Quelle doit être la dimension de la constante  $\beta$  ?

Déterminez l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(x)$  associée à la force en prenant la convention selon laquelle elle s'annule à l'infini.

**Exercice 2 :** Le point matériel  $M$  de masse  $m$  est assujéti à se déplacer sur l'axe  $Ox$  sous l'effet de la force présentée à l'exercice précédent et de la force de rappel élastique d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0 < x_B$  dont une extrémité est fixe en  $O$ , l'autre constituant le point  $M$ .

Étudiez l'existence de positions d'équilibre et leur stabilité dans les deux domaines  $x \in [l_0; x_B[$  et  $x \in ]x_B; +\infty[$ .

# 18 Mécanique

## 4. Mouvement des particules chargées


### 1. Force de Lorentz

Soit un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  par rapport auquel les phénomènes physiques sont décrits. Il est muni d'un repère de projection qui permet de repérer un point  $M$  quelconque de l'espace par son vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  noté  $\vec{r}$ .

#### 1.1 Postulats

- On postule que les phénomènes électromagnétiques dans  $\mathcal{R}_g$  sont entièrement décrits par la donnée d'un champ électromagnétique constitué d'un champ électrique au point  $\vec{r}$  et à l'instant  $t$ , noté  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et d'un champ magnétique, noté  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  au même point et au même instant.
- On postule que la charge et la masse au repos d'une particule sont indépendantes du référentiel galiléen dans lequel on les mesure.
- On postule enfin qu'une particule  $P$ , supposée ponctuelle et de charge  $q$ , située à l'instant  $t$  au point  $\vec{r}_P(t)$ , et animée à cet instant de la vitesse  $\vec{v}_{P/\mathcal{R}_g}(t)$  dans le référentiel, est soumise, lorsqu'elle est plongée dans le champ électromagnétique, à la **force de Lorentz**, dont l'expression suit :

$$\vec{F}_L = q(\vec{E}(\vec{r}_P(t), t) + \vec{v}_{P/\mathcal{R}_g}(t) \wedge \vec{B}(\vec{r}_P(t), t)) \quad (18-1)$$

 La champ électromagnétique est lui-même le résultat de la position et de l'état de mouvement dans le référentiel des charges électriques qui le créent. Par conséquent, dire que « la particule  $P$  est plongée dans le champ électromagnétique » signifie que l'on suppose son influence négligeable sur la position et l'état de mouvement des autres sources du champ.

#### 1.2 Dimension des champs

- D'après la relation de définition, la dimension d'un champ électrique est celle du rapport d'une force à une charge électrique, soit  $[E] = \text{M.L.I}^{-1}.\text{T}^{-3}$ . Son unité pourrait être le newton par coulomb. Cependant il est plus fréquent de le voir exprimé en volt par mètre,  $\text{V.m}^{-1}$ , les deux unités étant de fait équivalentes.
- La dimension du champ magnétique est celle du rapport d'une force au produit d'une charge et d'une vitesse, soit  $[B] = \text{M.I}^{-1}.\text{T}^{-2}$ . Son unité est le tesla, de symbole T.


#### 1.3 Comparaison avec le poids

- Dans les champs électriques  $E$  aisément obtenus de quelques centaines de volts par mètre, une particule élémentaire ou un ion ayant une charge en valeur absolue égale à  $e$  est soumise à une force électrique d'intensité  $eE \approx 10^{-19} \times 100 \approx 10^{-17}$  N.

Or, le poids d'un proton sur Terre est de l'ordre de  $P = mg \approx 10^{-27} \times 10 \approx 10^{-26}$  N. Le poids de l'électron est naturellement environ 2000 fois inférieur à cette valeur et celui d'un ion totalisant une centaine de protons et de neutrons sera encore dix millions de fois plus faible que la force électrique.



- De même, dans un champ magnétique  $B$  d'une intensité de quelques centièmes de Tesla, une particule élémentaire ou un ion animé d'une vitesse de  $v \approx 1000 \text{ m.s}^{-1}$  sera soumis à une force magnétique d'intensité de l'ordre de  $evB \approx 10^{-19} \times 10^3 \times 10^{-2} \approx 10^{-18} \text{ N}$ .

 Dans tous les cas, les problèmes traitant de particules chargées dans les champs électriques et magnétiques négligeront le poids dans le bilan des forces.

- Enfin, dans les champs électrique et magnétique d'une onde électromagnétique pour lesquels  $E \approx cB$ , la force magnétique qui s'exerce sur une charge élémentaire  $e$  a une intensité de l'ordre de  $evB \approx e(v/c)E$ , d'intensité comparable à la force électrique  $eE$  pour les seules particules relativistes.

## 1.4 Puissance de la force de Lorentz

- Soit une particule de charge  $q$ , animée d'une vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen et plongée dans un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  dans le même référentiel. La particule est soumise à la force de Lorentz  $q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ . Sa puissance cinétique  $\mathcal{P}$  dans le référentiel d'étude est :

$$\mathcal{P} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}. \quad (18-2)$$

- Ce résultat signifie que la force de Lorentz ne peut apporter de l'énergie à une particule chargée que par l'intermédiaire d'un champ électrique, d'après le théorème de la puissance cinétique (cf. fiche 17 §4). Le champ magnétique ne peut modifier seul l'énergie cinétique de la particule.

## 2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme

### 2.1 Champ électrostatique uniforme

- Un champ électrostatique uniforme est un champ électrique indépendant du temps (caractère électrostatique)  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})$ , et indépendant du point de l'espace où l'on se situe (caractère uniforme) ce qui ne nécessite que la connaissance du vecteur  $\vec{E}_0$  pour décrire le champ électrique en question :  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0$ .
- Un moyen simple et convenable de réaliser un tel champ est d'appliquer une tension continue  $U$  entre deux plaques métalliques parallèles entre elles et en vis-à-vis, dont les dimensions caractéristiques sont grandes devant la distance  $d$  les séparant :

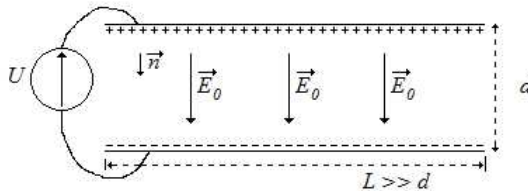


fig. 1

Le champ électrique est à peu près uniforme dans l'espace entre les plaques. Il a une direction perpendiculaire à elles et il est dirigé de la plaque portée au potentiel électrique le plus élevé vers celle de potentiel électrique le plus bas.

Son intensité est convenablement approchée par :

$$\vec{E}_0 = \frac{U}{d} \vec{n} \quad (18-3)$$

$\vec{n}$  étant le vecteur unitaire normal aux plaques dirigé en sens contraire de la flèche de convention de tension entre les plaques. À l'extérieur du volume délimité par les plaques, le champ électrostatique peut alors être considéré comme nul.

- Le champ électrostatique créé par ce dispositif cesse d'être uniforme si l'on se rapproche du bord des plaques.

## 2.2 Équation du mouvement

- Le référentiel de l'étude est supposé galiléen et possède un repère de projection  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

Dans une région autour de l'origine  $O$  règne un champ électrostatique uniforme qu'un choix adéquat des directions de projection permet d'écrire  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$ .

Une particule  $P$  de charge  $q$  et de masse  $m$  est injectée en  $O$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{e}_x + v_0 \sin \alpha \vec{e}_y$  à l'instant initial  $t = 0$ .

- La force de Lorentz  $\vec{f}_L$  se résume à la force électrostatique  $q \vec{E}_0$  et est considérée comme la seule force s'exerçant sur la particule, son poids étant négligé. Si l'on suppose que les vitesses  $\vec{v}(t)$  atteintes par la particule dans le référentiel d'étude demeurent non relativistes (fixons-nous comme critère  $|\vec{v}| < \frac{c}{10}$ ), le principe fondamental de la dynamique (la seconde loi de Newton) permet d'écrire :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E}_0 \quad \text{soit} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{E}_0.$$

- Le mouvement est donc un mouvement uniformément accéléré de vecteur-accélération constant égal à  $\frac{q}{m} \vec{E}_0$ .

Après projection du principe fondamental de la dynamique sur les vecteurs du repère et intégration des relations obtenues, en tenant compte des conditions initiales, les loi horaires du mouvement de la charge s'en déduisent :

$$\overrightarrow{OP} : \begin{cases} \frac{q E_0}{2m} t + (v_0 \cos \alpha) t \\ (v_0 \sin \alpha) t \\ 0 \end{cases}$$

## 2.3 Trajectoire de la particule

- Si  $\alpha = 0$ , la vitesse initiale de la particule est colinéaire au champ électrique et sa trajectoire est alors une portion de droite.
- Si  $\alpha \neq 0$ , la vitesse initiale et le champ ne sont plus colinéaires et sa trajectoire est alors une portion de parabole incurvée dans la direction de l'accélération.

## 2.4 Bilan énergétique

- Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre l'instant initial où la particule est en  $O$  avec la vitesse  $\vec{v}_0$  et un instant ultérieur  $t$  quelconque, où elle est en  $M$  avec une vitesse  $\vec{v}(t)$ , donne :

$$\frac{1}{2} m \vec{v}^2(t) - \frac{1}{2} m \vec{v}_0^2 = \mathcal{W}_{O \rightarrow M}(q \vec{E}_0)$$

Or :

$$\mathcal{W}_{O \rightarrow M}(q \vec{E}_0) = \int_O^M q \vec{E}_0 \cdot d\vec{r} = q \vec{E}_0 \cdot \overrightarrow{OM}$$

quantité qui ne dépend que de la position initiale  $O$  et de la position  $M$  de la particule. Elle est donc comparable à l'opposé d'une différence de deux termes comme la variation d'une énergie potentielle.

• Nous pouvons donc définir une énergie potentielle électrostatique de la particule dans le champ extérieur  $\vec{E}_0$  égale à :

$$\mathcal{E}_{p,elec} = qV(M) + cte = -q \vec{E}_0 \cdot \overrightarrow{OM} + cte \quad (18-4)$$

pour un champ électrostatique uniforme. Ainsi,

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = q (V(O) - V(M))$$

$V(O) - V(M)$  étant la différence de potentiel électrostatique entre  $O$  et  $M$ .

• Cette expression mathématique du théorème de l'énergie cinétique fait dire qu'une particule chargée positivement, accélérée dans la différence de potentiel électrostatique  $V(O) - V(M)$  se dirige vers les potentiels décroissants alors qu'une charge négative va spontanément vers les potentiels croissants. En la transformant en :

$$\frac{1}{2} m v^2 + qV(M) + cte = \frac{1}{2} m v_0^2 + qV(O) + cte,$$

on met en évidence le caractère conservatif de la situation.

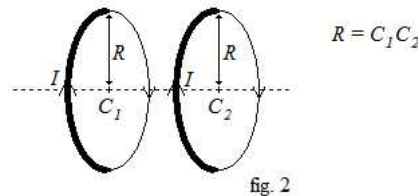
### 3. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme

#### 3.1 Champ magnétostatique uniforme

• Un champ magnétostatique uniforme est un champ magnétique indépendant du temps (caractère magnétostatique)  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r})$ , et indépendant du point de l'espace où l'on se situe (caractère uniforme) ce qui ne nécessite que la connaissance du vecteur  $\vec{B}_0$  pour décrire le champ magnétique en question :  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0$ .

• Un moyen simple et convenable de réaliser un tel champ dans une région finie de l'espace est le dispositif dit des **bobines de Helmholtz**.

Deux bobines circulaires plates de rayons  $R$  parallèles entre elles et dont les centres sont distants de  $R$ , la droite joignant les centres étant perpendiculaire au plan des bobines, parcourues, dans le même sens par un courant électrique d'intensité  $I = cte$ , créent dans la zone située autour du milieu de  $[C_1, C_2]$  un champ magnétostatique à peu près uniforme, parallèle à  $C_1 C_2$  et dirigé de  $C_2$  vers  $C_1$ .



### 3.2 Propriétés du mouvement

- Dans le référentiel du laboratoire, une particule de charge  $q$  et de masse  $m$ , pénétrant dans la région du référentiel où règne un champ magnétostatique  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  conserve son énergie cinétique.

En effet, nous avons vu que la puissance cinétique de la partie magnétique de la force de Lorentz est nulle, donc, d'après le théorème de la puissance cinétique et la particule n'étant supposée être soumise à aucune autre force d'intensité similaire, son énergie cinétique reste constante.

- La force magnétique de Lorentz  $q(\vec{v} \wedge \vec{B}_0)$  est à tout instant perpendiculaire à la vitesse et à la direction du champ magnétostatique. Elle courbe la trajectoire de la particule au point de la rendre circulaire et on admettra que le mouvement de la particule est un mouvement circulaire uniforme de rayon  $R$  et de vitesse égale à celle de son introduction dans la zone où existe le champ magnétostatique.

### 3.3 La pulsation cyclotron

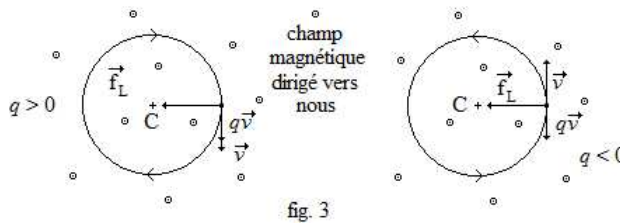
- Avec cette hypothèse, il est possible de trouver un repère de projection de coordonnées cylindriques dans le référentiel du laboratoire tel que le vecteur vitesse de la particule y soit :  $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$  et son vecteur accélération  $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$ .

La traduction du principe fondamental de la dynamique donne en projection sur  $\vec{e}_r$  :

$$-mR\dot{\theta}^2 = qR\dot{\theta}B_0 \quad \text{soit} \quad \dot{\theta} = -\frac{qB_0}{m} = -\omega_c. \quad (18-5)$$

- On constate que le principe fournit en fait la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  avec laquelle la particule s'enroule autour des lignes de champ du champ magnétostatique. On la note  $\omega_c$  et on la désigne comme la **pulsation cyclotron** de la particule.

Les particules chargées positivement tournent dans le sens trigonométrique inverse ou horaire ; celles chargées négativement dans le sens trigonométrique autour du champ magnétostatique.



### 3.4 Le rayon de giration

- $R$  se déduit de la vitesse initiale et de  $\omega_c$  :

$$R = \left| \frac{v}{\omega_c} \right| = \left| \frac{mv}{qB_0} \right|. \quad (18-6)$$

- Le rayon de giration est d'autant plus grand que la vitesse de la particule est élevée et d'autant plus petit que l'intensité du champ magnétostatique est forte.

### 3.5 Application : le spectrographe de masse

Cet appareil est un analyseur de particules qui exploite la dépendance du rayon de giration en la masse de la particule chargée.

Des ions plus ou moins lourds sont accélérés linéairement dans une zone où règne un champ électrostatique uniforme, puis ils pénètrent dans une zone où règne un champ magnétostatique uniforme avec une vitesse qui lui est perpendiculaire.

Leurs trajectoires sont alors des demi-cercles dont les rayons sont proportionnels aux racines carrées des masses des particules, pour une même tension accélératrice.

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Comparez les intensités de la force de Coulomb et de la force de gravitation entre deux protons à une distance  $r$  l'un de l'autre. Concluez.

**Exercice 2 :** Vérifiez que l'égalité (18-6) donnant le rayon de la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétostatique en fonction de ses caractéristiques est homogène, c'est-à-dire que le membre de droite a bien la dimension d'une longueur.

# 19 Mécanique

## 5. Dynamique de rotation

### 1. Moments cinétiques

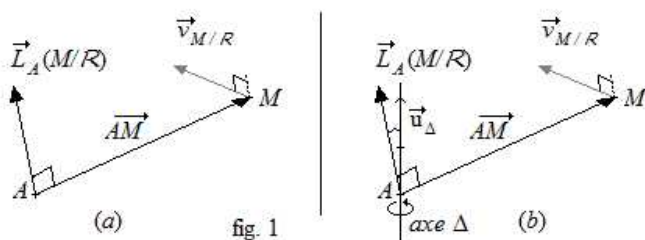
#### 1.1 Définitions

- Soit un point matériel de masse  $m$ , situé en  $M$  à l'instant  $t$  et animé d'une vitesse  $\vec{v}_{M/R}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  au même instant. Soit un point  $A$  du référentiel  $\mathcal{R}$ .

On définit le **moment cinétique en  $A$  du point matériel  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$**  la grandeur vectorielle notée  $\vec{L}_A(M/R)$ , qui est le moment de l'impulsion en  $A$  :


$$\vec{L}_A(M/R) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}_{M/R} = \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{v}_{M/R} \quad (19-1)$$

- La dimension du moment cinétique est le produit des dimensions des grandeurs dont on fait le produit vectoriel, soit  $M.L^2.T^{-1}$ . Son unité est le  $kg.m^2.s^{-1}$  (ou le J.s comme la constante d'action de Planck).



- La figure 1.a montre l'orientation du moment cinétique en  $A$  par rapport aux vecteurs qui servent à son calcul. Le moment cinétique a une direction perpendiculaire au vecteur position de  $M$  par rapport au point  $A$  et à son vecteur vitesse. Son sens est celui donné par la  **règle du tire-bouchon de Maxwell** : on fait « tourner » le vecteur  $\overrightarrow{AM}$  de façon à l'aligner sur le vecteur vitesse en prenant soin d'effectuer une rotation d'angle inférieur à  $\pi$  et on progresse, comme le ferait un tire-bouchon droit, dans le sens du vecteur moment cinétique. Enfin, sa norme est égale au produit des normes des vecteurs position et vitesse et du sinus de l'angle  $\alpha$  entre les vecteurs, compris entre 0 et  $\pi$  :

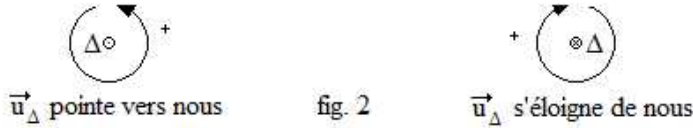
$$\|\vec{L}_A(M/R)\| = \|\overrightarrow{AM}\| \cdot \|\vec{v}_{M/R}\| \cdot \sin \alpha.$$

 Si le mouvement du point matériel est plan et si le point  $A$  appartient au plan de la trajectoire, alors la direction du moment cinétique du point matériel est perpendiculaire au plan de la trajectoire.

- On définit de même le **moment cinétique par rapport à un axe  $\Delta$  du point matériel  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$** , grandeur scalaire notée  $L_{\Delta}(M/R)$ , comme la projection sur la direction  $\vec{u}_{\Delta}$  de  $\Delta$  du moment cinétique du point  $M$  dans  $\mathcal{R}$  en un point  $A$  quelconque appartenant à l'axe  $\Delta$  :

$$L_{\Delta}(M/R) = \vec{u}_{\Delta} \cdot \vec{L}_A(M/R) \quad (19-2)$$

L'orientation de l'axe par le sens choisi pour  $\vec{u}_\Delta$  signifie que les angles de rotation sont comptés positivement lorsque l'on tourne dans le sens trigonométrique autour de l'axe, le vecteur  $\vec{u}_\Delta$  pointant vers nous. La figure 1.b montre la situation en question. La figure 2 présente deux conventions régulièrement adoptée, lorsque l'axe et le vecteur  $\vec{u}_\Delta$  sont perpendiculaires au plan de la feuille :



- Le moment cinétique par rapport à  $\Delta$  est indépendant du choix du point  $A$  pourvu qu'il soit sur l'axe  $\Delta$ .

## 1.2 Additivité des moments cinétiques

Soit un système  $\mathcal{S}$  de  $N$  points matériels positionnés aux points  $(M_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  de masses respectives  $(m_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  et animés respectivement des vitesses  $(\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}})_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

On postule l'additivité des moments cinétiques. Le moment cinétique du système  $\mathcal{S}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  par rapport au point  $A$  ou par rapport à un axe  $\Delta$  est la somme des moments cinétiques de même nature de chacun des points de  $\mathcal{S}$  :

$$\vec{L}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^N \vec{L}_A(M_i/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} \quad (19-3)$$

et

$$L_\Delta(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^N L_\Delta(M_i/\mathcal{R}) = \vec{u}_\Delta \cdot \vec{L}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}). \quad (19-4)$$

## 1.3 Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe

- L'additivité des moments cinétiques par rapport à un axe pour les systèmes de points matériels confère une forme très simple à l'expression du moment lorsque le système est un solide en rotation autour de l'axe  $\Delta$ , pris pour axe  $(O, \vec{e}_z)$  d'un repère de coordonnées cylindriques dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

Décomposons le solide en un système  $\mathcal{S}$  de points matériels dont les vecteurs position et vitesse sont respectivement  $\overrightarrow{OM_i} = r_i \vec{e}_r^{(i)} + z_i \vec{e}_z$  et  $\vec{v}(M_i/\mathcal{R}) = r_i \omega \vec{e}_\theta^{(i)}$  où  $r_i$  est la distance du point  $M_i$  à l'axe et  $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$  la vitesse angulaire du solide autour de  $\Delta$ .

Le choix de  $A$  étant indifférent sur  $\Delta$ , prenons  $A = O$ .

Le moment en  $O$  d'un point  $M_i$  quelconque est ainsi, en appliquant la définition (19-1),

$\vec{L}_O(M_i/\mathcal{R}) = m_i r_i^2 \omega \vec{e}_z + m_i z_i r_i \omega \vec{e}_r^{(i)}$  et sa projection sur  $\vec{u}_\Delta = \vec{e}_z$  conduit à

$$L_\Delta(M_i/\mathcal{R}) = m_i r_i^2 \omega.$$

La somme des moments cinétiques scalaires des points de  $\mathcal{S}$  fait apparaître, après la mise en facteur de  $\omega$ , le **moment d'inertie**  $J_\Delta$ , déjà rencontré dans la relation (17.16) et le moment cinétique par rapport à l'axe  $\Delta$  du système  $\mathcal{S}$  s'écrit alors :

$$L_\Delta(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = J_\Delta \omega(t) = J_\Delta \dot{\theta}(t). \quad (19-5)$$



Cette relation est fondamentale car elle conduira à l'équation du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe lorsque le référentiel sera galiléen.

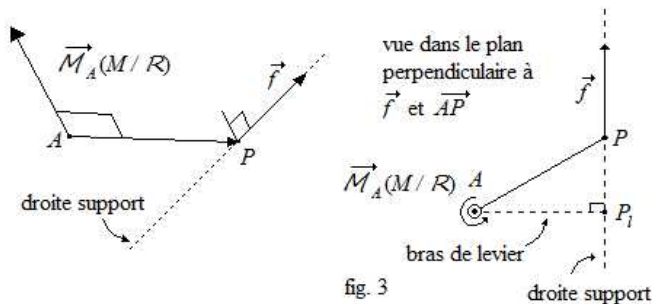
- La forme (19-5) du moment cinétique du solide autour d'un axe fixe trouve son origine dans les constatations suivantes. Bien que les vecteurs vitesse des points soient différents les uns des autres, les points tournent tous autour de  $\Delta$  avec la même vitesse angulaire. La distance de chaque point à l'axe qui intervient dans les deux vecteurs, position et vitesse, se reporte sur l'expression du moment d'inertie.
- Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe, à masse égale, sera d'autant plus faible qu'il sera « ramassé » autour de l'axe. Les dimensions du moment d'inertie,  $M \cdot L^2$ , et de la vitesse angulaire,  $T^{-1}$ , permettent de retrouver la dimension du moment cinétique.
- Enfin, rappelons que la relation (19-5) est tributaire de la convention selon laquelle  $\dot{\theta}(t)$  a une valeur positive lorsque le solide tourne autour de  $\Delta$  dans le sens positif défini par le choix du sens de  $\vec{u}_\Delta$ . (cf. fig. 2).

## 2. Moments d'une force

### 2.1 Moment d'une force par rapport à un point

Soit une force  $\vec{f}$  de point d'application  $P$ . Le **moment de la force en un point**  $A$ , noté  $\vec{M}_A(\vec{f})$ , est égal à :

$$\vec{M}_A(\vec{f}) = \vec{AP} \wedge \vec{f}. \quad (19-6)$$



### 2.2 Moment d'une force par rapport à un axe

Le cadre est le même, mais le point  $A$  appartient à un axe  $\Delta$  de direction  $\vec{u}_\Delta$ . Le **moment de la force par rapport à l'axe**  $\Delta$ , noté  $M_\Delta(\vec{f})$  est défini par :

$$M_\Delta(\vec{f}) = \vec{u}_\Delta \cdot \vec{M}_A(\vec{f}). \quad (19-7)$$

### 2.3 Calcul pratique d'un moment

- La direction du moment par rapport au point  $A$  d'une force  $\vec{f}$  est donnée par la perpendiculaire au plan dirigé par les vecteurs  $\vec{AP}$  et  $\vec{f}$ . Son sens est celui donné par la règle du tire-bouchon de Maxwell.

Sa norme est obtenue en déterminant le **bras de levier** de la force par rapport au point  $A$  (cf. fig. 3). Par définition, le bras de levier est la plus petite distance entre le point  $A$  et la **droite d'action** de la force  $\vec{f}$ , c'est-à-dire la droite de vecteur directeur  $\vec{f}$  passant par  $P$ . Cette distance est donnée par  $d_{bl} = AP_l$  où  $P_l$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite d'action. La norme du moment cinétique est alors  $\|\vec{M}_A(\vec{f})\| = d_{bl} f$  où  $f = \|\vec{f}\|$ .



- La valeur du moment de la force  $\vec{f}$  par rapport à un axe fixe  $\Delta$  est le produit du bras de levier  $d_{bl} = D_{bl}P_{bl}$  de la force par la norme  $f_{eff}$  de sa projection dans le plan perpendiculaire à  $\Delta$  et passant par son point d'application  $P$ . (cf. fig. 4).  $M_{\Delta} = d_{bl} f_{eff}$ .

Si la force tend à faire tourner le solide dans le sens positif fixé par l'orientation de l'axe par  $\vec{u}_{\Delta}$ , le moment est compté positivement, sinon il est compté négativement.

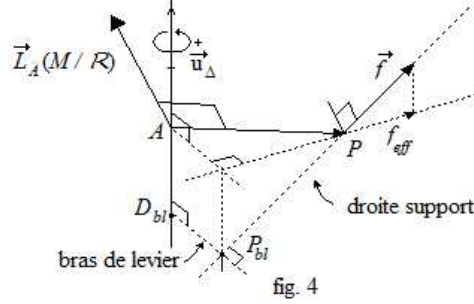


fig. 4

## 2.4 Couple de forces

- On définit un **couple de forces** comme un ensemble de deux forces opposées  $(\vec{f}; -\vec{f})$  ayant des point d'application différents,  $A$  et  $B$ .

La résultante de leur moment par rapport à un point  $C$  est  $\vec{CA} \wedge \vec{f} + \vec{CB} \wedge (-\vec{f}) = \vec{BA} \wedge \vec{f}$ . Ce moment du couple de forces est indépendant du point  $C$  en lequel on le calcule.

On généralise ce résultat à tout système de forces dont la résultante est nulle mais dont le moment en un point quelconque ne l'est pas.

Si la droite  $(AB)$  est colinéaire à la direction des deux forces, leur moment résultant est nul, ce qui est supposé dans le principe de l'action et de la réaction.

## 2.5 Liaison pivot

- Un solide  $S$  est soumis à une **liaison pivot** si ses liaisons aux différents supports n'autorisent qu'un mouvement de rotation autour d'un axe  $\Delta$  (cf. fig.5).

- Les forces élémentaires de liaison qui existent aux surfaces de contact entre le solide et les supports possèdent une résultante  $\vec{R}_l$  et un moment résultant par rapport à l'axe  $\Delta$ ,  $M_{\Delta}^{(l)}$ .

Si ce dernier est nul, la liaison est dite parfaite, ce qui signifie que les contacts n'influent pas sur la vitesse angulaire de rotation du solide  $S$  autour de  $\Delta$ . Ceci peut être obtenu par une bonne lubrification des paliers de contact par des huiles minérales ou des graisses.

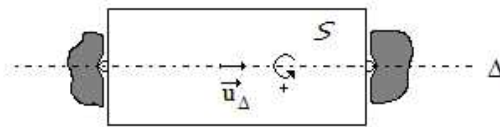


fig. 5

## 3. Théorèmes du moment cinétique

### 3.1 Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe

Soit un point matériel  $M$  de masse  $m$  soumis à la résultante des forces  $\sum_i \vec{f}_i$ ; soit un

référentiel  $\mathcal{R}_g$  et un point  $A$  fixe dans ce référentiel.

*La dérivée par rapport au temps du moment cinétique de  $M$  en  $A$  fixe, dans un référentiel galiléen est égal à la somme des moments en  $A$  des forces qui s'exercent sur  $M$ .*


$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_A (M/\mathcal{R}_g)) = \sum_i \vec{M}_A (\vec{f}_i). \quad (19-8)$$

En effet, la définition du moment cinétique en  $A$  du point matériel  $M$ ,  $\vec{AM} \wedge m \vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}$ , conduit à la dérivée temporelle :  $\vec{AM} \wedge m \vec{a}_{M/\mathcal{R}_g}$  car  $\frac{d}{dt}(\vec{u} \wedge \vec{w}) = \frac{d\vec{u}}{dt} \wedge \vec{w} + \vec{u} \wedge \frac{d\vec{w}}{dt}$  avec  $\frac{d}{dt} \vec{AM} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}$  et  $\frac{d}{dt} \vec{v}_{M/\mathcal{R}_g} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}_g}$ .

Or, le principe fondamental de la dynamique qui s'applique dans  $\mathcal{R}_g$  conduit à :

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \sum_i \vec{f}_i, \text{ d'où une dérivée du moment cinétique en } A \text{ égale à : } \vec{AM} \wedge \left( \sum_i \vec{f}_i \right),$$

$$\text{et, par linéarité du produit vectoriel, à : } \sum_i \vec{AM} \wedge \vec{f}_i = \sum_i \vec{M}_A (\vec{f}_i).$$

 Il est nécessaire de s'assurer que le point  $A$  choisi est bien fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}_g$ , sinon  $\frac{d}{dt} \vec{AM} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}_g} - \vec{v}_{A/\mathcal{R}_g}$ , ce qui modifie l'énoncé du théorème.

### 3.2 Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe

Soit un point matériel dans le même cadre que précédemment. La projection du théorème du moment cinétique en un point  $A$  appartenant à un axe  $\Delta$  fournit le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe  $\Delta$ .

*Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique de  $M$  par rapport à  $\Delta$ , est égale à la somme des moments des forces qui s'exercent sur  $M$  par rapport à l'axe.*

$$\frac{dL_\Delta (M/\mathcal{R})}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta (\vec{f}_i). \quad (19-9)$$

En effet,  $\vec{u}_\Delta$  étant constant par hypothèse, sa dérivée par rapport au temps est nulle et  $\frac{d}{dt} (\vec{u}_\Delta \cdot \vec{w}) = \vec{u}_\Delta \cdot \frac{d\vec{w}}{dt}$  ce qui, combiné avec (19-8) permet de démontrer le résultat.

### 3.3 Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation

L'additivité des moments cinétiques traduite par (19-3) et (19-4) et le principe de l'action et de la réaction conduisent au théorème du moment cinétique appliqué à un solide  $\mathcal{S}$  en rotation autour d'un axe fixe.

Soit  $\{\vec{f}_{i,ext}\}_{i \in I}$  où  $I \subset \mathbb{N}$ , un ensemble de forces ayant une origine extérieure au solide  $\mathcal{S}$ , de points d'application respectifs  $\{M_{i,ext}\}_{i \in I}$ . Soit  $\Delta$  l'axe de rotation du solide orienté par  $\vec{u}_\Delta$  et  $A$  un point quelconque de  $\Delta$ , notons :

$$\mathcal{M}_\Delta (\vec{f}_{i,ext}) = \vec{u}_\Delta \cdot \vec{M}_A (\vec{f}_{i,ext}) = \vec{u}_\Delta \cdot (\vec{AM}_i \wedge \vec{f}_{i,ext}).$$

*La dérivée par rapport au temps du moment cinétique du solide  $S$  par rapport à un axe fixe est égale à la somme des moments des seules forces extérieures exercées sur  $S$  par rapport à cet axe .*

$$\frac{dL_{\Delta}(S/\mathcal{R})}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}_{i,ext}). \quad (19-10)$$

D'après (19-5), la relation précédente s'exprime :

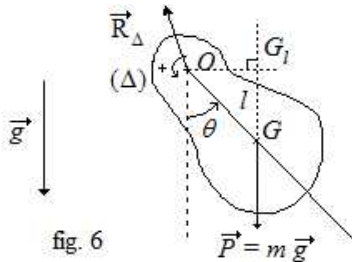
$$J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt}(t) = J_{\Delta} \ddot{\theta}(t) = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}_{i,ext}). \quad (19-11)$$

C'est cette dernière égalité qui fournit l'équation du mouvement du solide autour de son axe de rotation.

## 4. Un exemple d'application : le pendule pesant

### 4.1 Définition

On appelle **pendule pesant** un solide parfait en rotation autour d'un axe  $\Delta = (O, \vec{e}_z)$  fixe dans un référentiel supposé galiléen.  $G$  est son centre d'inertie :  $OG = l$  et la droite  $(OG)$  est perpendiculaire à  $\Delta$  ; l'angle  $\theta(t)$  repère complètement la position du solide à travers celle de sa demi-droite  $[OG)$  par rapport à la verticale descendante ;  $J_{\Delta}$  est son moment d'inertie par rapport à l'axe. Enfin, le solide a une liaison pivot parfaite avec son axe.



### 4.2 Bilan des forces

- Deux forces s'exercent sur le solide : son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ , appliqué en  $G$  et la réaction  $\vec{R}_{\Delta}$  de l'axe de rotation, dont on doit supposer que sa droite d'action coupe l'axe  $\Delta$  de sorte que son moment  $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}_{\Delta})$  par rapport à l'axe soit nul (la liaison étant parfaite).
- La réaction de l'axe  $\Delta$  est en fait une résultante de forces élémentaires de contact entre les pivots solidaires du solide et les supports sur lesquels ceux-là reposent. Il peut survenir que leur moment résultant par rapport à  $\Delta$  ne soit pas nul, par exemple si la liaison n'est pas parfaite, auquel cas, il s'oppose toujours à la rotation du solide.

### 4.3 Mise en équation

- Le caractère supposé galiléen du référentiel permet d'y appliquer le théorème du moment cinétique :

$$J_{\Delta} \ddot{\theta}(t) = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}_{i,ext}) = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}_{\Delta}).$$

En traduisant (19-6) et (19-7) dans un repère de coordonnées cylindriques avec  $\vec{OG} = l\vec{e}_r$ , le moment du poids par rapport à  $\Delta$ , calculé à partir de son moment en  $O$ , est égal à  $\vec{e}_z \cdot (l\vec{e}_r \wedge m\vec{g}) (\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$  soit  $-mgl \sin\theta$ .

On reconnaît dans cette dernière expression  $mg$ , la norme du poids,  $l \sin \theta$ , le bras de levier  $OG_I$  et le signe «  $-$  » indiquant que le poids tend à faire tourner le solide en sens opposé au sens d'orientation choisi.

- L'équation du mouvement s'en déduit :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{mgl}{J_{\Delta}} \sin \theta(t) = 0 \quad (19-12)$$

qui présente les positions d'équilibre évidentes :  $\theta_{eq} = 0$ , stable et  $\theta_{eq} = \pi$ , instable.

#### 4.4 Limite des petites oscillations

À la limite des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable,  $\sin \theta \approx \theta$ , l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{mgl}{J_{\Delta}} \theta(t) = 0 \quad \text{de pulsation propre } \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_{\Delta}}}.$$

#### 4.5 Intégrale première du mouvement

- La multiplication des deux membres de l'équation (19-12) par  $\dot{\theta}(t)$  et  $J_{\Delta}$  donne :

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} \dot{\theta} + m g l \dot{\theta} \sin \theta = 0.$$

Or,  $\ddot{\theta} \dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt}$  et  $\dot{\theta} \sin \theta = -\frac{d(\cos \theta)}{dt}$ . La relation peut donc s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2(t) - m g l \cos \theta \right) = 0$$

qui signifie que la quantité dérivée par rapport au temps est une constante du mouvement, déterminée par les conditions initiales. Par exemple, supposons qu'à l'instant initial nous ayons écarté le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle  $\theta(0) = \theta_0$  et que nous l'ayons lâché sans vitesse initiale,  $\dot{\theta}(0) = 0$ , alors il viendra :

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2(t) - m g l \cos \theta = -m g l \cos \theta_0. \quad (19-13)$$

Dans le membre de gauche de l'égalité, le terme  $\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2(t)$  est, selon (17-16), l'énergie cinétique du pendule en rotation autour de son axe de suspension.

Dans l'autre terme du même membre,  $-l \cos \theta$  représente l'altitude du centre d'inertie  $G$  par rapport au point de suspension, altitude comptée positivement vers le haut.

Par conséquent, d'après (17-7), le terme  $-m g l \cos \theta$  représente une détermination de l'énergie potentielle de pesanteur du pendule, en l'espèce celle dont la valeur est nulle lorsque  $G$  est à la même altitude que  $O$ , donc pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ .

- La relation (19-13) apparaît ainsi comme l'expression de la conservation de l'énergie mécanique et par conséquence comme celle du caractère conservatif du système sous le régime des hypothèses prises au départ.

Sa dérivée par rapport au temps exprime le théorème de la puissance cinétique du pendule dans le même cadre.



*Si la liaison n'avait pas été parfaite, un moment de forces de liaison  $M_{\Delta, liaison}$  de signe contraire à  $\dot{\theta}$  serait venu se rajouter au bilan des moments dans l'express*

## 4.6 Portrait de phase

• Les équations (19-12) et (19-13) n'ont pas de solutions analytiques. On essaie donc d'étudier les propriétés de leurs solutions, sans connaître leurs expressions, à partir de leur **portrait de phase**.

C'est le tracé des lieux des points de coordonnées  $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$  pour diverses conditions initiales. Ce sont des courbes paramétrées par la valeur de l'énergie mécanique initiale  $\mathcal{E}_{m,0}$ , car les coordonnées des points des différentes courbes sont liées par la relation généralisée (19-13) :

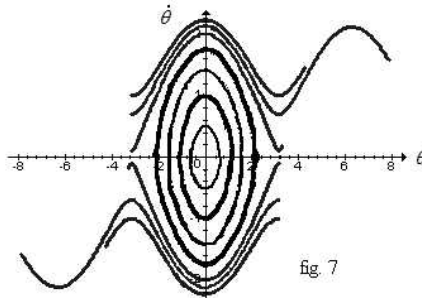
$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta = \mathcal{E}_{m,0} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_0^2 - m g l \cos \theta_0$$

avec une énergie mécanique initiale obligatoirement supérieure à  $-m g l$ .

• On constate sur la figure 7 que deux types de courbes apparaissent :

– des courbes fermées aux faibles valeurs d'énergies mécaniques initiales pour lesquelles le mouvement se limite aux angles  $\theta \in [-\theta_m, \theta_m]$ ,  $\theta_m$  étant défini par  $\cos \theta_m = \cos \theta_0 - \frac{J_{\Delta} \dot{\theta}_0^2}{2 m g l} = A$  à condition que  $A \in [-1, 1]$ . Le mouvement du pendule est une oscillation périodique anharmonique.

– des courbes ouvertes aux valeurs d'énergies telles que  $A < -1$ . Le pendule a été lancé avec une vitesse angulaire suffisamment forte pour que  $\dot{\theta}$  ne s'annule jamais et conserve le signe de  $\dot{\theta}_0$ . Le mouvement est une rotation autour de  $\Delta$  avec une vitesse angulaire maximale lorsque le pendule passe par  $\theta = 0$  et minimale lorsque  $\theta = \pi$ .



## 5. Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétiques en dynamique de rotation

### 5.1 Généralités

• L'exemple du pendule pesant nous a montré comment s'effectuait le passage du théorème du moment cinétique par rapport à un axe au théorème de la puissance mécanique. Cet exemple se généralise.

• La rotation autour d'un axe n'étant qu'un type particulier de mouvement, les théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique (cf. fiche 17 §4) s'appliquent au centre d'inertie  $G$  du solide.

• Nous considérerons donc pour la suite un solide  $S$  en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe avec une vitesse angulaire  $\dot{\theta}(t)$ , dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ . Des forces extérieures  $\{\vec{f}_{i,ext}\}_{i \in I}$ ,

de points d'application respectifs  $\{M_{i,ext}\}_{i \in I}$  s'exercent sur  $S$ , dont les moments par rapport à l'axe sont  $\{\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}_{i,ext})\}_{i \in I}$ .

## 5.2 Résultats intermédiaires

- La multiplication par  $\dot{\theta}(t)$  du moment d'une force  $\vec{f}$  de point d'application  $M$  par rapport à  $\Delta$  est égale à la puissance cinétique de la force. Soit  $A$  fixe appartenant à  $\Delta$  :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) \dot{\theta}(t) = \vec{u}_\Delta \cdot (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}) \dot{\theta}(t) = \vec{f} \cdot (\dot{\theta}(t) \vec{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{AM}) = \vec{f} \cdot \vec{\nabla}_{M/\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{f})$$

où l'on a utilisé la permutation circulaire des termes dans le produit mixte, soit :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}),$$

l'expression (15-6) de la vitesse d'un point en rotation autour d'un axe et la définition de la puissance cinétique d'une force (17-1).

- Par ailleurs,  $J_\Delta \ddot{\theta} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2(t) \right) = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(S/\mathcal{R})$ , d'après l'expression (17-16) de l'énergie cinétique d'un solide en rotation.

## 5.3 Équivalence des théorèmes

*Les théorèmes du moment cinétique appliqué à un solide en rotation par rapport à un axe fixe, de la puissance et de l'énergie cinétique sont équivalents.*

L'équivalence découle des résultats intermédiaires précédents et de l'expression du théorème du moment cinétique par rapport à un axe :

$$J_\Delta \ddot{\theta}(t) = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}_{i,ext}), \quad (19-11)$$

multipliée par  $\dot{\theta}$  donne :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \sum_i \dot{\theta} \cdot \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}_{i,ext}) = \sum_i \mathcal{P}_{\mathcal{R}_g}(\vec{f}_{i,ext})$$

qui n'est autre que le théorème de la puissance cinétique. Son intégration par rapport au temps entre deux instants conduit au théorème de l'énergie cinétique.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Montrez que le moment par rapport à un axe  $\Delta$  est effectivement indépendant du choix du point  $A$  sur l'axe.

**Exercice 2 :** Soit un solide  $S$ , de masse  $M$ , de moment d'inertie  $J$  par rapport à l'axe fixe horizontal  $\Delta$  autour duquel il est en rotation dans un référentiel supposé galiléen. Le centre d'inertie  $G$  du solide est situé sur l'axe  $\Delta$ . L'angle  $\theta(t)$  mesure l'écart entre la position du solide à un instant  $t$  donné et une position donnée. La liaison pivot entre le solide et ses supports fait apparaître des frottements qui se manifestent par un couple de moment par rapport à  $\Delta$  constant, égal  $-\mathcal{M}_f$  et un couple de frottement fluide proportionnel à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , de coefficient de proportionnalité  $\lambda$ , vient le freiner. Le solide est initialement au repos dans le référentiel. Un couple moteur de moment par rapport à  $\Delta$  égal à  $\mathcal{M}_m$  met en mouvement le solide.

1. Quels sont les signes respectifs de  $\mathcal{M}_f$  et  $\mathcal{M}_m$  pour que le système tourne dans le sens de rotation autour de  $\Delta$  conventionnellement choisi ?
2. Déterminez l'équation du mouvement du solide  $\mathcal{S}$ .
3. Déduisez-en l'évolution de la vitesse angulaire au cours du temps. Commentez le rôle des différents paramètres.

# 20 Mécanique

## 6. Champs de force centrale

### 1. Champs de force centrale

#### 1.1 Définition

On appelle **champ de force centrale** un champ de force créé par une source, le **centre de force**, qui exerce sur tout point une force dont la direction est portée par la droite joignant la source au point en question et dont l'intensité ne dépend que de la distance du point à la source.

#### 1.2 Traduction mathématique

La source est située à l'origine  $O$  d'un repère de projection de coordonnées sphériques. Un point matériel est situé en  $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{e}_r$ . La force à laquelle le point matériel est soumis prend alors la forme :

$$\vec{f}_c(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r. \quad (20-1)$$

#### 1.3 Énergie potentielle d'interaction

- Soit une force centrale dont la projection de la force  $f(r)$  est connue.

Cette force dérive d'une énergie potentielle car le travail élémentaire  $\delta W(\vec{f}_c)$  lors d'un déplacement  $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$  entre  $\vec{r}$  et  $\vec{r} + d\vec{r}$  est égal, d'après (17-3), à  $f(r) dr$ .

- Ainsi, en supposant la fonction  $f$  intégrable, il existe une fonction de  $r$ ,  $\mathcal{E}_p$ , telle que  $f$  soit l'opposé de la dérivée de  $\mathcal{E}_p$  par rapport à  $r$ .  $\mathcal{E}_p(r)$  est l'énergie potentielle dont dérive la force  $\vec{f}_c(r)$  :

$$\vec{f}_c(r) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}(r)\vec{e}_r \quad (20-2)$$

#### 1.4 Exemples

- Les forces électrostatique de Coulomb et d'attraction universelle de Newton sont deux exemples de forces centrales, dont l'intensité varie comme  $r^{-2}$ . Elles ont des propriétés particulières étudiées dans la fiche 21.
- Les interactions de type coulombien entre un ion et un dipôle mobile conduisent à une force centrale moyenne variant comme  $r^{-5}$ .

De même, ces interactions contrebalancées par l'agitation thermique donnent lieu à des forces moyennes centrales en  $r^{-7}$  entre les entités en interaction : forces de Keesom entre deux dipôles mobiles, de Debye entre un dipôle mobile et une molécule non polaire fixe, de London entre molécules non polaires fixes, ...



## 2. Autour du moment cinétique


### 2.1 Constance du moment cinétique

Soit une particule ponctuelle située au point  $M$ , de masse  $m$ , soumise au seul champ de force centrale  $\vec{f}_c(r) = f(r)\vec{e}_r$  de centre de force fixe en  $O$ . le mouvement de  $P$  est étudié dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ .

L'application au point  $O$  du théorème du moment cinétique de la particule  $M$  dans  $\mathcal{R}_g$  donne :

$$\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g)}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_O(\vec{f}_i) = \vec{OM} \wedge \vec{f}_c(r) = r\vec{e}_r \wedge f(r)\vec{e}_r = \vec{0}.$$

Le moment cinétique de la particule dans un référentiel galiléen, exprimé au centre de force est donc constant.

 Cette propriété ne vaut que si le point matériel n'est soumis qu'à la seule force centrale et si le moment cinétique est exprimé au centre de force.

La constance du moment cinétique a les deux conséquences qui suivent.

### 2.2 La planéité du mouvement

- Le moment cinétique étant constant et  $\vec{OM}$  lui étant à tous instants orthogonal par définition, le point matériel se déplace, sous l'effet de la seule force centrale, dans le plan perpendiculaire au moment cinétique initial et passant par le centre de force  $O$ . Ainsi, la trajectoire de  $M$  est plane.

- Soit  $O$  le centre de force du champ de force centrale et  $\vec{\tau} = \vec{OM}$ . La trajectoire de la particule est plane, donc le repère de coordonnées cylindriques dans le référentiel  $\mathcal{R}_g$  d'axe  $Oz$  aligné sur la direction du moment cinétique est le plus commode. Ainsi  $\vec{\tau} = r\vec{e}_r$ .

La vitesse du point matériel dans ce référentiel est  $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ .

Le moment cinétique de la particule matérielle de masse  $m$  s'exprime donc :

$$\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g) = r\vec{e}_r \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mC\vec{e}_z, \quad (20-3)$$

où nous avons introduit  $C$ , la **constante des aires**, qui est une constante du mouvement déterminée par les conditions initiales imposées à la particule matérielle.

- Une conséquence importante de l'existence de cette constante des aires est que  $\dot{\theta}$  conserve toujours le même signe au cours du mouvement du point matériel.

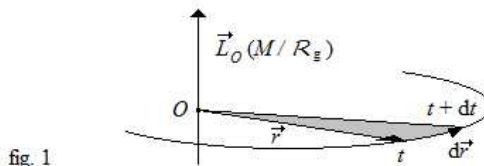


fig. 1

### 2.3 La loi des aires

Le rayon vecteur d'une particule matérielle seulement soumise à une force centrale balaie des aires égales en des durées égales.

Au cours d'un déplacement élémentaire entre  $\vec{r}$  et  $\vec{r} + d\vec{r}$ , l'aire élémentaire balayée (cf. fig.1) par le rayon vecteur est :  $d\mathcal{A} = \left| \frac{1}{2} \vec{r} \wedge d\vec{r} \right|$ . Or,  $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta$ , d'où  $d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 |d\theta|$  et :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 |\dot{\theta}| = \frac{|C|}{2}. \quad (20-4)$$

### 3. Étude du mouvement radial

#### 3.1 L'énergie mécanique du point matériel

• Dans le seul champ de force centrale dérivant de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(r)$ , le point matériel se comporte comme un système conservatif dont l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$ , dans le référentiel d'étude supposé galiléen, est constante :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c(M/\mathcal{R}_g) + \mathcal{E}_p(r)$$

• Les propriétés du mouvement font choisir un repère de projection de coordonnées cylindriques dans lequel les coordonnées de la particule sont  $(r(t), \theta(t), 0)$  ; d'où une énergie cinétique :  $\mathcal{E}_c(M/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$ .

Par ailleurs, comme  $C = r^2 \dot{\theta}$ , l'énergie mécanique devient :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) + \mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{m C^2}{2 r^2} + \mathcal{E}_p(r)$$

#### 3.2 L'énergie potentielle effective

• L'expression ci-dessus montre que l'énergie mécanique du système, qui possède a priori deux degrés de liberté dans le plan du mouvement, se transforme en une expression fonction de la seule distance  $r$  du point matériel au centre de force et de sa dérivée par rapport au temps  $\dot{r}$ .

C'est la marque de la constance du moment cinétique du point matériel exprimé au centre de force au cours de son mouvement dans le champ de force centrale qui lie structurellement les deux degrés de liberté entre eux :  $C = r^2 \dot{\theta}$ .

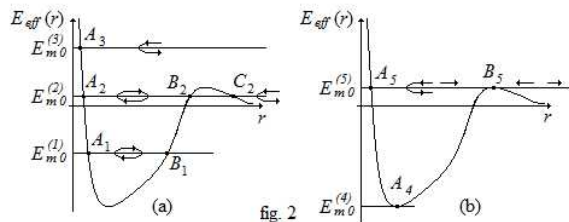
• Son intérêt est de permettre une étude de l'évolution du mouvement radial de la particule. Pour cela, on définit l'**énergie potentielle effective** ou **potentiel efficace** du point matériel dans le champ de force centrale comme :

$$\mathcal{E}_{eff}(r) = \frac{m C^2}{2 r^2} + \mathcal{E}_p(r). \quad (20-5)$$

D'où :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{eff}(r).$$

On mène alors une étude similaire à celle faite sur la seule énergie potentielle dans le cas d'un mouvement à un seul degré de liberté.



Nous traçons la courbe de  $\mathcal{E}_{eff}(r)$  dont nous pouvons déduire :

- Les rayons des mouvements circulaires (les valeurs de  $r$  correspondant aux extrema relatifs ou absolus de  $\mathcal{E}_{eff}$ ) sont :

stables pour les minima (point  $A_4$  de la figure 2.b),

instables pour les maxima (point  $B_5$  de la figure 2.b) et les énergies mécaniques initiales correspondantes  $\mathcal{E}_{m,0}^{(4)}$  et  $\mathcal{E}_{m,0}^{(5)}$ .

En effet, pour ces valeurs particulières de l'énergie mécanique initiale, cette dernière est exactement égale à l'énergie potentielle effective et donc l'énergie cinétique radiale  $\frac{1}{2} m \dot{r}^2$  ne peut qu'être nulle :  $r$  est constant et de même pour  $\dot{\theta}$  d'après la constante des aires. Le mouvement du point matériel est dans les deux cas circulaire uniforme.

- Les énergies mécaniques initiales pour lesquelles le mouvement s'effectue en demeurant à distance finie du centre de force :  $\mathcal{E}_{m,0} \in ]\mathcal{E}_{m,0}^{(4)}; 0]$ . Pour ces valeurs de l'énergie mécanique initiale, le mouvement radial s'effectue en conservant une distance comprise entre  $[r_{A_1}; r_{B_1}]$ , se rapprochant et s'éloignant du centre de force sans toutefois que le mouvement soit obligatoirement périodique. Ces états sont appelés des **états liés**.

- Pour les énergies comprises entre  $[0; \mathcal{E}_{m,0}^{(5)}[$  et selon que  $r_0$  est inférieur à  $r_{B_5}$  ou supérieur, le mouvement du point matériel est un état lié, ou un **état de diffusion**, c'est-à-dire un état pour lequel le point matériel finit par s'éloigner indéfiniment du noyau.

- Enfin, pour les énergies supérieures à  $\mathcal{E}_{m,0}^{(5)}$ , le mouvement de la particule est un état de diffusion.



*Pour les états de diffusion, l'éloignement du point matériel du centre de force s'accompagne d'une diminution vers 0 de la vitesse de rotation angulaire instantanée.*

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** À l'instant où commence l'étude du mouvement d'un point matériel de masse  $m$ , ses coordonnées cylindriques sont  $(r_0, 0, 0)$  et sa vitesse initiale est  $\vec{v}_0 = \dot{r}_0 \vec{e}_r + r_0 \dot{\theta}_0 \vec{e}_\theta$ . Exprimez la constante des aires et le moment cinétique initial du point matériel dans le référentiel d'étude.

**Exercice 2 :** Le point matériel précédent est soumis dans le référentiel supposé galiléen à un champ de force centrale de centre de force  $O$  et tel que :  $\vec{F}_c(r) = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$  où  $k > 0$ .

Exprimez l'énergie potentielle effective  $\mathcal{E}_{eff}(r)$ .

Tracez l'allure de son graphe.

Étudiez les divers types de mouvement radial possibles.

# 21 Mécanique

## 7. Champs newtoniens de force centrale

### 1. Présentation

#### 1.1 Définition

• On appelle champ newtonien de force centrale un champ de force centrale dont l'intensité varie comme l'inverse du carré de la distance au centre de force. Si  $O$  est le centre de force du champ newtonien et  $(r, \theta, \varphi)$  les coordonnées sphériques d'un point matériel  $M$  de l'espace, la force que le centre exerce sur  $M$  est :

$$\vec{f}_{cn} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r. \quad (21.1)$$

• Cette force dérive de l'énergie potentielle d'interaction

$$\mathcal{E}_p(r) = \frac{k}{r} + cste, \quad (21.2)$$

où la constante  $cste$  est habituellement prise égale à 0, ce qui suppose d'annuler l'énergie potentielle d'interaction loin du centre de force.

#### 1.2 Exemples

• La force d'attraction universelle décrite par Newton est historiquement le premier exemple de champ newtonien. Le centre de force peut être soit une masse supposée ponctuelle en  $O$  soit un corps de centre  $O$  de rayon  $R$  présentant une répartition de masse à symétrie sphérique, c'est-à-dire dont la densité volumique ne dépend, en coordonnées sphériques, que de  $r$ . Pour  $r < R$ , le champ est newtonien.

$k = -\mathcal{G}M_O m$  où  $M_O$  est la masse centrée en  $O$ ,  $m$  la masse du point matériel  $M$  subissant le champ de gravitation de  $M_O$  et  $\mathcal{G}$  la constante d'attraction universelle.

• Le second exemple est la force électrostatique de Coulomb qui possède vis-à-vis des charges ponctuelles ou des corps chargés à symétrie sphérique les mêmes propriétés.

La force d'interaction électrostatique que  $O$  exerce sur  $M$  est :  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_O q_M$  où le facteur  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8,988 \times 10^9 \approx 9 \times 10^9 \text{ m.F}^{-1}$ ,  $q_O$  la charge fixe en  $O$  et  $q_M$  celle du point  $M$ .

$\epsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  étant appelé la **permittivité diélectrique du vide**.



*Pour ces deux interactions, le centre de force  $O$  est lui-même soumis à une force opposée à celle exercée sur  $M$ , ce qui suppose que sa fixité soit assurée par des forces d'autre nature...*

#### 1.3 Conséquences

La planéité de la trajectoire, la constance du moment cinétique et la loi des aires sont, du fait du caractère central du champ de force auquel  $M$  est soumis, des propriétés possédées par les évolutions possibles de  $M$ .

## 1.4 Les lois de Kepler

Dans le cas de l'attraction universelle, et avant qu'elle fût découverte et énoncée par Newton, les mouvements des planètes visibles à l'œil nu (Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne) avaient été observés toujours plus précisément au fil du temps. Plusieurs modèles cosmographiques en étaient résulté de Ptolémée à Képler. Ce dernier énonça, au début du XVII<sup>e</sup> siècle, trois lois concernant leur mouvement.

- ❶ Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un des foyers.
- ❷ Les rayons vecteurs joignant le Soleil à chacune des planètes balaient des aires égales en des temps égaux.
- ❸ Le rapport du cube de la longueur du demi-grand axe de l'ellipse trajectoire d'une planète au carré de sa période de révolution autour du Soleil est le même pour toutes les planètes du Système Solaire.



*C'est en s'appuyant sur ces seules lois déduites des observations que Newton élaborera sa théorie de l'attraction universelle.*

## 2. Mouvements autour d'un astre

### 2.1 Présentation de la situation

On considère le mouvement d'un objet, assimilé à un point matériel  $P$  de masse  $m$  sous l'effet de la seule force d'attraction universelle créée par un corps massif de masse  $M$  que l'on suppose fixe en  $O$ . Le référentiel lié à  $O$  est supposé galiléen.

Sous l'effet de l'attraction, la trajectoire de  $P$  est plane et on repère le point par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  dans le plan de la trajectoire. Ainsi,  $P$  est soumis à la force centrale :

$$\vec{f}_{at} = -\frac{\mathcal{G} M m}{r^2} \vec{e}_r.$$

### 2.2 Cas du mouvement circulaire

- Lorsque le mouvement est circulaire autour de  $O$ ,  $r$  est constant, noté  $r_c$  et  $r_c^2 \dot{\theta}_c$ , la constante des aires dépendant des conditions initiales l'étant aussi, on en déduit que  $\dot{\theta}_c$  la vitesse angulaire de  $M$  autour de  $O$  doit être constante.

- Le mouvement de  $P$  est par conséquent circulaire uniforme autour de  $O$ . Sa vitesse dans le référentiel est en permanence perpendiculaire à son rayon vecteur et de norme constante  $\vec{v} = r_c \dot{\theta}_c \vec{e}_\theta$ . Son accélération dans le référentiel est ainsi centripète :  $\vec{a} = -r_c \dot{\theta}_c^2 \vec{e}_r$ .

La vitesse angulaire  $\dot{\theta}_c$  est liée alors à la période de révolution  $T_c$  du point  $P$  autour de  $O$ . Une révolution correspond à  $2\pi$  rad, effectués en une période  $T_c$ , d'où  $\dot{\theta}_c = \frac{2\pi}{T_c}$ .

- Le principe fondamental de la dynamique pouvant s'appliquer dans le référentiel d'étude, on obtient :

$$m \vec{a} = \vec{f}_{at} \quad \text{soit} \quad -m r_c \dot{\theta}_c^2 \vec{e}_r = -\frac{\mathcal{G} M m}{r_c^2} \vec{e}_r. \quad (21-3)$$

- En projection sur  $\vec{e}_r$ , après simplification par  $m$  et remplacement de  $\dot{\theta}_c$  par son expression en fonction de  $T_c$ , on obtient la loi de Kepler pour le mouvement circulaire :

$$\frac{r_c^3}{T_c^2} = \frac{\mathcal{G} M}{4\pi^2}. \quad (21-4)$$

Le cube du rayon de la trajectoire rapporté au carré de la période de révolution est une constante ne dépendant que de la masse de l'astre supposé être la source du champ de force. L'égalité (21-4) prouve la loi de Kepler pour les trajectoires circulaires.

## 2.3 Généralisation aux mouvements elliptiques

Dans le cas où la trajectoire est une ellipse dont le grand axe a pour longueur  $2a$ , parcourue en une période  $T$ , la loi de Kepler se généralise en :

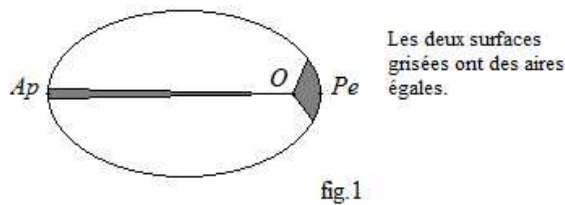
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G} M}{4\pi^2}. \quad (21-5)$$

L'apparente identité de forme de la loi ne doit pas masquer les différences. Le mouvement de  $P$  n'est plus circulaire uniforme.

Il se rapproche de  $O$  jusqu'à atteindre un point  $Pe$  de distance minimale  $r_{Pe}$  (le périégée pour la Terre ; le périhélie pour le Soleil) où sa vitesse angulaire est notée  $\dot{\theta}_{Pe}$ ,

puis s'éloigne de  $O$  jusqu'à atteindre un point  $Ap$  de sa trajectoire de distance maximale  $r_{Ap}$  (l'apogée pour la Terre ; l'aphélie pour le Soleil) où sa vitesse angulaire est notée  $\dot{\theta}_{Ap}$ .

Au cours du mouvement, la loi des aires impose que  $r_{Pe}^2 \dot{\theta}_{Pe} = r_{Ap}^2 \dot{\theta}_{Ap}$  :  $\dot{\theta}_{Pe}$  est donc maximale alors que  $\dot{\theta}_{Ap}$  est minimale ; la longueur du grand axe de l'ellipse étant  $2a = r_{Pe} + r_{Ap}$ .



## 2.4 Application aux satellites

- Les satellites orbitant autour d'un astre, de la Terre ou toutes autres planètes, sont dans une situation convenablement modélisée en première approximation par ce qui précède.

L'altitude  $h$  du satellite par rapport à la surface de l'astre est liée à sa période  $T$  de révolution et au rayon  $R_A$  et à la masse  $M_A$  de l'astre autour duquel il orbite par (21.4) modifiée où  $r_c = R_A + h$ . D'où :

$$\frac{(R_A + h)^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G} M_A}{4\pi^2}. \quad (21-6)$$

- Un satellite géostationnaire est un satellite demeurant toujours à la perpendiculaire du même point de la Terre. Ceci n'est possible que lorsque le plan de sa trajectoire est confondu avec le plan équatorial et lorsque son altitude est telle que sa période de révolution est égale à la période de révolution diurne de la Terre (86164 s).

La masse de la Terre est d'environ  $M_T = 5,98 \times 10^{24}$  kg, son rayon équatorial  $R_T = 6378$  km, l'altitude à laquelle tout satellite géostationnaire doit orbiter est donc  $h \approx 35\,800$  km.

## 3. Étude énergétique

### 3.1 Énergie mécanique du point matériel

- Somme de l'énergie cinétique dans le référentiel d'étude et de l'énergie potentielle, l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{k}{r}$$

en prenant l'énergie potentielle nulle à l'infini.

Pour un corps en mouvement circulaire de rayon  $r_c$  dans le champ newtonien, sa vitesse  $v$  est

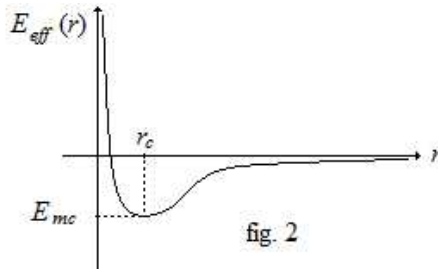
$r_c \dot{\theta}_c$  d'où, d'après (21-3) généralisée,  $m \frac{v^2}{r_c} = -\frac{k}{r_c^2}$  et donc  $mv^2 = -\frac{k}{r_c}$ . Ainsi :

$$\mathcal{E}_{mc} = \frac{k}{2r_c} . \quad (21-7)$$

• Si la force est attractive,  $k < 0$  et l'énergie mécanique du corps est négative. Ceci est conforme à ce que donne l'étude de l'énergie potentielle effective :

$$\mathcal{E}_{eff}(r) = \frac{m C^2}{2 r^2} + \frac{k}{r}$$

avec  $k < 0$ , et dont le graphe a l'allure suivante :



• Le minimum de l'énergie potentielle effective est donné par  $r_c = -\frac{mC^2}{k} = \frac{C^2}{GM} > 0$  où  $C$  la constante des aires doit être égale à  $r_c^2 \dot{\theta}_c$ .

### 3.2 Expression dans le cas des mouvements elliptiques

Lorsque le mouvement n'est plus circulaire uniforme, mais donne lieu à une trajectoire elliptique, on montre que l'énergie mécanique totale du système est :

$$\mathcal{E}_m = \frac{k}{2a} . \quad (21-8)$$

où  $a$  est la longueur du demi-grand axe de l'ellipse.

### 3.3 Vitesses cosmiques

• La vitesse possédée par un objet orbitant sur une trajectoire circulaire de rayon  $r_c$  autour d'un astre vaut, d'après (21-3) :

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_c}} .$$

• On appelle **première vitesse cosmique** celle, notée  $v_1$ , correspondant à une orbite circulaire autour de la Terre, de rayon égal au rayon terrestre. On peut l'estimer à partir de l'accélération de la pesanteur car  $g \approx \frac{GM_T}{R^2}$ , d'où  $v_1 \approx \sqrt{gR}$  soit environ  $8 \text{ km.s}^{-1}$ .

• On appelle **vitesse de libération** ou **vitesse parabolique** ou **seconde vitesse cosmique** la vitesse  $v_2$  à communiquer à une sonde pour la soustraire à l'attraction de la Terre à partir de

sa surface. Elle s'obtient en considérant que son énergie mécanique doit être nulle, le graphe de la figure 2 montrant que l'état de l'objet est alors un état de diffusion. Ainsi, notant  $M$  la masse et  $R$  le rayon terrestre, la seconde vitesse cosmique est donnée par la relation :

$$\mathcal{E}_m = 0 = \frac{1}{2} m v_l^2 - \frac{\mathcal{G} M m}{R}$$

soit :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{R}} = \sqrt{2} v_1. \quad (21-9)$$

• On appelle **troisième vitesse cosmique** la vitesse de libération héliocentrique à partir d'un point situé à une distance égale au rayon moyen de la trajectoire de la Terre au Soleil. Elle est donnée par l'expression (21-9) où  $M$  est alors la masse du Soleil ( $\approx 2 \times 10^{30}$  kg) et  $R$  la distance moyenne Terre- Soleil ( $\approx 150 \times 10^6$  km). Ainsi,  $v_3 \approx 42 \text{ km.s}^{-1}$ .

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Quelle est la période d'un satellite orbitant circulairement à 350 km de la surface de la Terre ? Quelle est sa vitesse ?

**Exercice 2 :** En réalité sa distance varie entre 320 et 380 km. Quelles sont ses vitesses maximales et minimales.



# 22 Le champ magnétique et son action sur les courants électriques

## 1. Le champ magnétique

Le champ magnétique est une grandeur physique qui opère sur les charges électriques en mouvement dans les référentiels dans lesquels il est non nul.

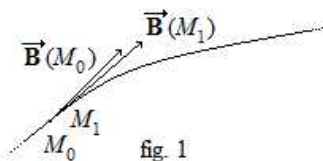
### 1.1 Sources

Les sources du champ magnétique sont :

les aimants naturels ; les aimants artificiels élaborés par des procédés métallurgiques ;  
les courants électriques, c'est-à-dire les charges électriques mobiles.

### 1.2 Lignes de champ

• Le champ magnétique dans une région donnée de l'espace est décrit en chaque point  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  de celle-ci par un vecteur  $\vec{B}(\vec{r})$  lorsqu'il est indépendant du temps. On définit une **ligne de champ** du champ magnétique comme une courbe en chaque point de laquelle le champ magnétique est continûment tangent.



### 1.3 Propriétés des lignes de champ

• Par un point donné de l'espace passe une ligne de champ et une seule. Les lignes de champ du champ magnétique d'une source de dimensions finies sont, sauf exception, des lignes fermées sur elles-mêmes à distance finie de la source. Les lignes « ouvertes » sont, pour de telles sources, en nombre fini. Elles peuvent être considérées comme des lignes fermées sur elles-mêmes à l'infini.

• Ce bouclage des lignes sur elles-mêmes est intimement lié à l'inexistence de « charges (ou monopoles) magnétiques » isolables - contrairement aux charges électriques pour lesquelles il est possible de séparer et d'isoler une charge positive d'une charge négative ; il est impossible d'isoler un pôle nord du pôle sud qui l'accompagne.

On dit que les sources de champ magnétique sont au mieux dipolaires.

• L'ensemble des lignes de champ d'une source de champ magnétique constitue le **spectre** du champ magnétique créé par la source.

• Là où les lignes de champ sont resserrées, le champ magnétique est intense. Des lignes de champ droites et parallèles entre elles signalent un champ magnétique uniforme dans la région considérée.


### 1.4 Moment magnétique

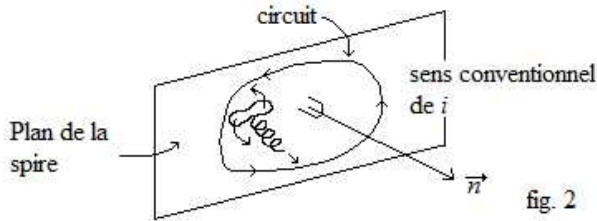
• On définit le **moment magnétique** d'une boucle de courant plane d'aire  $S$  parcourue par un courant électrique d'intensité  $i$  comme le vecteur :

$$\vec{M} = i S \vec{n}, \quad (22-1)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal au plan de la boucle dont le sens est donné par la règle du tire-bouchon de Maxwell : si on tourne un tire-bouchon dans le sens conventionnel choisi pour mesurer l'intensité  $i$  du courant électrique, il progresse dans le sens qui définit celui du vecteur normal  $\vec{n}$ .

- La dimension du moment magnétique est  $IL^2$ . Son unité est l'ampère-mètre au carré, de symbole  $A.m^2$ .

 Le moment magnétique d'une bobine plate comportant  $N$  spires de surface  $S$ , parcourues par un courant électrique d'intensité  $i$ , est  $\vec{M} = N i S \vec{n}$ .



## 2. Action d'un champ magnétique sur les courants

### 2.1 Force de Laplace élémentaire

Soit un élément  $d\vec{l}$  d'un circuit électrique parcouru par un courant d'intensité  $i$ ,  $d\vec{l}$  étant orienté dans le sens conventionnel choisi pour  $i$ . Cet élément de circuit est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r})$ .

Il est soumis à la force magnétique élémentaire suivante appelée **force de Laplace** :

$$d\vec{f}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B}(\vec{r}). \quad (22-2)$$

### 2.2 Résultante des forces de Laplace élémentaires

- Si le champ magnétique est uniforme et stationnaire,  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}$  vecteur indépendant du point où l'on se situe et du temps. Si  $M$  et  $N$  sont les extrémités de la portion du conducteur plongée dans le champ, la convention d'orientation de  $i$  allant de  $M$  à  $N$ , alors la résultante des forces de Laplace  $\vec{f}_L$  vaut :

$$\vec{f}_L = i \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}, \quad (22-3)$$

car

$$\vec{f}_L = \int_M^N d\vec{f}_L = i \left( \int_M^N d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} = i \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}.$$

- La résultante des forces élémentaires de Laplace est perpendiculaire à la direction du vecteur champ magnétique et à la direction du vecteur  $\overrightarrow{MN}$ . En désignant par  $\alpha$  l'angle entre ces deux directions, la norme de la résultante vaut :

$$\|\vec{f}_L\| = |i \times MN \times B \times \sin \alpha| \quad (22-4)$$

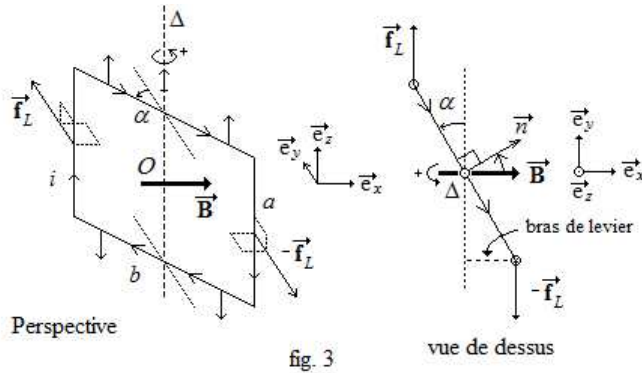
où  $B = \|\vec{B}\|$  et  $MN = \|\overrightarrow{MN}\|$ .

### 2.3 Couple s'exerçant sur un moment magnétique

• Soit un circuit plan fermé sur lui-même et parcouru par un courant électrique d'intensité  $i$  et plongé dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps  $\vec{B}$ . La résultante des forces de Laplace s'exerçant sur le circuit vaut :

$$\vec{F}_L = \oint i d\vec{l} \wedge \vec{B} = i \left( \oint d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

car les vecteurs  $d\vec{l}$  constituant les éléments le long du circuit ont une somme vectorielle qui se boucle sur elle-même et vaut donc  $\vec{0}$ . Si un tel champ possède une action sur le circuit, ce ne peut être que par l'intermédiaire d'un moment de couple.



• Considérons l'exemple simple d'une spire plane rectangulaire, susceptible de tourner autour d'un axe fixe  $\Delta$  passant par les milieux de deux côtés opposés du cadre (cf. fig. 3) et plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe de rotation.

Des forces élémentaires de Laplace s'exercent en tout point du circuit. Elles sont colinéaires à l'axe de rotation sur les côtés de longueur  $b$  perpendiculaires à  $\Delta$ . Elles sont perpendiculaires à  $\Delta$  et au champ magnétique sur les côtés du cadre parallèles à  $\Delta$ .

Deux éléments du circuit symétriques par rapport au centre  $O$  de la spire sont soumis à des forces élémentaires de Laplace opposées. La résultante des forces élémentaires exercées sur le cadre est donc nulle.

Les seules forces élémentaires susceptibles de contribuer à la rotation du cadre sont celles dont le bras de levier n'est pas nul par rapport à  $\Delta$ , donc celles s'exerçant sur les montants verticaux du cadre. Elles y possèdent toutes le même bras de levier  $\frac{b}{2} \sin \alpha$ .

La somme des moments par rapport à  $\Delta$  des forces élémentaires sur l'un des côtés verticaux est par conséquent égale au moment par rapport à  $\Delta$  de la résultante des forces sur le même côté. La norme de la résultante des forces élémentaires sur l'un des côtés du cadre est  $|i \times a \times B|$ . Le moment algébrique par rapport à  $\Delta$ , dirigé par  $\vec{e}_z$ , de cette résultante,  $M_\Delta$  vaut :

$$M_\Delta = -i a b B \sin \alpha$$

• L'expression précédente fait apparaître l'intensité du moment magnétique sur sa normale  $i a b$ . On vérifie qu'elle peut s'écrire :

$$M_\Delta = \vec{\tau}_\Delta \cdot (\vec{M} \wedge \vec{B}) = -M B \sin \alpha. \quad (22-5)$$

• Les résultats précédents se généralisent. Tout circuit électrique ou tout aimant permanent

de moment magnétique  $\vec{M}$  plongé dans une zone où règne un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B}$  est soumis à des actions de la part du champ dont la résultante est nulle et le moment par rapport à n'importe quel point de l'espace vaut :

$$\vec{M} = \vec{M} \wedge \vec{B}. \quad (22-6)$$

Ce moment de couple tend à aligner la direction du moment magnétique sur celle du champ magnétique.

## 2.4 Énergie potentielle magnétique

- Le moment du couple par rapport à l'axe  $\Delta$ ,  $M_\Delta$ , qui s'exerce sur le moment magnétique dans le champ magnétique uniforme et stationnaire produit un travail élémentaire  $\delta\mathcal{W}$  lorsque le cadre tourne autour de  $\Delta$  de la position  $\alpha$  à la position infiniment voisine  $\alpha + d\alpha$ .

En effet, parmi toutes les forces élémentaires qui s'exercent sur les diverses portions du cadre seules travaillent celles s'exerçant sur les montants du cadre parallèles à  $\Delta$ .

Les déplacements élémentaires des points d'application respectifs de ces forces élémentaires sont tous égaux pour un même montant :  $d\vec{r} = \frac{b}{2} d\alpha \vec{n}$  pour l'un,  $-d\vec{r}$  pour l'autre. Le travail élémentaire s'en déduit :

$$\delta\mathcal{W} = (-i a B \vec{e}_y) \cdot \frac{b}{2} d\alpha \vec{n} + i a B \vec{e}_y \cdot \left( -\frac{b}{2} d\alpha \vec{n} \right) = -M B \sin \alpha d\alpha = d(M B \cos \alpha).$$

- Le travail des forces de Laplace qui s'exercent sur un moment magnétique dans un champ magnétique uniforme et stationnaire apparaît de la sorte ne dépendre que des positions initiale et finale. Le moment du couple dérive donc d'une énergie potentielle  $\mathcal{E}_{p,m}$  :

$$\mathcal{E}_{p,m} = -M B \cos \alpha = -\vec{M} \cdot \vec{B}. \quad (22-7)$$

## 2.5 Puissance élémentaire des forces de Laplace

Si le conducteur se déplace parallèlement à lui-même à la vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel dans lequel est défini le champ magnétique, la puissance de la force de Laplace y est égale à :

$$\mathcal{P}_L = \vec{f}_L \cdot \vec{v}.$$

## Sauriez-vous répondre ?

**Question 1** : Une bobine plate de  $N = 250$  spires circulaires, toutes de surface  $S = 20 \text{ cm}^2$ , est parcourue par un courant électrique d'intensité  $i = 150 \text{ mA}$ . Calculez son moment magnétique.

**Exercice 2** : La bobine précédente est placée dans une zone où règne un champ magnétique uniforme et stationnaire de valeur  $B = 35 \text{ mT}$ .

Comment la positionneriez-vous par rapport au champ magnétique pour que le moment du couple qui s'exerce sur elle soit maximal ? Que vaut-il alors ?

Commenter le résultat en déterminant la masse à poser sur l'extrémité d'un levier de  $10 \text{ cm}$  de long pour que le moment de son poids par rapport à un axe de rotation horizontal soit égal au précédent.

## 1. Lois de Faraday et de Lenz

### 1.1 Expériences

- On constate que le déplacement dans un référentiel donné d'une source de champ magnétique ( aimant ou bobine parcourue par un courant électrique ) à proximité d'un circuit électrique fermé ne comportant aucune source de tension ou de courant, fait naître, dans certaines circonstances - reproductibles -, un courant électrique tant que la source du champ magnétique est mobile par rapport au circuit.
- Le phénomène est relatif : le déplacement dans le même référentiel d'une portion du circuit électrique par rapport à une source de champ magnétique stationnaire dans ce référentiel, provoque aussi l'apparition d'un courant électrique dans le circuit.

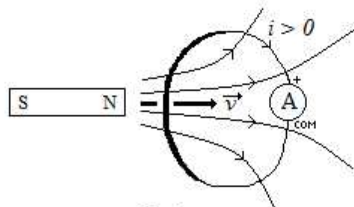


fig. 1

- Faraday a montré que le phénomène était plus marqué si le champ magnétique de la source variait en semblant « transpercer » la surface du circuit. Le courant électrique qui circule dans la boucle a, dans les deux cas, une intensité d'autant plus grande que le déplacement relatif s'effectue avec une vitesse élevée ; il s'annule dès que le mouvement cesse.

Pour interpréter ses résultats expérimentaux, il a été conduit à penser la notion de flux du champ magnétique à travers un circuit.

### 1.2 Flux du champ magnétique à travers une surface

- On se restreint au cas particulier suivant : un circuit plan à une maille définissant formellement un contour  $\Gamma$  qui délimite une surface plane d'aire  $S$  et un champ magnétique uniforme dans la région où est positionné le circuit,  $\vec{B}(t)$ .

Le **flux du champ magnétique à travers le contour  $\Gamma$**  ou **à travers la surface  $S$** , noté  $\Phi$ , est défini comme :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}, \quad (23-1)$$

où  $\vec{S}$  est le vecteur surface du circuit, vecteur de norme  $S$ , l'aire du circuit, de direction la perpendiculaire à son plan et de sens celui de la normale orientée  $\vec{n}$  au plan du circuit :  $\vec{S} = S \vec{n}$ .

La normale orientée est intrinsèquement liée à l'orientation du contour  $\Gamma$  de la manière suivante : une orientation arbitraire est choisie le long du contour, le sens du vecteur  $\vec{n}$  est celui selon lequel progresserait un tire-bouchon que l'on tournerait à travers la surface dans le sens de l'orientation arbitraire du contour.

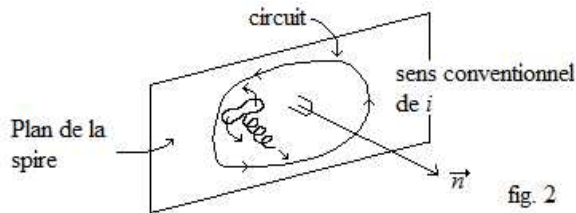


fig. 2

- La dimension du flux du champ magnétique est le produit de la dimension du champ magnétique et du carré d'une longueur soit  $M.L^2.T^{-2}.I^{-1}$ . Son unité est le weber, de symbole Wb.

### 1.3 Force électromotrice induite et loi de Faraday

L'existence, en l'absence de source de tension ou de courant, d'un courant électrique dans le circuit fermé au cours des expériences décrites plus haut implique qu'une force capable de mettre en mouvement les électrons dans le circuit ait été créée à la faveur de la variation temporelle du champ magnétique ou du déplacement du circuit dans le champ magnétique.

Cette force agit comme si l'on avait inséré dans le circuit une source de tension  $e(t)$ , appelée la **force électromotrice** ou **f.é.m. induite**, donnée par la **loi de Faraday** :

*La force électromotrice induite dans un circuit est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux du champ magnétique à travers ce circuit. L'orientation de la f.é.m. induite est celle prise sur le contour et ayant servi à définir la normale orientée du circuit.*

$$e(t) = - \frac{d\Phi}{dt}(t). \quad (23-2)$$

### 1.4 Loi de Lenz

- La loi de Faraday, quantitative, s'accompagne d'une loi qualitative, la **loi de Lenz** :

*Les effets des courants induits apparaissant dans un circuit tendent à s'opposer aux causes qui leur ont donné naissance.*

- Si le courant induit est dû à une variation temporelle du champ magnétique à travers le circuit, son sens sera tel qu'il créera lui-même un champ magnétique propre tendant à s'opposer à la variation du champ extérieur.

S'il est dû au déplacement par un opérateur d'une portion de circuit, il circulera dans ce dernier avec un sens tel que les forces de Laplace qui s'exerceront sur elle dans le champ magnétique extérieur s'opposeront à ce déplacement.

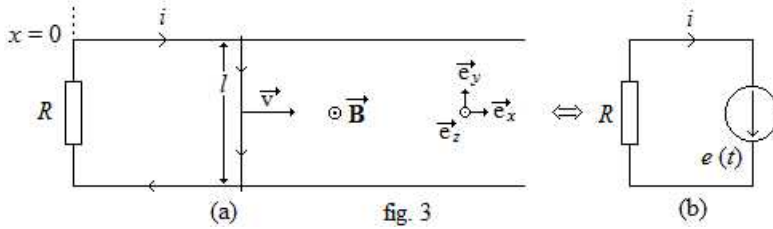
## 2. Cas de circuits mobiles dans un champ magnétique stationnaire

### 2.1 Rails de Laplace

- Une barre est déplacée sur deux rails horizontaux parallèles entre eux et distants de  $l$ , tout en leur demeurant perpendiculaire. La barre et les deux rails sont de très bons conducteurs et constituent avec un résistor ohmique de résistance  $R$ , un circuit fermé sur lui-même.

Un opérateur déplace la barre vers la droite avec une vitesse  $\vec{v} = v \vec{e}_x$  ( $v \geq 0$ ) constante et parallèle aux rails.

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  ( $B \geq 0$ ) perpendiculaire au plan des rails.



Le déplacement de la barre fait varier la surface du circuit offerte aux lignes de champ du champ magnétique. Une variation du flux du champ magnétique à travers le circuit se produit et une force électromotrice induite en résulte, qui fait naître un courant électrique induit dans le circuit fermé.

Son sens devra être tel que la force de Laplace qui s'exercera sur la barre sera dirigée suivant  $-\vec{e}_x$ . Pour ce faire, il doit être positif avec une convention de l'intensité de courant électrique dirigée suivant  $-\vec{e}_y$ . Nous choisissons donc ce sens conventionnel pour  $i$  (celle des figures 3.a et 3.b) et nous vérifierons que  $i$  est positif à la fin.

- Appliquons la loi de Faraday au circuit. Calculons le flux à travers la circuit : la normale orientée conformément au sens de  $i$  est  $-\vec{e}_z$  et la surface du circuit est  $lx(t)$ , d'où un flux  $\Phi(t) = B\vec{e}_z \cdot (-lx(t)\vec{e}_z) = -Blx(t)$ .

La loi de Faraday se traduit par une force électromotrice induite :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}(t) = Bl\dot{x}(t) = Blv.$$

Pour comprendre ce qui se passe sur le plan électrique dans le montage, il faut construire le circuit électrique équivalent : la résistance demeure elle-même, les rails sont remplacés par des fils conducteurs et la barre est modélisée par la source de tension induite  $e(t)$  dont la flèche est orientée dans le sens de la convention de  $i$  et dont l'expression est donnée ci-dessus.

Nous obtenons le circuit de la figure 3.b. Il y circule un courant induit dont l'intensité est :

$$i = \frac{e(t)}{R} = \frac{Blv}{R} \geq 0,$$

comme l'analyse qualitative l'avait laissé entrevoir. La force de Laplace due au courant induit en résulte :

$$\vec{F}_L = i(-l\vec{e}_y) \wedge B\vec{e}_z = -ilB\vec{e}_x = -v\frac{(Bl)^2}{R}\vec{e}_x.$$

Les hypothèses posées dans cette étude font que la constance de la vitesse de la barre ne peut être assurée que par l'équilibre entre la force de Laplace et celle exercée par un opérateur sur ladite barre  $\vec{f}_{op} = -\vec{F}_L$ .

- La puissance fournie par l'expérimentateur :

$$\mathcal{P}_{op} = \vec{f}_{op} \cdot v\vec{e}_x = \frac{(Blv)^2}{R}$$

est entièrement convertie en puissance thermique par effet Joule dans le résistor :

$$\mathcal{P}_R = Ri^2 = \mathcal{P}_{op}.$$

Cette conversion de la puissance mécanique en puissance thermique s'est faite par l'intermédiaire de la f.é.m. et du courant induits apparus lors du déplacement de la barre dans le champ magnétique.

• Si la barre n'avait pas été entraînée à vitesse constante, il aurait fallu écrire l'équation mécanique de la barre par application du théorème de la résultante cinétique. En posant  $m$  la masse de la barre et en appelant la force entraînante  $\vec{f}_{exc} = f_{exc} \vec{e}_x$ , on aurait eu l'équation mécanique suivante :

$$m \frac{dv}{dt} = f_{exc} - i l B,$$

et l'équation électrique :

$$e(t) = B l v = R i.$$

On constate que les deux variables  $i$  et  $v$  apparaissent dans les deux équations. On dit qu'il y a **couplage électromécanique** dans le système, effectué par l'intermédiaire du champ magnétique et des phénomènes d'induction qu'il va susciter.

• Le bilan de puissance est établi en multipliant la première équation par  $v$ , la seconde par  $i$  et en éliminant  $i B l v$  entre les deux. Il reste :

$$f_{exc} v = R i^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right)$$

qui traduit la transformation de la puissance fournie par le dispositif entraînant en dissipation par effet Joule et variation de l'énergie cinétique de la barre. Si le champ magnétique semble ne pas intervenir dans le bilan, il est cependant présent dans l'expression de  $i$ .

## 2.2 Méthode de traitement

• Les problèmes d'induction avec parties mobiles peuvent faire que vous n'ayez pas réussi à déterminer *a priori* le sens réel du courant électrique. Pas de panique ! La ligne de conduite suivante permet de surmonter l'obstacle. Il suffit de :

- ❶ fixer une convention d'orientation de  $i$  arbitraire sur le circuit,
- ❷ déterminer la normale orientée conformément à cette convention,
- ❸ calculer le flux du champ magnétique à travers le circuit,
- ❹ en déduire la f.é.m. induite d'après la loi de Faraday,
- ❺ construire le schéma électrique équivalent du dispositif, en faisant très attention de conserver la même orientation pour le courant dans la partie qui est le siège de phénomènes d'induction,
- ❻ établir l'équation électrique du circuit équivalent,
- ❼ établir l'équation mécanique de la partie mobile du dispositif par application du théorème de la résultante cinétique ou du moment cinétique s'il y a rotation, et vérifier qu'il y a couplage électromécanique,
- ❽ éliminer entre l'équation électrique et l'équation dynamique la variable électrique ou la variable mécanique et résoudre si possible l'équation différentielle obtenue sur la variable restante,
- ❾ en déduire l'autre variable laissée momentanément de côté.

## 2.3 Bobine plate tournant dans un champ magnétique

• Le second exemple traité est celui d'une bobine plate, de  $N$  spires rectangulaires dont les côtés ont pour longueurs  $a$  et  $b$ , tournant à une vitesse angulaire  $\omega$  constante autour d'un axe  $\Delta$  ; le cadre est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire perpendiculaire à  $\Delta$  (La situation est convenablement représentée par la figure 3 de la fiche 22). Seul n'y est pas représenté le dispositif fermant le fil de bobinage constituant les  $N$  spires sur un résistor de résistance  $R$ .



• La direction entre la normale au plan des spires et le champ magnétique évolue au cours du temps ; le flux du champ magnétique à travers les spires varie et induit une force électromotrice, le circuit étant fermé, un courant électrique y prend naissance.

• En prenant pour origine des temps un instant où la normale au plan des spires et le champ magnétique sont colinéaires et de même sens, l'angle  $\alpha(t)$  entre ces deux vecteurs vaut  $\alpha(t) = \omega t$  et le flux du champ magnétique à travers les  $N$  spires est égal à  $\Phi = N S \vec{n} \cdot \vec{B} = N a b B \cos(\omega t)$ .

D'après la loi de Faraday, la force électromotrice induite  $e(t)$  vaut  $-\frac{d\Phi}{dt}(t)$ ,

soit  $e(t) = N a b B \omega \sin(\omega t)$ . On constate qu'elle est alternative. L'équation électrique du circuit a la même forme que dans le cas précédent  $e(t) = R i(t)$ , d'où le courant induit  $i(t) = \frac{e(t)}{R}$  lui-même alternatif :

$$i(t) = \frac{N a b B \omega}{R} \sin(\omega t).$$

• Sur le plan mécanique, La constance de la vitesse angulaire implique l'intervention d'un opérateur qui exerce sur la bobine plate un couple de moment par rapport à l'axe de rotation  $M_{op}$  opposé à celui que le champ magnétique exerce sur le moment magnétique associé à la bobine. D'après la relation (22-5), le moment de couple que subit la bobine dans le champ magnétique est :

$$M_{\Delta} = -M B \sin \alpha(t) = N i(t) a b B \sin(\omega t),$$

soit, en tenant compte de l'expression obtenue pour  $i(t)$  :

$$M_{\Delta} = -\frac{(N a b B)^2 \omega}{R} \sin^2(\omega t).$$

Le moment par rapport à l'axe du couple des efforts magnétiques sur le cadre est toujours négatif, ce qui traduit leur caractère résistant, conforme à la loi de Lenz. L'opérateur exerce donc un couple qui les compense exactement afin que la vitesse angulaire soit constante :

$$M_{op} = -M_{\Delta} = \frac{(N a b B)^2 \omega}{R} \sin^2(\omega t).$$

La puissance instantanée qu'il développe vaut :

$$\mathcal{P}_{op} = M_{op} \omega = \frac{(N a b B \omega)^2}{R} \sin^2(\omega t).$$

Elle est exactement égale à la puissance électrique dissipée par effet Joule dans la résistance :

$$\mathcal{P}_R = R i^2(t) = R \left( \frac{N a b B \omega}{R} \sin(\omega t) \right)^2.$$

Ainsi, comme dans le cas des rails de Laplace, la puissance mécanique fournie par l'opérateur pour faire tourner le cadre est intégralement convertie en puissance électrique fournie à la résistance par l'intermédiaire des phénomènes d'induction prenant naissance dans le champ magnétique.

• Si le cadre n'avait pas été entraîné à vitesse angulaire constante, il aurait fallu écrire son équation mécanique en appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe  $\Delta$ . En posant  $J$  le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe de rotation et en appelant le moment des forces entraînant par rapport à  $\Delta$ ,  $M_{exc}$ , on aurait eu l'équation mécanique suivante :

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = J \ddot{\alpha}(t) = M_{exc} - N i(t) a b B \sin \alpha(t)$$

et l'équation électrique :

$$e(t) = N a b B \dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) = R i(t).$$

On retrouve le couplage électromécanique dans l'apparition des deux variables  $i$  et  $\dot{\alpha}(t)$  dans les deux équations.

- Le bilan de puissance est établi en multipliant la première équation par  $\dot{\alpha}$  et la seconde par  $i$  et en éliminant  $NiBab\dot{\alpha} \sin \alpha$  entre les deux. Il reste alors :

$$\mathcal{M}_{exc} \dot{\alpha} = R i^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 \right)$$

qui traduit la transformation de la puissance fournie par le dispositif entraînant en dissipation par effet Joule et variation de l'énergie cinétique de la bobine, le champ magnétique intervenant dans le bilan par l'intermédiaire de  $i$ .

- La conversion de l'énergie mécanique, fournie par un opérateur, une chute d'eau, une turbine à vapeur d'eau, etc., en énergie électrique suit grossièrement toujours ce principe.

## 2.4 Freinage électromagnétique

L'exemple précédent montre que le moment du couple exercé sur un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire est globalement résistant.

Cette propriété est exploitée dans les ralentisseurs électromagnétiques montés sur les gros véhicules de transport (autobus, camions et semi-remorques). Leur principe est le suivant : une masse métallique conductrice et solidaire de l'arbre de transmission du moteur aux roues motrices est placée dans un champ magnétique créé par un électroaimant.

La rotation de la masse conductrice dans les lignes de champ du champ magnétique engendre en son sein des courants induits appelés **courants de Foucault** dont les effets s'opposent, selon la loi de Lenz, aux causes qui leur ont donné naissance. Dans ce cas, la cause est la rotation de l'arbre, donc les efforts électromagnétiques induits vont tendre à l'empêcher, à tout le moins à la ralentir et freiner par conséquence le véhicule.

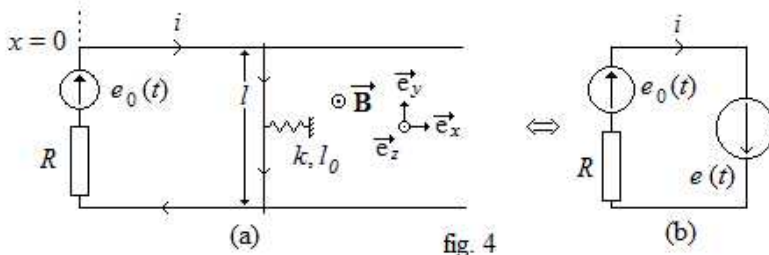
La force du ralentisseur est réglée par le conducteur qui contrôle l'intensité du champ magnétique à l'origine des phénomènes d'induction.

## 2.5 Réversibilité de la conversion

La conversion est parfaitement réversible puisqu'un courant électrique dans un circuit placé dans un champ magnétique subit une force de Laplace ou un moment de couple magnétique capable de mettre en mouvement une portion mobile du circuit. Elle est réalisée par le même objet, aussi n'y a-t-il aucune distinction de principe à faire entre un moteur et un générateur électriques.

## 2.6 Haut-parleur électrodynamique

- En schématisant à l'extrême, le principe du haut-parleur électrodynamique est similaire à celui des rails de Laplace modifiés comme suit :



- La barre joue le rôle de la membrane, de masse  $m$  ; un générateur de tension celui de l'amplificateur alimentant le haut-parleur en délivrant une tension sinusoïdale  $e_0(t) = E_0 \cos(\omega t)$ . L'élasticité des accroches de la membrane est modélisée par un ressort de raideur  $k$  et de lon-

gueur à vide  $l_0$  ; le rayonnement de l'onde acoustique par la membrane l'est par un amortissement s'exerçant sur elle, de type « frottement fluide » opposé à la vitesse  $\vec{f}_r = -\lambda \dot{x}(t) \vec{e}_x$ .  $x(t)$  est l'allongement du ressort à l'instant  $t$  et  $x_{eq}$  est la position de l'équipage mobile par rapport à la position d'équilibre.

- Le générateur de tension impose la circulation d'un courant électrique dans le circuit, courant qui, dans le champ magnétique, subit une force de Laplace s'exerçant sur la barre.

Réciproquement, la force de Laplace entraîne un déplacement de la barre dans le champ magnétique, donc l'apparition d'une force électromotrice induite.

- L'orientation de l'intensité du courant électrique étant celle fixée sur la figure 4, la force de Laplace a pour expression  $\vec{F}_L = -i(t) l B \vec{e}_x$ . Le flux du champ magnétique à travers le circuit est  $\Phi(t) = -B l (x(t) + x_{eq})$  et la f.é.m. induite, selon la loi de Faraday, est  $e(t) = B l \dot{x}(t)$ . Le circuit électrique équivalent permet de calculer l'intensité du courant électrique :

$$i(t) = \frac{e_0(t) + e(t)}{R} = \frac{e_0(t) + B l \dot{x}(t)}{R}$$

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la barre, le référentiel dans lequel ces événements sont décrits étant supposé galiléen, fournit, en projection sur  $\vec{e}_x$  :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x(t) - \lambda \dot{x}(t) - i(t) l B,$$

soit :

$$\ddot{x} + \left( \frac{\lambda}{m} + \frac{(B l)^2}{m R} \right) \dot{x} + \frac{k}{m} x = -\frac{B l}{m R} e_0(t).$$

Quelle que soit la nature du régime transitoire, la solution générale de l'équation homogène est une fonction tendant vers 0 lorsque  $t > 5 \tau$ ,  $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{m} + \frac{(B l)^2}{m R} \right)$ . Aussi nous concentrerons-nous sur la solution particulière sinusoïdale, qui peut être trouvée en passant par les grandeurs complexes associées.

Posons  $x(t) = \Re(\underline{x}(t))$  où  $\underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$  ;  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  et  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{\tau}$  ;  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$  .

L'équation donne pour amplitude complexe du déplacement sinusoïdal de la barre :

$$\underline{X} = -\frac{B l E_0}{k R} \cdot \frac{1}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}} .$$

Le dispositif conduit à l'oscillation de la barre à la même fréquence que la tension délivrée par la source tout comme la membrane du haut-parleur vibrerait à la fréquence de la tension issue de l'amplificateur.

- Le bilan instantané des puissance est obtenu en multipliant l'équation mécanique par  $\dot{x}$ , l'équation électrique par  $R i$  et en éliminant entre les deux le terme explicite de couplage  $i l B \dot{x}$  ; on obtient :

$$e_0 i = \lambda \dot{x}^2 + R i^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right).$$

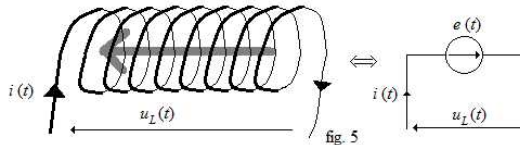
La puissance fournie par le générateur de tension est dissipée en puissance acoustique rayonnée, en puissance thermique créée par effet Joule dans la résistance et sert à la variation de l'énergie mécanique du système oscillant {barre - ressort}.

### 3. Cas de circuits fixes dans un champ magnétique dépendant du temps

#### 3.1 Fonctionnement de la bobine d'auto-induction

• Nous avons vu (fiche 12-§2) que les bobines d'auto-induction ont la propriété de s'opposer à l'établissement ou aux variations du courant électrique les traversant. Nous sommes maintenant en mesure de comprendre les phénomènes physiques qui s'y produisent pour créer cet effet.

Considérons une bobine de  $N$  spires insérée dans un circuit du type de la figure 17 de la fiche 12. Au moment où l'on ferme l'interrupteur, le courant qui s'apprête à circuler dans le fil de la bobine y crée un champ magnétique proportionnel à son intensité  $i(t)$  si la bobine est sans noyau de fer ou si  $i(t)$  est faible ; ce que nous pouvons traduire par la relation entre  $i(t)$  et la valeur du champ magnétique créé en un point  $M$  à l'instant  $t$  au cœur de la bobine :  $B(M, t) = k(M) i(t)$ , la direction du champ magnétique étant globalement celle de l'axe de la bobine et son sens donné par la règle du tire-bouchon - on tourne dans le sens de  $i$  et le sens dans lequel progresse le tire-bouchon indique le sens du champ magnétique, comme indiqué sur la figure 5.



• Ce champ crée un flux à travers chaque spire de la bobine dont la somme est le **flux propre**  $\Phi_p$ , flux du champ magnétique créé par un courant circulant dans une bobine à travers ses propres spires.

Le flux propre est proportionnel à l'intensité du courant électrique et le coefficient de proportionnalité final est ce que nous avons appelé l'**inductance propre**  $L > 0$  de la bobine. Ainsi,

$$\Phi_p(t) = L i(t). \quad (23-3)$$

Selon la loi de Faraday, la f.é.m. induite vaut  $e(t) = -L \frac{di}{dt}(t)$ .

La convention courant-tension récepteur impose le sens de  $u_L(t)$  par rapport au sens de  $i(t)$ , d'où  $u_L(t) = -e(t)$  ce qui permet de retrouver la relation entre la tension aux bornes de la bobine d'auto-induction et le courant la traversant.

- Nous pouvons donc interpréter l'opposition aux variations de courant qui caractérise le comportement des bobines comme la conséquence de la loi de Lenz.
- L'orientation de la normale aux spires en fonction de celle du courant électrique dans la bobine et l'orientation du champ magnétique par rapport à celle du courant font que le flux propre est toujours du même signe que l'intensité du courant.
- Nous renvoyons le lecteur au paragraphe correspondant de la fiche 12 pour ce qui est du bilan de puissance lors de l'établissement du courant dans une bobine d'auto-induction.

#### 3.2 Évaluation de l'inductance propre

• Considérons une bobine de  $N$  spires jointives telles que le rayon de la plus grande des spires soit petit devant la longueur  $l$  de la bobine que l'on appelle alors un **solénoïde**.

Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est approximativement uniforme, colinéaire à l'axe du solénoïde et d'intensité convenablement donnée par  $B(t) \approx \mu_0 n i(t)$  où

$n = \frac{N}{l}$  et  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  est une constante du magnétisme dans le vide nommée la **perméabilité magnétique du vide**.

- Le plan de chaque spire peut être considéré comme perpendiculaire au champ magnétique et si  $S$  est l'aire moyenne des spires de la bobine, le flux propre est approché par :

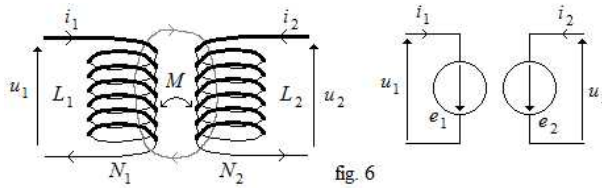
$$\Phi_p(t) \approx N S B(t) = \mu_0 \frac{N^2}{l} S i(t)$$

L'ordre de grandeur de l'inductance propre de la bobine s'en déduit :

$$L \approx \mu_0 \frac{N^2}{l} S. \quad (23-4)$$

### 3.3 Cas de deux bobines en interaction

- Lorsque deux bobines sont à proximité l'une de l'autre et parcourues chacune par un courant, elles créent chacune un champ magnétique dont les lignes de champ peuvent traverser les spires de l'autre. Nous avons dessiné une ligne de champ du champ magnétique enlaçant les spires des deux bobines.



- Il en résulte que le flux du champ magnétique à travers chaque bobine dépend des courants traversant les deux bobines.

Ainsi,  $\Phi_1$ , le flux du champ magnétique à travers la première bobine, d'inductance  $L_1$  est la somme du flux propre  $L_1 i_1$  et du flux que la seconde bobine envoie à travers ses spires, le **flux extérieur**  $M i_2$ , où  $M$  désigne l'**inductance mutuelle** entre les deux bobines.

Réciproquement, le flux total du champ magnétique à travers les spires de la seconde bobine est lui-même la somme de son flux propre  $L_2 i_2$  et du flux extérieur  $M i_1$ . Ainsi,

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$$

Les relations tension-courant pour l'ensemble des bobines s'en déduisent

car  $u_1 = -e_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}$  et  $u_2 = -e_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}$ , soit :

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \quad (23-5)$$

En régime sinusoïdal, les équations précédentes se transposent sur les tensions et intensités complexes associées en :

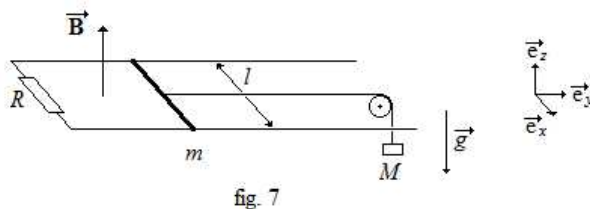
$$\underline{u}_1 = j L_1 \omega \underline{i}_1 + j M \omega \underline{i}_2 \quad \text{et} \quad \underline{u}_2 = j L_2 \omega \underline{i}_2 + j M \omega \underline{i}_1.$$

- L'inductance mutuelle entre deux circuits dépend naturellement de leur position relative et son signe des orientations prises pour les courants sur chacun d'eux. Pour une position relative donnée, il y a quatre possibilités d'orientation des deux courants : deux conduisent à une inductance mutuelle  $M$  positive, les deux autres à sa valeur opposée.

Le signe de l'inductance mutuelle est déterminé par l'examen de l'angle que fait le champ magnétique créé par l'un des bobinages avec la normale orientée des spires de l'autre : si l'angle est aigu alors l'inductance mutuelle est positive.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Nous considérons un dispositif de rails de Laplace dans une variante présentée sur le schéma suivant : la barre, de masse  $m$ , est tirée par un fil inextensible et sans masse à l'autre extrémité duquel est suspendue une autre masse  $M$  ; le fil passe par la gorge d'une poulie sans inertie et sans frottement sur son axe de rotation. La barre se déplace parallèlement à elle-même et perpendiculairement aux rails. Le champ magnétique dans lequel baignent les rails est uniforme et stationnaire.

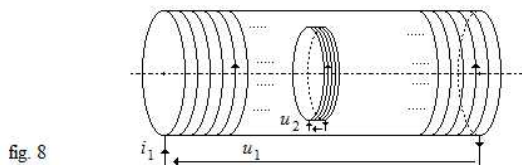


Établissez l'équation du mouvement de la barre.

Montrez que la vitesse tend vers une valeur limite que vous déterminerez.

*Vous analyserez ce qui se passe dans le dispositif, nommerez les variables dont vous aurez besoin et fixerez les orientations nécessaires de certaines grandeurs.*

**Exercice 2 :** On considère un solénoïde de  $N = 2000$  spires de section  $S = 30 \text{ cm}^2$  et de longueur totale  $l = 10 \text{ cm}$ . À l'intérieur de celui-ci, une bobine plate de  $N' = 500$  spires de section  $S' = 20 \text{ cm}^2$  est disposée de sorte que sa normale orientée soit colinéaire et de même sens que le champ magnétique créé par la première bobine lorsque le courant qui la parcourt a une intensité positive.



Le solénoïde est parcouru par le courant périodique triangulaire, de période  $T = 10 \text{ ms}$  suivant : pour  $t \in [0; 4 \text{ ms}]$ ,  $i(t)$  croît linéairement de  $-50 \text{ mA}$  à  $50 \text{ mA}$  ; pour  $t \in [4 \text{ ms}; 10 \text{ ms}]$   $i(t)$  décroît linéairement de  $50 \text{ mA}$  à  $-50 \text{ mA}$ . Déduisez-en la tension  $u_2(t)$  aux bornes de la bobine plate.

# 24 Thermodynamique

## 1. description des systèmes à l'équilibre

### 1. Spécificité du système thermodynamique

#### 1.1 Définition

- On appelle au sens le plus large **système thermodynamique** un ensemble contenant un très grand nombre d'entités matérielles (électrons, ions, atomes, molécules), quel que soit l'état physique dans lequel il se trouve.
- $18 \text{ cm}^3$  d'eau contient  $N_A \approx 6,02 \times 10^{23}$  molécules.  $N_A$  est le nombre d'**Avogadro** en  $\text{mol}^{-1}$ .

#### 1.2 Caractère statistique des paramètres descriptifs

L'extrêmement grand nombre d'unités dans les systèmes rend impossible et même inutile la connaissance du devenir de chacune d'elles. Les thermodynamiciens ont construit un petit nombre de paramètres afin de caractériser le système avec suffisamment de précision et de pertinence pour ce qui constitue leur centre d'intérêt, à savoir les échanges d'énergie entre le système et l'extérieur.

Ces paramètres doivent résumer les états de mouvement et d'excitation de toutes les entités du système. Ils ne peuvent donc être fondés que sur une approche statistique grâce au calcul des probabilités.

La physique statistique est la branche de la physique en charge de relier la description microscopique du système, les grandeurs mécaniques et énergétiques censées être attribuables à ses entités, et les paramètres mesurables à notre échelle, l'échelle macroscopique.

#### 1.3 Qualifications des systèmes

- Un **système fermé** est un système qui n'échange pas de matière avec l'extérieur. La surface qui le délimite est imperméable à l'entrée ou à la sortie de nouvelles entités. La masse d'un tel système ne varie pas au cours du temps et ce sont toujours les mêmes entités qui lui appartiennent.
- Un **système ouvert** est un système délimité par une surface perméable à l'échange de matière. La masse d'un tel système peut varier au cours du temps et, si elle ne varie pas, ce ne sont cependant plus les mêmes entités qui, au fil du temps, composent le système.
- Un **système isolé** est un système qui n'établit aucun rapport avec l'extérieur : ni échange de matière, il est fermé, ni échange d'énergie, ce qui suppose qu'il ne soit soumis à aucun champ de force dont la source lui serait extérieure.

## 2. État d'un système

### 2.1 Variables d'état et fonction d'état

La description d'un système nécessite de connaître un certain nombre de grandeurs physiques observables, donc mesurables et certaines fonctions particulières de ces grandeurs pour résumer ses propriétés mécaniques et énergétiques.

Les grandeurs physiques en question sont appelées **variables d'état** : la température  $T$ , la pression  $p$ , la quantité de matière  $n_i$  de chacun de ces constituants, le volume occupé  $V$ , la masse volumique  $\rho$ ...

Parmi les fonctions de ces variables d'état nous trouvons l'énergie interne  $U$ , l'enthalpie  $H$ , l'entropie  $S$ ...

## 2.2 Variables locales et globales

- Dans le cas général, certaines des variables d'état doivent être définies comme des champs à l'intérieur du système, c'est-à-dire des grandeurs physiques susceptibles de devoir être données localement et instantanément : le champ de température  $T(\vec{r}, t)$ , de pression  $p(\vec{r}, t)$ , de masse volumique  $\rho(\vec{r}, t)$  ...

- Comme ces grandeurs physiques sont élaborées par une démarche statistique, elles doivent être construites à partir de ce qui se passe à l'intérieur d'un volume  $\delta V$  entourant le point  $\vec{r}$ , à l'échelle **mésoscopique**, à savoir petit à notre échelle pour que les variations locales des grandeurs soient conservées mais suffisamment grand à l'échelle microscopique pour que son intérieur recèle un nombre encore élevé d'entités porteuses des propriétés auxquelles il s'agit d'attribuer une valeur au point  $\vec{r}$ , ceci afin que l'usage de l'arsenal statistique conserve son bien-fondé et que les grandeurs physiques puissent être représentées par des fonctions suffisamment régulières des coordonnées d'espace et du temps.

Connaître l'état du système revient à connaître les champs en question au cours du temps soit par l'observation, soit par la déduction à partir d'observations initiales et d'équations qui régissent l'évolution.

- D'autres variables d'état sont globales et n'ont de sens que pour l'ensemble du système : le volume qu'il occupe, la quantité de matière qu'il contient ...

## 2.3 État d'équilibre

- Un système est dans un **état d'équilibre** lorsque ni son état, ni celui de l'extérieur n'évoluent avec le temps. Les variables d'état qui le décrivent complètement sont alors indépendantes du temps.

- Un système à l'équilibre doit satisfaire trois conditions :

❶ il doit être en équilibre mécanique : toutes les forces internes au système ou entre le système et l'extérieur sont compensées.

❷ il doit être en équilibre thermique : le champ de température doit être indépendant de la position et du temps  $T(\vec{r}, t) = T_0$  car l'existence d'un écart de température au sein du système provoquerait un transfert énergétique entre ses diverses parties susceptible de modifier ses caractéristiques finales.

❸ il doit être à l'équilibre chimique : s'il est composé de plusieurs constituants, sa composition doit demeurer identique.

### • Remarques

– Si l'équilibre exige l'indépendance par rapport au temps, des systèmes de grandes dimensions peuvent se trouver à l'équilibre avec certains de leurs champs (la pression, la masse volumique, etc ...) dépendant de la position, comme, par exemple, le champ de pression dans une colonne de liquide de plusieurs mètres de hauteur. Cependant, sauf exception, les systèmes auxquels nous pensons sont de dimensions suffisamment modestes pour que les champs soient indépendants de  $t$  et de  $\vec{r}$ .

– L'état stationnaire d'un système ouvert - comme la circulation en boucle d'un fluide dans un processus à plusieurs étapes - n'est pas assimilable à un état d'équilibre car le fluide y subit en permanence des transformations.

## 2.4 Équation d'état

- Toutes les variables d'état utilisées pour décrire l'état d'un système ne sont pas indépendantes. L'**équation d'état** est la relation liant certaines d'entre elles du fait des propriétés de ses constituants.



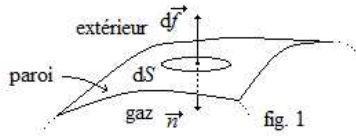
- Exemple : un système à l'équilibre se comportant comme un gaz parfait, de dimensions telles que les variables d'état indépendantes de la position, a pour équation d'état :

$$pV = nRT \quad (24-1)$$

où  $V$  est le volume qu'il occupe (en  $\text{m}^3$ ),  $T$  sa température (en K),  $n$  sa quantité de matière (en mol) et  $p$  sa pression (en Pa). C'est l'équation des gaz parfaits.

## 2.5 Origine physique de la pression

- À l'échelle macroscopique, la pression est définie comme le rapport de la force qui s'exerce sur une surface donnée à l'aire de celle-ci.



- Soit  $d\vec{f}$  la force pressante élémentaire qu'un gaz à l'équilibre thermodynamique exerce sur l'élément de la paroi qui l'enferme, d'aire  $dS$  autour d'un point  $M$ . La **pression** au point  $M$  exercée par le fluide est donnée par la relation :

$$-p(M)\vec{n} = \frac{d\vec{f}}{dS} \quad (24-2)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal orienté de la paroi vers le fluide pressant. Cette définition reste valide en tout point  $M$  à l'intérieur du fluide en considérant la force élémentaire exercée par le fluide sur un seul côté de la surface élémentaire. La pression est alors indépendante de l'orientation de la surface élémentaire.

- La pression a pour dimension :  $\text{M.L}^{-1}.\text{T}^{-2}$ . Son unité est le pascal, de symbole Pa.
- La définition précédente est phénoménologique : on constate qu'une force s'exerce sur un élément de la paroi, à laquelle on essaie d'attribuer une grandeur physique, la pression, qui donne l'information principale sur ladite force.

Cette force provient, à l'échelle microscopique, du transfert de quantité de mouvement à la paroi qu'induisent les très nombreux chocs moléculaires supposés élastiques sur celle-ci.

Pour les gaz, le modèle statistique élémentaire du gaz parfait à l'équilibre thermodynamique aboutit à la définition cinétique de la **pression** :

$$p = \frac{1}{3} n_v m u^{*2} \quad (24-3)$$

où  $m$  est la masse d'une molécule du gaz (M),  $n_v$  le nombre de molécules du gaz par unité de volume ( $\text{L}^{-3}$ ) et  $u^*$  la **vitesse quadratique moyenne** ( $\text{L.T}^{-1}$ ) définie par :

$$u^* = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i^{*2}} \quad (24-4)$$

## 2.6 Origine physique de la température

- La température d'un système est intimement liée à l'énergie des mouvements microscopiques et au degré d'excitation des atomes ou des molécules qui le constituent. Ainsi, pour un gaz parfait monoatomique, la température cinétique  $T$  relie l'énergie cinétique moyenne

$\langle \mathcal{E}_c \rangle$  d'une molécule du gaz à la température  $T$  selon la relation :

$$\langle \mathcal{E}_c \rangle = \frac{1}{2} m u^{*2} = \frac{3}{2} k_B T \quad \text{où} \quad k_B = \frac{R}{N_A} \quad (24-5)$$

où  $N_A$  est le nombre d'Avogadro,

$R$  la constante des gaz parfaits, environ égale à  $8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ ,

$k_B$  la **constante de Boltzmann**, environ égale à  $1,381 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$  ;

$T$  la température absolue, une des sept dimensions fondamentales de la physique, notée  $\Theta$  et exprimée en kelvin, de symbole K ;

$$u^* = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i^{*2}} \quad (24-5)$$

- Cette température cinétique s'identifie avec la température du thermomètre à gaz parfait et à la température thermodynamique telle qu'introduite par le second principe.

## 2.7 Grandeurs extensives et intensives

- Il est habituel de distinguer parmi les variables d'état ou les fonctions de telles variables les **extensités** ou **grandeurs extensives** et les **intensités** ou **grandeurs intensives**.

Appartiennent à la première catégorie la quantité de matière, le volume, l'énergie ou l'entropie ; et à la seconde, essentiellement pour nous, la température, la pression et les grandeurs qui sont des rapports d'extensités.

- Une grandeur thermodynamique est extensive si, lorsque l'on multiplie les quantités de matière d'un système par un même facteur  $k$ , la grandeur en question est multipliée par  $k$ , les grandeurs intensives restant constantes.

Ainsi, l'adjonction à une quantité  $n_1$  de gaz à la température  $T$ , à la pression  $p$  et qui occuperait donc un volume  $V_1$  à une quantité  $n_2$  du même gaz à la même température et à la même pression, occupant un volume  $V_2$ , prendra le volume  $V_1 + V_2$  pour être, dans le mélange, à la température  $T$  et à la pression  $p$ .



*Pour que le caractère extensif d'une variable caractérisant un système soit avéré, les constituants de ce dernier ne doivent pas être sujets entre eux à des interactions de champs de longues portées telles les interactions électromagnétique ou gravitationnelle ou ces dernières doivent en tout cas ne pas jouer un rôle prépondérant dans l'évolution du système et pouvoir ainsi être négligées.*

## 3. Gaz parfait et gaz réel

### 3.1 Description

Un gaz (du grec  $\chi\alpha\omicron\varsigma$ , chaos) est un système sans forme propre, fortement compressible et dont les entités constitutives (molécules ou atomes) occupent tout l'espace qui leur est concédé. Ses constituants ont une énergie cinétique moyenne très grande devant la valeur absolue de leur énergie potentielle moyenne d'interaction.

### 3.2 Le gaz parfait monoatomique

Un gaz parfait monoatomique est un système constitué de particules supposées ponctuelles et sans interactions entre elles autres que les chocs qui entretiennent l'agitation thermique et le chaos moléculaire. L'énergie mécanique de ce type de système est postulée comme étant la somme des énergies cinétiques de toutes ses particules dans un référentiel donné.

### 3.3 Introduction de l'énergie interne

• Soit  $\{M_i\}_{i=1,\dots,N}$  les  $N$  particules identiques de masse  $m$  d'un gaz parfait monoatomique. Soit le référentiel dans lequel leur centre d'inertie est au repos, son **référentiel barycentrique**  $\mathcal{R}^*$ .

Si  $\vec{v}_i^*$  est le vecteur vitesse de la particule  $M_i$  dans le référentiel barycentrique du gaz, l'énergie du système est appelée son **énergie interne**, notée  $U$  et égale à :

$$\mathcal{E}_m = U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \vec{v}_i^{*2}$$

• Or, selon (24-4) et (24-5), l'énergie interne du gaz parfait est ainsi une fonction d'état de la seule température absolue du gaz et du nombre de mole  $n = \frac{N}{N_A}$  :

$$U = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T \quad (24-6)$$

L'énergie interne est proportionnelle à la température. Le coefficient de proportionnalité est la **capacité thermique** ou **calorifique à volume constant**  $C_v$  du gaz parfait monoatomique :

$$C_v = \frac{3}{2} n R \quad (24-7)$$

On définit les capacités thermiques molaire ( $c_{vm}$ ) et massique ( $c_v$ ) à volume constant :

$$c_{vm} = \frac{C_v}{n} = \frac{3}{2} R \quad \text{et} \quad c_v = \frac{c_{vm}}{M} = \frac{3 R}{2 M} \quad (24-8)$$

où  $n$  est le nombre de moles de la substance constituant le système et  $M$  sa masse molaire.  $C_v$  représente l'énergie à fournir aux  $n$  moles du gaz,  $c_{vm}$  celle à fournir à une mole du gaz et  $c_v$  celle à fournir à un kilogramme du gaz parfait monoatomique, le volume de chacun restant constant, pour que sa température s'élève de un kelvin.

### 3.4 Équation d'état

Dans le cadre du modèle du gaz parfait, l'équation d'état du gaz est :  $p V = n R T$ .

Si le système étudié est fermé, le nombre de moles  $n$  est fixé *a priori*. Il ne reste que trois variables d'état liées par l'équation d'état précédente, soit deux variables indépendantes. Imposer des valeurs à  $p$  et  $T$ ,  $T$  et  $V$ , ou  $p$  et  $V$  interdit toute liberté de choix sur, respectivement,  $V$ ,  $p$  ou  $T$ .

### 3.5 Diagrammes de représentation

- Le **diagramme de Clapeyron** représente les courbes  $p = f(V)$  à température constante pour  $n$  moles du gaz. Ce sont les **courbes isothermes** ou **isothermes**.
- Le **diagramme d'Amagat** représente les isothermes  $p V = g(p)$  pour la même quantité de matière. Pour un gaz parfait, on obtient :

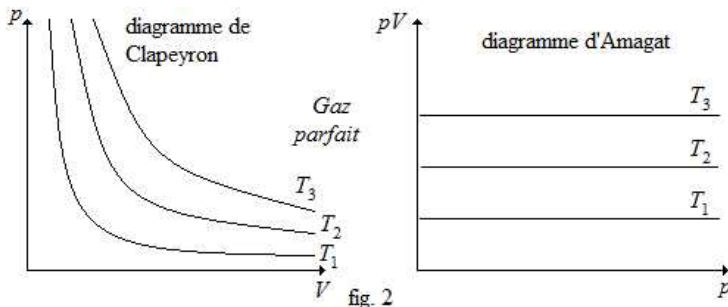


fig. 2

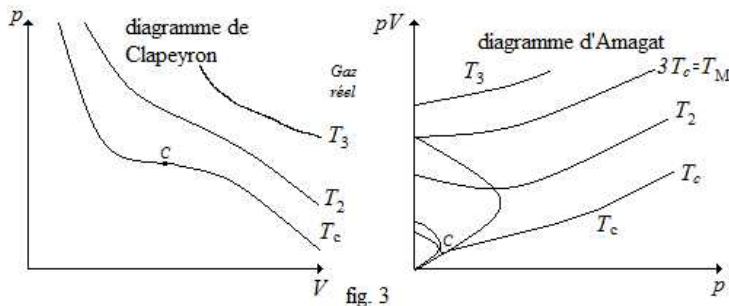
- Dans le diagramme de Clapeyron, les isothermes du gaz parfait sont des branches d'hyperbole :  $p = (nRT)/V$ ; dans le diagramme d'Amagat, les isothermes sont des droites  $pV = nRT$ , indépendantes de la pression, parallèles à l'axe des abscisses.



Remarquez sur les diagrammes les positions respectives des isothermes les unes par rapport aux autres sachant que  $T_1 < T_2 < T_3$ .

### 3.6 Gaz réel aux faibles pressions

- La figure 3 montre l'allure des isothermes pour un gaz réel.



On constate que les isothermes ne sont plus des branches d'hyperbole en coordonnées de Clapeyron et ne sont plus des droites indépendantes de la pression en coordonnées d'Amagat.

Sur ce dernier diagramme, il apparaît une température, la **température de Mariotte**  $T_M$ , spécifique du gaz réel étudié, pour laquelle, aux basses pressions, le gaz présente un comportement voisin du gaz parfait : le produit  $pV$  ne dépend pas de la pression du gaz - au moins au premier ordre en la pression -, ce qui doit se traduire par une pente nulle de son isotherme  $T = T_M$  lorsque  $p \rightarrow 0$ .

Pour les températures  $T < T_M$ , les isothermes dans le diagramme d'Amagat possèdent un minimum au voisinage duquel, pour une raison similaire à celle invoquée précédemment, le gaz réel se comporte alors comme le gaz parfait.

- Les écarts des gaz réels au gaz parfait sont dus au volume des molécules qui les constituent et aux interactions qui existent entre les molécules et entre chaque molécules et la paroi de l'enveloppe du gaz ou de la surface du capteur de pression.

Ces interactions sont de très courtes portées car elles sont de nature essentiellement dipolaire, que ces dipôles soient induits ou non.



Il est fréquent d'assimiler un gaz réel à un gaz parfait dans les domaines de température et de pression couramment rencontré à cause de la grande simplicité des propriétés du gaz parfait. La masse molaire du gaz réel est alors attribuée au gaz parfait.

### 3.7 Équations d'état

La complexité du comportement des gaz réels rend impossible la prise en compte de l'ensemble de leurs propriétés thermoélastiques par une seule équation d'état simple à manipuler. Il est donc fréquent de travailler avec plusieurs équations d'état selon les températures et les pressions envisagées.

Un exemple de telles équations est l'**équation de van der Waals** :

$$\left(p + a \left(\frac{n}{V}\right)^2\right) \cdot (V - nb) = nRT \quad (24-9)$$

où  $a$  et  $b$  sont des coefficients dépendant du gaz étudié.  $b$  a la dimension d'un volume et est

appelé le **covolume molaire**. Il rend plus ou moins bien compte du volume d'une mole de gaz réel.

La **pression interne**  $a\left(\frac{n}{V}\right)^2$  traduit l'interaction moyenne attractive à longue distance que subit chaque molécule du gaz de la part de ses congénères, attraction venant diminuer le transfert de quantité de mouvement sur une paroi et donc la pression cinétique, c'est-à-dire la pression du gaz parfait équivalent. Cette dernière serait ainsi  $p_c = p + a\left(\frac{n}{V}\right)^2$  où  $p$  est la pression mesurée et  $V - nb$  son volume réellement occupé.

### 3.8 Énergie interne d'un gaz réel

En assimilant, en première approximation le gaz réel à un gaz parfait dont on tiendrait compte de tous les degrés de liberté  $d$  dus au caractère polyatomique de ses molécules, l'énergie interne de ce gaz parfait associé a pour expression :

$$U_{g,as}(T) = C_v T = d \frac{nR}{2} T.$$

Alors que l'énergie interne du gaz parfait n'est fonction que de sa température, celle du gaz réel est fonction de sa température et du volume qu'il occupe. Dans le cadre du modèle de van der Waals, l'énergie interne du nombre  $n$  de moles du gaz réel est approchée par l'expression :

$$U(T, V) = C_v T - a \frac{n^2}{V} = U_{g,as}(T) - a \frac{n^2}{V}$$

L'énergie interne du gaz réel est alors plus faible que celle du gaz parfait associé à cause de l'énergie potentielle d'interaction (attractive) des molécules du gaz entre elles.

## 4. Exemple des phases condensées

### 4.1 Description

Une phase condensée est une phase dont les entités constituantes (atomes, molécules ou ions) possèdent une énergie cinétique moyenne du même ordre de grandeur que la valeur absolue de l'énergie potentielle d'interaction (dans les liquides) ou une énergie cinétique moyenne très petite devant la valeur absolue de l'énergie potentielle d'interaction (dans les solides).

### 4.2 Équation d'état

- Pour un liquide ou un solide, et pour des états voisins d'un état de référence qui occuperait un volume  $V_0$ , à une température  $T_0$  et avec une pression  $p_0$  s'exerçant à sa surface, l'équation d'état suivante lie le volume  $V$  qu'il occupe lorsque sa température devient  $T$  et la pression à sa surface  $p$  :

$$V = V_0 (1 + \alpha (T - T_0) - \chi_T (p - p_0)) \quad (24-10)$$

où  $\alpha$  est le **coefficient de dilatation isobare**, défini comme :

$$\alpha = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{V_0 \Delta T} = \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p=p_0} \quad (24-11)$$

Sa dimension est l'inverse d'une température  $\Theta^{-1}$  et son unité est l'inverse du kelvin de symbole  $K^{-1}$ . Les ordres de grandeur vont de  $10^{-3}$  à  $10^{-4} K^{-1}$  pour un liquide et sont autour de  $10^{-5} K^{-1}$  pour un solide.

- $\chi_T$  est le **coefficient de compressibilité isotherme**, défini comme :

$$\chi_T = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} - \frac{\Delta V}{V_0 \Delta p} = - \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T=T_0} \quad (24-12)$$

Sa dimension est celle de l'inverse d'une pression soit  $\text{L.T}^2.\text{M}^{-1}$  dont l'unité légale le  $\text{Pa}^{-1}$ , mais l'unité la plus usitée est le  $\text{bar}^{-1}$ .  $\chi_T \approx 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$  ou  $10^{-6} \text{ bar}^{-1}$  pour toutes les phases condensées.

- Les ordres de grandeur des coefficients de dilatation isobare et de compressibilité isotherme des phases condensées font qu'il est possible, pour des variations modestes de la température ou de la pression externe, de négliger en première approximation les changements de volumes que ces variations induisent.

### 4.3 Énergie interne d'une phase condensée

- Il est expérimentalement légitime de considérer en première approximation l'énergie interne d'une phase condensée comme fonction de sa seule température :  $U = U(T)$ .

- Aux températures usuelles, celle de nombreux corps solides est proche d'une fonction affine de la température dont la pente est voisine de  $3 R n$  où  $R$  est la constante des gaz parfaits et  $n$  la quantité de matière de l'échantillon quelle que soit sa nature. On en déduit que la capacité thermique molaire de toute substance solide tend vers  $3 R$  aux températures usuelles. C'est la loi de Dulong et Petit des capacités thermiques molaires des solides à pression constante.

Elle exprime que l'accroissement de l'énergie interne des entités élémentaires constituant le solide se répartit également, à partir d'une certaine température, entre leur énergie cinétique et leur énergie potentielle - une répartition de l'énergie en quelque sorte qui tirerait son origine de ce que chaque entité pourrait être assimilée à un oscillateur harmonique à trois dimensions, indépendant, oscillant autour d'une position d'équilibre dans le cristal.

Chaque oscillateur possède suivant chacune des directions de l'espace une énergie cinétique moyenne  $\langle e_c \rangle$  et une énergie potentielle élastique moyenne  $\langle e_p \rangle$  valant chacune  $\frac{k_B T}{2}$ .

Ainsi pour une direction donnée, l'énergie mécanique d'un oscillateur vaudrait  $k_B T$  et  $3 k_B T$  pour les trois directions.

Aux basses températures en revanche, la capacité thermique molaire à pression constante s'écarte de la loi de Dulong et Petit pour varier comme  $T^3$ . Ce comportement n'a été expliqué que dans le cadre de la mécanique quantique appliquée aux solides.



*On suppose qu'opérer à volume ou à pression constante pour une phase solide nécessite la même énergie.*

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** On vide une bouteille d'eau « marquée » dans l'océan Atlantique. Après avoir attendu suffisamment longtemps pour qu'elle se soit intimement mélangée à toutes les eaux de la surface du Globe, on remplit à l'océan la bouteille vide.

Estimez le nombre de molécules d'eau « marquée » qu'elle a des chances de contenir.

**Exercice 2 :** Calculez le volume molaire d'un gaz assimilé à un gaz parfait à la température ambiante de  $20^\circ\text{C}$  et à la pression atmosphérique standard  $p = 10^5 \text{ Pa}$ .

**Exercice 3 :** Un gaz supposé parfait subit une transformation au cours de laquelle sa température demeure identique. Son énergie interne varie-t-elle au cours de la transformation ?

# 25 Thermodynamique

## 2. premier principe

### 1. Transformations d'un système

#### 1.1 Définition

Un système thermodynamique fermé subit une **transformation** lorsqu'il passe d'un état d'équilibre à un autre qui en diffère par la valeur de l'un de ses paramètres d'état au moins.

#### 1.2 Problématique de l'étude d'une transformation

Il s'agit en général de déterminer les caractéristiques de l'état final d'un système fermé, connaissant celles de son état initial et la transformation qu'il subit et de quantifier les échanges d'énergie entre le système et l'extérieur qui se produisent entre les états d'équilibre initial et final qui bornent la transformation.

#### 1.3 Nature des échanges d'énergie

Le système peut échanger de l'énergie sous deux formes :

- sous **forme mécanique**, par le travail des forces de pression extérieures qui s'exercent sur la surface qui le délimite si elle est déformable, ou bien par un déplacement d'ensemble du système dans un champ de force extérieur.

On parle de **travail** macroscopique des forces de pressions ou des forces de champ.

- sous **forme de chaleur** à travers la surface délimitant le système sans déplacement visible de ses parois : on parle alors d'**échanges thermiques** et on appelle **chaleur** l'énergie échangée de cette manière. Il s'agit d'un transfert d'énergie dont le bilan total est repérable à l'échelle macroscopique, souvent par un changement de la température du système.

- Trois modes de transferts thermiques sont distingués : la conduction, la convection et le rayonnement.

– Le transfert par **conduction** s'effectue par l'intermédiaire des vibrations des atomes ou des molécules de la paroi, en contact avec le système étudié. L'énergie associée à ces vibrations se communique aux entités qui forment le système lors des chocs entre ces dernières et les atomes ou molécules vibrantes de la paroi.

Ce transfert s'effectue sans mouvement d'ensemble des entités constitutives de la paroi ou du fluide. Ce sont les chocs intermoléculaires qui transportent de proche en proche l'énergie.

– Le transfert par **convection** concerne seulement les fluides. Il se produit avec un déplacement d'ensemble des entités du fluide qui, au contact d'une surface, échangent avec elle de l'énergie, selon un processus similaire au précédent. Elles perdent ou gagnent ainsi de l'énergie cinétique, mais, prises dans un mouvement d'ensemble du fluide, elles la transportent loin de la surface d'échange par leur propre déplacement et non par chocs.

– L'échange peut aussi résulter de l'absorption d'un **rayonnement** électromagnétique par les particules du système.

– Il est fréquent que plusieurs modes de transfert interviennent simultanément au cours des transferts thermiques.

- Les parois limitant le système qui autorisent un échange thermique sont dites **diathermes** ou **diathermanes** ; celles qui l'interdisent sont dites **adiabatiques**.

## 1.4 Sources

- Une **source de chaleur** est un corps dont la température varie si peu qu'elle peut être considérée comme constante quelle que soit l'énergie échangée avec le système étudié. Un corps de capacité thermique suffisamment grande par rapport à celle du système étudié peut faire office de source de chaleur. Elle est dénommée **thermostat** lorsque sa capacité thermique est supposée à la limite « infinie ».
- On appelle **source de travail** un environnement du système dont la pression est uniforme et constante quel que soit le travail échangé avec ce dernier. Le volume de cette source doit pouvoir autoriser des variations de volume du système dans n'importe quelle proportion.
- Dans les deux cas, le paramètre intensif (température ou pression) caractérisant la source est supposé invariant au cours des transformations du système.

## 1.5 Qualification des transformations

- La transformation du système est **isochore** si le volume du système ne varie pas. Les seuls échanges énergétiques possibles sont alors de nature thermique.
  - Une transformation est **monotherme** si le système est placé au contact d'une source de chaleur de température  $T_s$  éventuellement différente de la température initiale du système. Ce type de transformation n'a de sens que si les parois enfermant le système sont diathermes. Il se produit alors un échange d'énergie sous forme de chaleur et la température de la source est obligatoirement la température de l'état d'équilibre final du système.
  - Une transformation est **monobare** si le système est placé au contact d'une source de travail de pression  $p_s$  éventuellement différente de la pression initiale du système. Ce type de transformation n'a de sens que si les parois enfermant le système sont déformables. Il se produit alors un échange d'énergie sous forme de travail et la pression de la source est obligatoirement la pression de l'état d'équilibre final du système.
  - Une transformation est **réversible** si la transformation qui ferait revenir le système à son état initial par la suite inverse des états successifs par lesquels il est passé est possible. Ceci suppose que la transformation soit une suite d'états d'équilibre, c'est-à-dire d'états pour lesquels les paramètres intensifs d'état (température et pression) sont définis à chaque instant, qu'elle soit infiniment lente (**quasi-statique**).
- De plus, le système ne doit pas être le siège de phénomènes d'hystérésis, c'est-à-dire de phénomènes interdisant que, lors du changement d'un paramètre d'état de  $\alpha$  à  $\alpha + d\alpha$  puis son retour à  $\alpha$ , l'état d'équilibre final du système soit le même que l'état d'équilibre initial.

- Une transformation qui ne satisferait pas à l'une de ces conditions serait **irréversible**.
- La transformation du système est **isotherme** si elle est monotherme et réversible donc si la température du système demeure la même tout au long de la transformation. La température de l'état d'équilibre final est par conséquent la même que celle de l'état initial. La réalisation d'une telle transformation impose que le système soit placé dans une source de chaleur de température égale à sa température initiale.
- La transformation du système est **isobare** si elle est monobare et réversible et donc si la pression extérieure est en permanence égale à celle intérieure au système tout au long de la transformation. La pression de l'état d'équilibre final est par conséquent la même que celle de l'état initial. La réalisation d'une telle transformation impose que le système soit placé dans une source de travail de pression égale à sa pression initiale.
- La transformation du système est **adiabatique** s'il ne peut échanger de l'énergie que sous forme de travail.



## 1.6 Travail des forces de pression

• Soit un système fermé dont l'enveloppe est soumise à une pression extérieure  $p_{ext}$  ; soit une transformation élémentaire au cours de laquelle le volume total du système varie de  $dV$ . Le travail élémentaire  $\delta W$  des forces de pressions auxquelles est soumis le système vaut :

$$\delta W = -p_{ext} dV \quad (25-1)$$

Le travail fourni à un système donné ou reçu par lui lors d'une transformation qui le fait passer d'un état initial dans lequel son volume est  $V_i$  à un état final dans lequel il devient  $V_f$ , est ainsi :

$$W = \int_{V_i}^{V_f} \delta W = - \int_{V_i}^{V_f} p_{ext} dV \quad (25-2)$$

• L'augmentation du volume du système se traduit par un travail négatif : le système fournit de fait du travail au milieu extérieur et il est dit **moteur**.

Si son volume diminue, les forces de pression que l'extérieur exerce sur son enveloppe lui fournissent ainsi du travail : le système est **résistant**.

• Le travail échangé entre un système fermé et l'extérieur est nul si la transformation est isochore :  $W = 0$ .

Sur le diagramme de Clapeyron, l'opposé du travail est représenté par l'aire comprise entre la courbe  $p(V)$  décrivant l'évolution du système, l'axe des abscisses et les droites verticales d'abscisses  $V = V_i$  et  $V = V_f$ .

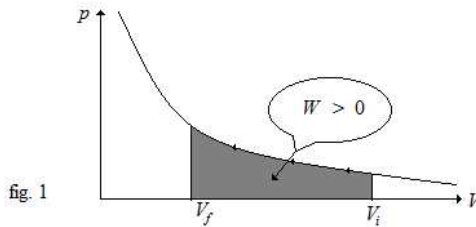


fig. 1



*Attention, contrairement à la mécanique, en thermodynamique, le travail est positif s'il est effectivement reçu par le système et désigné alors comme travail résistant du système. Il est négatif s'il est fourni par lui au milieu extérieur et désigné comme travail moteur.*

## 1.7 Expression du travail

• Le calcul du travail au cours d'une transformation nécessite de connaître la nature de cette dernière et les conditions réversibles ou non de sa réalisation. Le caractère quasi-statique emporte la réversibilité pour les transformations que nous rencontrons.

Un système fermé constitué de  $n$  molécules de gaz parfait occupe un volume initial  $V_i$  et un volume final  $V_f$ . Les états d'équilibre initial et final doivent satisfaire à l'équation d'état :  $p_i V_i = n R T_i$  et  $p_f V_f = n R T_f$ , en indiquant par  $i$  les paramètres d'état initiaux et par  $f$  les paramètres finaux.

• **Travail échangé lors d'une transformation isotherme.**

Par définition de la transformation,  $T_i = T_f$  et elle est quasi-statique : elle est une succession d'états d'équilibre pour lesquels la pression du gaz est définie et uniforme en son sein à tout instant et égale à la pression extérieure, puisque la réalisation d'un état de quasi-équilibre impose que l'équilibre mécanique soit réalisé donc que  $p = p_{ext}$  à chaque instant. Ainsi :

$$p_{ext} = p = \frac{nRT_i}{V}$$

et

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} p_{ext} dV = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT_i}{V} dV = nRT_i \ln\left(\frac{V_i}{V_f}\right).$$

• **Travail échangé lors d'une transformation monobare.**

Par définition de la transformation,  $p_{ext} = p_f = cste$ , différente *a priori* de la pression initiale du système. Le travail reçu par le système est donc :

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} p_{ext} dV = - p_{ext} (V_f - V_i).$$

• **Travail échangé lors d'une transformation isobare.**

Une transformation isobare est monobare quasi-statique donc à tout instant la pression du gaz est égale à la pression extérieure et à sa pression initiale. Ainsi, à tout instant la pression  $p$  du gaz est  $p = p_{ext} = p_i = p_f$ . Le travail reçu par le système vaut :

$$W = - p (V_f - V_i).$$

• **Travail échangé lors d'une transformation adiabatique.**

Deux cas sont à distinguer selon que la transformation est réversible ou non.

– Si la transformation est irréversible, nous ne pourrions exprimer le travail qu'en la considérant comme monobare ou bien par la connaissance *a priori* de l'état final du système, à travers les conséquences du premier principe de la thermodynamique (cf. §2). Si la transformation peut être vue comme monobare,

$$W = - p_{ext} (V_f - V_i).$$

– Si la transformation est réversible, la pression du gaz est en permanence égale à la pression extérieure. Cependant le caractère adiabatique de la transformation fait que la pression et la température changent avec la variation de volume du système. La seule loi des gaz parfaits ne suffit alors plus pour exprimer la pression  $p$  en fonction de la variable d'état extensive  $V$  :

$$p = nR \frac{T(V)}{V}.$$

La loi traduisant cette double modification de la pression et de la température en fonction du volume du gaz parfait est la **loi de Laplace** qui stipule :

$$p V^\gamma = cste \quad \text{ou} \quad T V^{\gamma-1} = cste' \quad \text{ou} \quad p^{1-\gamma} T^\gamma = cste''$$

où  $\gamma$  sera défini ultérieurement.

Ces relations expriment toutes trois la même loi, mais en des variables différentes. Pour le calcul du travail, seule la première forme est intéressante :

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} p dV = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{p_i V_i^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{p_i V_i}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} - 1 \right]. \quad (25-3)$$



*Il est toujours prudent de vérifier lors du calcul d'un travail l'homogénéité du résultat trouvé et la cohérence du signe de l'expression avec le signe supposé tiré de l'analyse physique de la variation de volume.*

## 2. Premier principe de la thermodynamique

### 2.1 La conservation généralisée de l'énergie

- L'énergie mécanique d'un point matériel ou d'un solide parfait est définie comme la somme de son énergie cinétique dans un référentiel donné et de son énergie potentielle dans les champs de force extérieurs.

Si le référentiel est galiléen, l'énergie mécanique du point ou du solide se conserve lorsqu'il n'est soumis qu'à des forces conservatives, sa variation ne pouvant provenir que des travaux des forces ne dérivant pas d'une énergie potentielle.

- L'expérience atteste qu'un solide en translation sur un sol un peu rugueux perd de l'énergie mécanique. Simultanément, le sol comme le solide voient localement un champ de températures plus élevées que celle de leur milieu ambiant apparaître à leurs surfaces. Un examen à l'échelle intime du solide et du sol montrerait que ces variations de température correspondent à des variations des énergies mécaniques des constituants du sol et du solide. Ainsi, l'énergie mécanique perdue à notre échelle existe sous une forme microscopique, répartie entre les constituants du sol et du solide. Ce constat nous invite à créer une fonction énergie mécanique totale des particules du sol et du solide qui serait conservée.

### 2.2 Premier principe de la thermodynamique

- La définition de l'énergie mécanique du solide en translation ignore la structure atomique de la matière qui le constitue. Or, ses constituants possèdent une énergie cinétique d'agitation thermique  $\mathcal{E}^*$ , invisible à notre échelle, et nous ne constatons dans le référentiel d'étude que le terme macroscopique  $\frac{1}{2}Mv_G^2$ , exprimée par :

$$\mathcal{E}^* = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{1}{2} M v_G^2$$

où  $M = \sum_i m_i$  est la masse du solide.

Ces particules constitutives ont entre elles des interactions que l'on postule dériver d'une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p^{(int)}$ , fonction des coordonnées de position des constituants du système.

- L'énergie mécanique totale du système est donc la somme de son énergie cinétique dans le référentiel d'étude, de l'énergie potentielle interne et de l'énergie potentielle du système dans les champs de force extérieurs :

$$\mathcal{E}_{tot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \mathcal{E}_p^{(ext)} + \mathcal{E}_p^{(int)} = \frac{1}{2} M v_G^2 + \mathcal{E}^* + \mathcal{E}_p^{(ext)} + \mathcal{E}_p^{(int)}.$$

Or, l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  du solide en translation est :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} M v_G^2 + \mathcal{E}_p^{(ext)}.$$

- Si on appelle **énergie interne**  $U$  la somme de l'énergie cinétique microscopique et de l'énergie potentielle des interactions internes au système,

$$U = \mathcal{E}^* + \mathcal{E}_p^{(int)},$$

alors, l'énergie mécanique totale du système apparaît comme :

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_m + U$$

De ce qui précède découle l'énoncé du **premier principe de la thermodynamique** :

*On postule l'existence pour chaque système fermé d'une fonction d'état extensive, appelée l'énergie interne, notée  $U$ , somme de l'énergie cinétique d'agitation thermique dans le référentiel barycentrique et de l'énergie potentielle d'interaction entre ses constituants :*

$$U = \mathcal{E}^* + \mathcal{E}_p^{(int)},$$

*qui ne dépend que d'un petit nombre de paramètres d'état.*

*La variation entre deux états d'équilibre de la somme de son énergie cinétique macroscopique dans un référentiel galiléen et de son énergie interne est égale à la somme algébrique de tous les travaux, notés  $W$  et de tous les transferts thermiques, notés  $Q$ , échangés entre le système et l'extérieur :*

$$\Delta \left( \frac{1}{2} M v_G^2 + U \right) = W + Q. \quad (25-4)$$

- En tant que fonction d'état, la variation de l'énergie interne d'un système évoluant d'un état d'équilibre à un autre est indépendante de la suite des transformations subies entre son état initial et son état final : seuls la définissent les caractéristiques des états d'équilibre initial et final de la transformation. Au contraire, le travail  $W$  et la chaleur  $Q$  échangés dépendent du chemin suivi pour atteindre l'état final.
- La définition de l'énergie interne est compatible avec celle que nous avons donnée pour le gaz parfait (cf. fiche 24 relations (24-6) et (24-8)) puisque pour ce dernier les particules sont supposées ponctuelles et sans interaction entre elles, donc  $\mathcal{E}_p^{(int)} = 0$ .

Un système peut ainsi varier son énergie interne soit en échangeant du travail avec l'extérieur, soit par transfert thermique, soit par un apport sous les deux formes dans n'importe quelle proportion ! De fait, le premier principe de la thermodynamique ne distingue pas le travail mécanique des échanges thermiques sur le plan strictement énergétique. Il établit une équivalence entre le travail et la chaleur.

### • Remarques

– Il est fréquent que l'énergie cinétique du système dans le référentiel galiléen d'étude soit nulle aux états initial et final. Le premier principe prend alors la forme simplifiée :

$$\Delta U = W + Q. \quad (25-5)$$

– Dans la comptabilité des travaux, il est habituel, sauf exception, de négliger celui du poids du système devant ceux des autres forces, celles de pression en premier lieu, approximation justifiée par les ordres de grandeur respectifs de ces travaux.

– Une même quantité d'énergie peut être considérée soit comme un travail soit comme un transfert thermique. Ainsi, l'énergie fournie à une résistance qui chauffe un fluide contenu dans une enceinte est un transfert thermique si le système étudié est le fluide ; elle est un travail (électrique) si le système étudié sont les électrons qui transportent l'électricité à travers elle.

## 2.3 Exemples d'application

- Lors d'une transformation isochore, le travail fourni au système est nul. La variation de son énergie interne ne peut provenir que d'un échange thermique avec l'extérieur :  $\Delta U|_{V=cste} = Q$ .
- Lors d'une transformation adiabatique, les transferts thermiques avec l'extérieur sont nuls et la variation de l'énergie interne du système ne peut provenir que d'un travail échangé avec l'extérieur :  $\Delta U|_{adiab.} = W$ .

• L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température : c'est la **première loi de Joule**. Lors d'une transformation isotherme, son énergie interne ne varie pas :  $\Delta U|_{T=cste} = 0$ . Le travail qu'il échange avec le milieu extérieur est opposé aux transferts thermiques qu'il a avec lui :  $W = -Q$ . Au cours de la transformation, tout travail reçu par le système est restitué thermiquement au thermostat ou tout transfert thermique reçu est transformé en travail par le système.

• Enfin, lors d'une transformation isobare, il y a échange à la fois de travail et de chaleur en quantités inégales.

## 2.4 L'enthalpie d'un système

• Il est intéressant d'introduire, pour les systèmes pour lesquels la pression est un paramètre d'état pertinent, une autre fonction d'état, l'**enthalpie**, notée  $H$ , définie par la relation :

$$H = U + pV. \quad (25-6)$$

$U$  et  $pV$  ayant la dimension d'une énergie, il en est de même pour l'enthalpie ; son unité est le joule.

• La variation de l'enthalpie au cours d'une transformation isobare est égale au transfert thermique avec l'extérieur. En effet, la transformation étant isobare, le travail algébrique reçu par le système est  $W = -p(V_f - V_i)$ .

Or,  $\Delta H = \Delta U + \Delta(pV)$ , soit  $\Delta H = W + Q + p\Delta V$ , d'où le résultat :

$$\Delta H|_{p=cste} = Q.$$

## 2.5 Capacités thermiques

• Précisons ce qui a été présenté fiche 24 §3 par les relations (24-9) et (24-10). Pour un système en évolution isochore, la variation  $dT$  de sa température résulte d'un transfert thermique et provoque une variation correspondante  $dU = \delta Q$  de son énergie interne :  $dU = C_v dT$  définit la **capacité thermique à volume constant** du système.

Le même système subissant une même variation de température à pression constante voit son enthalpie varier de  $dH = \delta Q' = C_p dT$ , ce qui définit la **capacité thermique à pression constante** du même système.

Un coefficient  $\gamma$  sans dimension apparaît dans les expressions de la loi de Laplace pour un gaz parfait. Il est défini comme le rapport de la capacité thermique du gaz parfait à pression constante à celle à volume constant :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}. \quad (25-7)$$

• L'enthalpie d'un gaz parfait n'est fonction que de sa température absolue car  $pV = nRT$ , d'où :  $H = U(T) + nRT$ . C'est la **seconde loi de Joule**.

$dH = dU + d(nRT)$ , soit, après simplification par  $dT$ ,  $C_p = C_v + nR$ . On en déduit l'expression des capacités thermiques de  $n$  moles de gaz parfait :

$$C_v = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}. \quad (25-8)$$

Elles représentent les quantités de chaleur à apporter au gaz parfait pour élever sa température de un kelvin en opérant à volume constant ou à pression constante.

Pour un gaz parfait  $\gamma$  est constant ; s'il est monoatomique,  $\gamma = \frac{5}{3}$ .

- À pression constante, le gaz se dilate lors de la variation  $\Delta T > 0$ , ce qu'il ne peut faire à volume constant. Il doit donc lutter contre les forces de pression extérieures s'exerçant sur son enveloppe, ce qui se traduit par un travail à fournir. Aussi la quantité d'énergie à lui apporter est plus importante pour obtenir une même élévation de sa température :  $\gamma$  est un coefficient toujours supérieur à l'unité.

- Un gaz réel peut dans certaines circonstances être considéré comme un gaz parfait auquel on associerait une valeur de  $\gamma$  différente de celle du gaz parfait monoatomique.

Par exemple, l'air est souvent assimilé à un gaz parfait avec  $\gamma \approx 1,4$ .

- Les capacités thermiques molaires à volume constant et à pression constante du gaz parfait sont données par :

$$c_{vm} = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{C_v}{n} \quad \text{et} \quad c_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \frac{C_p}{n} . \quad (25-9)$$

Elles représentent les quantités de chaleur à apporter à une mole de gaz parfait pour élever sa température de un kelvin en opérant à volume constant ou à pression constante.

- Enfin, si  $M$  est la masse molaire du gaz réel auquel on associe un gaz parfait de coefficient  $\gamma$  et de même masse molaire, on exprime les capacités thermiques massiques à volume constant et à pression constante par :

$$c_v = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{R}{M} = \frac{c_{vm}}{M} \quad \text{et} \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} = \frac{c_{pm}}{M} . \quad (25-10)$$

## 2.6 Cas des phases condensées

- Nous avons vu (cf. fiche 24) que ces dernières étaient très peu compressibles (par changement de pression) et dilatables (par changement de température). Les travaux qu'elles reçoivent du milieu extérieur sont négligeables devant les échanges thermiques caractérisant leurs évolutions.

Celles-ci peuvent donc être tenues de prime abord pour isochore ou pour isobare, sans commettre une grosse erreur sur les résultats obtenus.

Cependant, l'analyse conduit à reconnaître que le transfert thermique entre le milieu extérieur et la phase condensée entraîne une variation de son volume, certes faible en valeur relative, mais contre laquelle il est impossible de lutter à moins d'imaginer une enceinte capable de résister aux pressions extrêmes que leur confinement engendrerait lors d'une dilatation de la phase.

Comme le plus souvent c'est l'atmosphère de l'air qui règne au-dessus ou autour de la phase condensée, il est raisonnable de considérer que son évolution s'effectue à pression constante et donc préférable de considérer la variante du premier principe à travers une variation de l'enthalpie pour écrire :

$$dH = C_p dT = \delta Q \quad \text{soit} \quad \Delta H = \int_{T_i}^{T_f} C_p dT = Q$$

- L'eau liquide possède une capacité thermique massique à pression constante environ égale à  $4,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**Sauriez-vous répondre ?**

**Exercice 1 :** Un cylindre vertical de section  $s = 300 \text{ cm}^2$ , fermé par un piston mobile de masse  $m = 500 \text{ g}$  forme une enceinte diatherme. Cette enceinte est placée dans l'atmosphère à la température de  $T_a = 293 \text{ K}$  et à la pression  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ . Elle enferme  $n = 0,2$  moles d'air, que l'on considérera comme un gaz parfait de rapport des capacités  $\gamma = 1,4$  et de masse molaire  $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ .

On appuie alors sur le piston de manière à ce qu'il se déplace très lentement, jusqu'à ce que le volume initial occupé par le gaz ait été divisé par deux.

Calculez le travail et la chaleur fournis au gaz au cours de la transformation.

**Exercice 2 :** On reprend la situation présentée à l'exercice précédent à partir de l'état final du gaz. On relâche subitement le piston.

Calculez le travail et la chaleur fournis au gaz au cours de la transformation.

Que conclure des travaux fournis et récupérés au cours des deux transformations ?

**Exercice 3 :** Un morceau de fer de masse  $m_F = 100 \text{ g}$ , porté à la température initiale  $T_F = 350^\circ\text{C}$  est plongé dans l'eau d'un calorimètre (récipient adiabatique).

La masse d'eau est  $m_e = 250 \text{ g}$  et sa température initiale est  $T_e = 20^\circ\text{C}$ .

On rappelle les capacités thermiques massiques à pression constante de l'eau et du fer :  $c_p^{(e)} = 4,19 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et  $c_p^{(F)} = 0,449 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

Déterminez la température finale du système à l'équilibre en négligeant les fuites thermiques.

# 26 Thermodynamique

## 3. changements d'état

### 1. Les états de la matière

#### 1.1 Le corps pur

Un corps pur est un matériau composé d'une seule substance, par opposition aux mélanges : c'est un ensemble d'entités (atomes ou molécules) identiques entre elles et de même composition chimique.

#### 1.2 Les états classiques d'un corps pur

Un corps pur peut exister à priori sous trois formes selon les conditions de température, de pression ou de volume accordé à ses entités constituantes :

**a) la forme solide** caractérisée par une forme propre en l'absence de contenant et par une énergie d'interaction entre entités voisines très supérieure à leurs énergies cinétiques respectives (dans un référentiel où le centre d'inertie du corps serait au repos, par exemple).

Les entités ne peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres que sur des distances petites devant celles existant en moyenne entre elles, et qui sont du même ordre de grandeur que les dimensions caractéristiques de ces entités. Elles demeurent ainsi autour de leurs positions d'équilibre respectives.

**b) la forme liquide** qui ne possède pas de forme propre et nécessite un contenant à bords pour être doté d'un volume.

Elle est caractérisée par une énergie d'interaction entre entités voisines du même ordre de grandeur que leurs énergies cinétiques et une distance moyenne entre entités légèrement supérieure - sauf exception (l'eau) - à celle qui est la leur dans un solide.

Les entités peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres sur des distances grandes devant la distance moyenne existant entre elles.

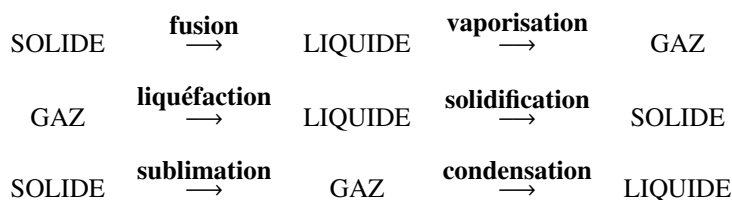
**c) la forme gazeuse** qui ne possède pas de forme propre et nécessite un contenant fermé dont elle occupe alors tout le volume.

Elle est caractérisée par une énergie d'interaction entre entités petite devant leurs énergies cinétiques et une distance moyenne entre entités grande devant les dimensions caractéristiques des entités constitutives.

Ces dernières peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres sur des distances grandes devant la distance moyenne existant entre elles.

#### 1.3 Transformations entre états


Le passage de l'un des états à un autre se fait en procurant ou retirant de l'énergie au corps pur. La dénomination de ces passages est la suivante :





## 1.4 Phase du corps pur

On appelle **phase d'un corps pur** une partie homogène de ce corps, c'est-à-dire une partie où le corps est dans un des trois états définis ci-dessus. Les changements d'état sont aussi dénommés **changements** ou **transitions de phase**.

 *L'homogénéité n'entraîne pas obligatoirement l'uniformité des paramètres intensifs. Il peut exister des gradients de température, de pression, etc ... dans une même phase*

Il y a **équilibre diphasé du corps pur** lorsque deux phases d'un corps pur coexistent.

## 2. Changements d'état

### 2.1 Transition de phase du corps pur à pression constante

- Une masse donnée  $m$  d'un corps pur à l'état solide est placée dans une enceinte diathermane déformable dont il épouse la forme et sur laquelle s'exerce une pression fixée qui demeurera constante.

Si nous chauffons l'enceinte, la température du corps solide augmente, il se dilate et le volume de l'enceinte augmente jusqu'à ce que, pour une température donnée caractéristique du corps et de la pression choisie  $T_f(p)$  la première goutte de liquide du corps pur apparaisse. Le solide entre en fusion.

À partir de ce point particulier, le chauffage n'augmente plus la température du contenu de l'enceinte mais modifie la proportion liquide/solide du corps pur tant que coexistent ses deux états liquide et solide, c'est-à-dire tant qu'il est dans un équilibre diphasé.

Le volume de l'enceinte varie car, en général, la phase liquide possède une masse volumique inférieure à celle de la phase solide et, par conséquence, plus le solide a fondu plus le volume laissé au corps pur a dû croître.

- Pendant l'existence de l'équilibre diphasé, la composition physique du corps pur, à savoir sa masse solide  $m_s$  et sa masse liquide  $m_l$ , doivent satisfaire la conservation de la matière :

$$m = m_s + m_l.$$

Si nous connaissons les masses volumiques ou leurs inverses, les volumes massiques, de chaque phase à la température de fusion à laquelle l'équilibre survient,  $\rho_s(T_f) = [v_s(T_f)]^{-1}$  et  $\rho_l(T_f) = [v_l(T_f)]^{-1}$ , le volume  $V$  occupé par le corps pur est alors :

$$V = m_s v_s + m_l v_l.$$

- Une fois tout le solide fondu, le chauffage élève à nouveau la température du corps pur dans l'état liquide.

Il se dilate, jusqu'à atteindre la température d'ébullition  $T_e(p)$ , caractéristique, comme la température de fusion, du corps pur et de la pression sous laquelle nous opérons. C'est la température à laquelle apparaît la première bulle de vapeur.

Le processus de vaporisation du liquide débute pendant lequel la température ne varie plus malgré l'apport d'énergie du chauffage.

La substance se vaporise et la masse de liquide  $m_l$  diminue au profit de la masse de vapeur  $m_v$ . La conservation de la matière implique que :

$$m = m_l + m_v.$$

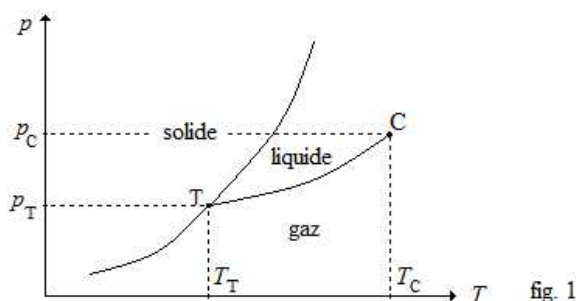
En désignant par  $v_l(T_e)$  et  $v_v(T_e)$  les volumes massiques des phases liquide et vapeur du corps pur à la température d'ébullition correspondant à la pression, le volume occupé par la substance est :

$$V = m_l v_l + m_v v_v.$$

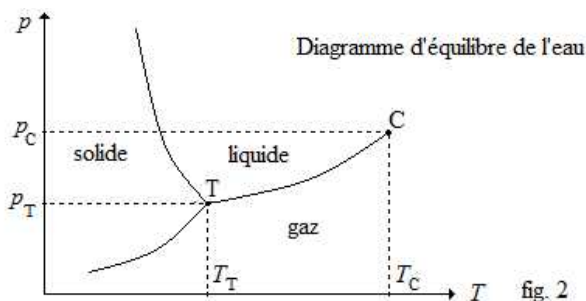
- Lorsque tout le liquide est vaporisé, le système est purement gazeux et le chauffage augmentera à nouveau la température du gaz.
- En refroidissant la vapeur de la substance sous la même pression que celle choisie dans la première partie de l'expérience et en opérant à nouveau de manière isobare, on observe les transitions de phase inverses aux températures auxquelles elles s'étaient manifestées : la liquéfaction du gaz d'abord, à la température  $T_e(p)$  puis le refroidissement du liquide et enfin sa solidification à la température  $T_f(p)$ .
- Si la pression de travail est suffisamment faible, cette notion dépend naturellement du corps pur considéré, nous observerons directement la transition solide - vapeur, donc la sublimation du corps pur, sans passage par l'état liquide à une température, la température de sublimation, fonction de la pression  $T_s(p)$ .
- Au contraire, pour une pression opératoire suffisamment élevée, supérieure à une valeur que l'on appelle la pression critique, le solide passe dans un état appelé état fluide, indistinctement liquide ou gazeux.

## 2.2 Diagramme d'équilibre ( $T - p$ )

- Lorsque l'on place les températures de changements d'état pour toutes les pressions accessibles à l'expérience, on obtient en première approche un diagramme comportant trois branches qui sont les courbes d'équilibre solide $\rightleftharpoons$ liquide, liquide $\rightleftharpoons$ vapeur et solide $\rightleftharpoons$ vapeur. En général, le diagramme d'équilibre possède l'allure suivante :



- Pour l'eau, en revanche, on observe une exception due à la pente négative de la courbe d'équilibre solide  $\rightleftharpoons$  liquide.



### • Remarques

– Pour l'eau à la pression atmosphérique normale de  $p_0 = 101325$  Pa, la température de fusion de la glace est  $T_f(p_0) = 273,15$  K et la température d'ébullition est  $T_e(p_0) = 373,15$  K. Les coordonnées du point critique au-delà duquel les états liquide et gazeux se confondent en un état fluide sont  $p_c = 22,1 \cdot 10^6$  Pa et  $T_c = 647,3$  K.

– Il est fréquent qu'en fonction de la pression, la phase solide soit le siège de transitions de phase correspondant à des états différemment ordonnés de la matière.

- Le point de concours des courbes d'équilibre est appelé **point triple** du corps pur. Il est unique pour chaque corps pur et correspond à la pression et à la température pour lesquelles le corps pur peut exister sous ses trois phases simultanément. À toutes les autres températures et/ou pressions, il ne peut exister que sous l'un des trois états ou dans un équilibre diphasé.

## 2.3 Monovariance des équilibres diphasés

Le caractère univoque de la relation entre la température d'un changement d'état et la pression à laquelle il peut se produire fait que la seule latitude existant, une fois choisie la température ou la pression de changement d'état, est le volume accordé au corps pur. On dit que l'équilibre diphasé est **monovariant**.

## 2.4 Équilibre liquide $\rightleftharpoons$ vapeur

- La représentation des isothermes d'une quantité donnée de matière à l'état liquide ou gazeux dans le diagramme de Clapeyron donne la figure 3.

Sur chaque isotherme, tant que la température est inférieure à la température critique  $T_c$  de la substance, un palier de pression le long duquel la pression demeure constante malgré la variation de volume du système apparaît. C'est la **pression de vapeur saturante** ou **pression de saturation**.

Sur chaque isotherme,  $R$  est le **point de rosée** : c'est le point auquel apparaît la première goutte de liquide lorsque l'on comprime la vapeur de la substance ou auquel disparaît la dernière goutte de liquide si on évaporait sa phase liquide.

Le point  $E$  est appelé **point d'ébullition** : c'est le point auquel apparaît la première bulle de vapeur lors de l'évaporation d'un liquide ou auquel disparaît la dernière trace de vapeur si l'on est en train de liquéfier sa vapeur. Les points du palier de saturation correspondent aux états d'équilibre diphasé possibles liquide  $\rightleftharpoons$  vapeur de la substance.

Le lieu des points de rosée, jusqu'au point critique, est appelé **courbe de rosée**. Celui des points d'ébullition est dénommé **courbe d'ébullition**. La réunion de la courbe de rosée et de la courbe d'ébullition est appelée **courbe de saturation**.

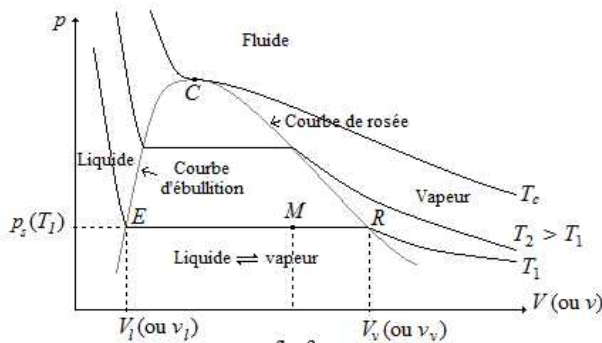


fig. 3

- Comme l'on travaille avec une masse  $m$  donnée de la substance pour obtenir le tracé des isothermes, l'axe des abscisses le long duquel sont reportés les volumes  $V$  du système renvoie au volume massique  $v = \frac{V}{m}$  du système.

L'ordonnée du palier d'équilibre diphasé est la pression de saturation à la température de l'isotherme  $p_s(T)$ , elle est la même pour tous les états d'équilibre diphasé à cette température. L'abscisse du point d'ébullition fournit le volume de l'état liquide de la substance  $V_l$  lorsque

débute sa vaporisation, et le volume massique de la phase liquide dans l'équilibre diphasé  $v_l = \frac{V_l}{m}$ .

DE même, l'abscisse du point de rosée fournit le volume  $V_v$  de la vapeur saturante au moment où débute la liquéfaction et donc le volume massique de la phase gazeuse de la substance pour tous les équilibres diphasés à cette température :  $v_v = \frac{V_v}{m}$ .

• Ainsi, si le volume accordé à une masse  $m$  de la substance à la température  $T$  est  $V$ , si  $V_l < V < V_v$ , la substance est en équilibre diphasé à la température  $T$  et à la pression de saturation  $p_s(T)$ .

Désignant par  $m_l$  et  $m_v$  les masses de la phase liquide et de la phase vapeur dans l'équilibre diphasé et par  $x_l = \frac{m_l}{m}$  et  $x_v = \frac{m_v}{m}$  les **fractions massiques** de chaque phase, nous avons :  
 $1 = x_l + x_v$  et  $v = \frac{V}{m} = x_l v_l + x_v v_v$ . Nous en déduisons :

$$x_l = \frac{v_v - v}{v_v - v_l} \quad \text{et} \quad x_v = \frac{v - v_l}{v_v - v_l} \quad (26-1)$$

Si  $M$  est le point représentatif du système en équilibre diphasé dans le diagramme de Clapeyron, les fractions massiques sont alors représentées par les rapports :

$$x_l = \frac{MR}{ER} \quad \text{et} \quad x_v = \frac{EM}{ER}$$

C'est la  **règle des moments** .

### 3. Aspects énergétique des transitions de phase

#### 3.1 Enthalpie de transition de phase

• On appelle **enthalpie** ou **chaleur latente de transition de phase** ou **de changement d'état**, notée  $L$  et indicée de manière à caractériser la transition considérée, l'énergie à fournir par unité de masse du corps pur constituant le système pour le faire passer de l'état solide à l'état liquide, de l'état liquide à l'état gazeux ou de l'état solide à l'état gazeux à la température  $T$  et à la pression correspondante du changement d'état considéré. Dans le cas des transformations inverses, il s'agit de l'énergie à retirer à l'unité de masse du système.

• La dimension d'une enthalpie de transition de phase est celle du rapport d'une énergie à une masse, soit le carré d'une vitesse  $L^2 \cdot T^{-2}$ , mais dont l'unité conserve la trace de la signification physique, le joule par kilogramme de symbole  $J \cdot kg^{-1}$ .



*Bien que son nom n'en porte pas trace, les enthalpies de transition de phase sont des grandeurs massiques. Officiellement, elles devraient être notées  $\Delta h_f$  pour la fusion,  $\Delta h_v$  pour la vaporisation et  $\Delta h_{sub}$  pour la sublimation.*

• Les enthalpies de transition de phase sont en général fonction de la température à laquelle on souhaite opérer, et il est possible à partir de mesures expérimentales d'obtenir des formules empiriques convenables, telle celle de Regnault pour la chaleur latente de vaporisation de l'eau :

$$L_v = 2540 - 2,93 t \quad J \cdot g^{-1},$$

où la température est exprimée en  $^{\circ}C$  et valable sur l'intervalle de température de transition de  $100^{\circ}C$  à  $200^{\circ}C$ . Cette formule est à relier à  $p_s(T)$  ou  $p_s(t)$ .

### 3.2 Exemple d'application

Détermination de l'énergie thermique  $Q$  à fournir pour transformer une masse  $m$  de glace à la température initiale  $T_i$  en vapeur d'eau à une température  $T_e$ , sous une pression  $p$  constante donnée pour laquelle la température de fusion est  $T_f$  et celle d'ébullition ou de vaporisation  $T_v$ .

Comme nous opérons à pression constante, l'énergie thermique  $Q$  est égale à la variation d'enthalpie  $\Delta H$  du système dans la succession suivante d'états :

- porter la glace de sa température initiale à sa température de fusion, ce qui nécessite la chaleur :

$$Q_{i \rightarrow \text{fusion}} = \Delta H_1 = m c_{p,\text{glace}} (T_f - T_i),$$

- apporter l'énergie pour la faire fondre à la température de fusion,  $Q_f = \Delta H_2 = m L_f$ ,
- puis chauffer le liquide obtenue de la température de fusion à celle de vaporisation  $T_e$ , soit

$$Q_{\text{ech.liq.}} = \Delta H_3 = m c_{p,\text{liq}} (T_v - T_f)$$

- transformer le liquide en vapeur à la température  $T_v$ ,  $Q_v = \Delta H_4 = m L_v$ ,
- échauffer la vapeur d'eau obtenue de la température  $T_v$  à la température finale  $T_e$ ,

$$Q_{\text{ech.vap.}} = \Delta H_5 = m c_{p,\text{vap}} (T_e - T_v),$$

où  $c_{p,\text{glace}}$ ,  $c_{p,\text{liq}}$ ,  $L_f$  et  $L_v$  désignent respectivement les capacités thermiques massiques de la glace et de l'eau à pression constante (supposées indépendantes de la température) et les chaleurs latentes de fusion et de vaporisation.

L'énergie totale à apporter est ainsi :

$$\Delta H = \sum_{k=1}^5 \Delta H_k.$$

- Si les intervalles de températures sont tels que les capacités thermiques massiques ne peuvent plus être considérées comme constantes mais sont fonction de la température, alors les termes du type  $m c_p \Delta T$  doivent être remplacés par  $m \int_{T_i}^{T_i + \Delta T} c_p(T) dT$ .

### 3.3 Calcul des grandeurs énergétiques

- Les caractéristiques de l'état d'équilibre d'un système fermé monophasé sont déterminées à partir de celles de l'état initial, de la conservation de la quantité de matière et de la nature de la transformation.

Pour les systèmes diphasés, le calcul des grandeurs énergétiques se fait à partir des grandeurs massiques correspondantes en utilisant le caractère extensif de l'énergie interne.

- Ainsi, soit un équilibre diphasé liquide  $\rightleftharpoons$  vapeur d'un corps pur de masse  $m$  de fractions massiques liquide  $x_l$  et vapeur  $x_v$ . Si l'on désigne par  $u_l$  (resp.  $h_l$ ) et  $u_v$  (resp.  $h_v$ ) les énergies (resp. enthalpies) massiques de la phase liquide et de la phase vapeur, alors l'énergie interne du système est postulée, selon le premier principe de la thermodynamique, être égale à la somme de l'énergie interne des deux phases en équilibre :  $U = U_l + U_v$  avec  $U_l$  l'énergie interne de la phase liquide, égale à  $m_l u_l$  ou  $m x_l u_l$  et  $U_v$  l'énergie interne de la phase vapeur, égale à  $m_v u_v$  ou  $m x_v u_v$ . Ainsi,

$$U = m (x_l u_l + x_v u_v)$$

Il en est de même pour l'enthalpie du système :

$$H = m (x_l h_l + x_v h_v)$$

- Lors d'une transformation du système au cours de laquelle seule change la composition des phases, en demeurant à la même température et à la pression d'équilibre correspondante, les variations de l'énergie interne et de l'enthalpie du système s'expriment à l'aide des mêmes grandeurs massiques. Si l'on appelle  $\Delta x_l$  et  $\Delta x_v$  les variations des fractions massiques de chaque phase, il est évident que  $\Delta x_l = -\Delta x_v$  et

$$\Delta U = m \Delta x_l (u_l - u_v) = m \Delta x_v (u_v - u_l)$$

et

$$\Delta H = m \Delta x_l (h_l - h_v) = m \Delta x_v (h_v - h_l) = m \Delta x_v L_v$$

D'après le premier principe de la thermodynamique,  $\Delta U = W + Q$  et la transformation étant isobare,  $\Delta H = Q$ , ce qui permet d'accéder au travail fourni au système pour faire changer sa composition.

- Si la transformation se déplace sur le diagramme ( $p - T$ ) le long de la courbe d'équilibre et modifie à la fois la composition et la température d'équilibre, le système demeurant diphasé, ce ne sont plus les mêmes valeurs massiques dans les deux états d'équilibre. Par conséquent :

$$\Delta U = m (x_l^{(f)} u_l^{(f)} + x_v^{(f)} u_v^{(f)}) - m (x_l^{(i)} u_l^{(i)} + x_v^{(i)} u_v^{(i)})$$

et

$$\Delta H = m (x_l^{(f)} h_l^{(f)} + x_v^{(f)} h_v^{(f)}) - m (x_l^{(i)} h_l^{(i)} + x_v^{(i)} h_v^{(i)})$$

Les grandeurs énergétiques massiques nécessaires pour les substances couramment utilisées dans l'industrie thermique à diverses températures sont rassemblées dans des tables numériques.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Un calorimètre adiabatique enferme une masse  $m_e$  d'eau, de capacité thermique massique à pression constante  $c_{p,e}$  à la température initiale  $T_e > 0^\circ\text{C}$ , sous la pression atmosphérique normale. On y plonge une masse  $m_g$  de glace sortant d'un congélateur à la température initiale  $T_g < 0^\circ\text{C}$ , de capacité thermique massique  $c_{p,g}$ . L'enthalpie de fusion de la glace est  $L_f$ .

Décrivez l'état d'équilibre final du système en fonction de la masse de glace introduite.

**Exercice 2 :** 5 mL d'éthanol liquide  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}_{(l)}$  à la température  $T = 20^\circ\text{C}$  sont introduits dans une enceinte de volume constant  $V = 5\text{ L}$  préalablement vide.

L'enceinte diathermane est maintenue à la température d'introduction du liquide. On considère que la vapeur d'éthanol se comporte comme un gaz parfait.

Données : densité de l'éthanol  $d = 0,789$  ; pression de vapeur saturante à cette température  $p_s = 587\text{ hPa}$  ; enthalpie de vaporisation  $L_v = 925\text{ J.g}^{-1}$ .

1. Déterminer les volumes massiques à l'état liquide  $v_l$  et à l'état gazeux  $v_v$  de l'éthanol à cette température.
2. Déduisez-en l'état d'équilibre du système et ses fractions massiques liquide et gazeuse s'il est à l'état diphasé.
3. Calculez l'échange thermique avec le thermostat lors de la mise en équilibre.

# 27 Thermodynamique

## 4. second principe

### 1. Du premier au second principe

#### 1.1 Les silences du premier principe

- Le premier principe de la thermodynamique établit une équivalence entre les variations d'énergie tirées d'un travail macroscopique et celles issues des transferts thermiques.

Cette équivalence signifie *a priori* que tout travail peut être transformé en chaleur et toute chaleur en travail. En effet, le travail total  $W_c$  et la chaleur totale  $Q_c$  échangés avec l'extérieur d'un système suivant un cycle sont tels que  $W_c = -Q_c$ .

- Il est cependant des transformations non interdites *a priori* par le premier principe qui n'ont pourtant jamais été observées. Par exemple, après la mise en équilibre thermodynamiques de deux corps de températures initiales distinctes dans un calorimètre, jamais le système n'évolue vers un état où les corps prennent spontanément des températures différentes.

De même, la détente dans le vide d'un gaz comprimée à l'intérieur d'une enceinte ne donne jamais spontanément lieu à un retour du gaz dans son récipient d'origine. Ou bien, un moteur thermique fonctionnant selon un cycle et ne recevant de la chaleur que d'un seul thermostat n'a jamais fourni de travail à l'extérieur.

Au début du XIX<sup>ème</sup> siècle, Carnot avait montré qu'il était impossible que toute la chaleur apportée par une source de chaleur de température élevée fût transformée en travail par un quelconque moteur thermique cyclique.

#### 1.2 Nécessité d'un principe d'évolution

- Si le premier principe permet de progresser dans le sens de la compréhension des échanges d'énergie entre un système et l'extérieur, il est incapable de fournir les arguments décisifs pour expliquer l'impossibilité de certaines transformations qui pourtant ne le violeraient pas. Deux énoncés équivalents ont été introduits pour traduire ce fait :

- **Énoncé de Thomson, Lord Kelvin** : Il n'existe pas de moteur fonctionnant de manière cyclique qui produise du travail à partir d'une seule source de chaleur.

- **Énoncé de Clausius** : Il n'existe pas de processus dont le seul effet serait de faire passer de la chaleur d'une source froide à une source chaude.

## 2. Second principe et entropie

### 2.1 Définition de l'entropie et énoncé du second principe

*Tout système possède une fonction d'état extensive, l'entropie notée  $S$ , fonction des seuls paramètres d'état qui définissent complètement l'état macroscopique du système.*

*Lors d'une évolution quelconque, la variation de l'entropie entre deux états d'équilibre  $i$  et  $f$  est liée aux échanges de chaleur  $\delta Q$  que le système reçoit algébriquement des sources de chaleur avec lesquelles il est en contact à une température absolue  $T_e$  par l'inégalité :*

$$\Delta S \geq \int_{\text{état } i}^{\text{état } f} \frac{\delta Q}{T_e} \quad (27-1)$$

où  $\Delta S = S_f - S_i$  est la différence des entropies du système entre les états initial  $i$  et final  $f$ .

*L'égalité n'est satisfaite que si la transformation du système fermé est réversible, alors :*

$$\Delta S = \int_{\text{état } i}^{\text{état } f} \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T_e} \quad (27-2)$$

Parmi les variables d'état dont  $S$  est fonction, il en existe un jeu privilégié, les variables extensives : l'énergie interne  $U$  du système, son volume  $V$ , son nombre de moles  $n$  ...

- L'inégalité qui compare la variation d'entropie au rapport d'une énergie sur une température fournit la dimension de l'entropie :  $\text{M.L}^2.\text{T}^{-2}.\Theta^{-1}$ . Son unité est le joule par kelvin, de symbole  $\text{J.K}^{-1}$ .

## 2.2 Conséquences

- Lorsque la transformation est adiabatique, le système n'échange aucune chaleur avec l'extérieur donc  $\delta Q = 0$  et par conséquent  $\Delta S \geq 0$ .

L'entropie d'un système fermé évoluant de manière adiabatique ne peut que croître : le système atteint son état d'équilibre lorsque, pour l'énergie qu'il possède, son entropie ne peut plus augmenter.

Au contraire, si la transformation adiabatique est réversible alors  $\Delta S = 0$ . Pour cela, une transformation adiabatique réversible est aussi dite **isentropique**.

- La variation d'entropie d'un système suivant un cycle thermodynamique est égale à 0. En effet, le système retrouve à la fin de son cycle un état qui possède exactement les caractéristiques de l'état initial et l'entropie étant une fonction des paramètres d'état,  $\Delta S = S_f - S_i = S_i - S_i = 0$ . Ceci entraîne l'**inégalité de Clausius** :

$$\oint \frac{\delta Q}{T_e} \leq 0 \quad (27-3)$$

où le symbole  $\oint$  placé sur le signe intégral rappelle que l'inégalité n'est vraie que lorsque l'on somme les rapports  $\frac{\delta Q}{T_e}$  sur un cycle.

Si toutes les transformations du cycle sont réversibles alors l'inégalité se mue en égalité :

$$\oint \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T_e} = 0. \quad (27-4)$$

## 2.3 Entropie échangée et entropie créée

L'inégalité (27-1) constituant la propriété principale de l'entropie peut se transformer en égalité en rajoutant un terme, homogène à une entropie, noté  $S_c$ , toujours positif ou nul quelle que soit la transformation considérée :

$$\Delta S = \int_{\text{état } i}^{\text{état } f} \frac{\delta Q}{T_e} + S_c \quad (27-5)$$

$\int_{\text{état } i}^{\text{état } f} \frac{\delta Q}{T_e}$  est appelé l'**entropie échangée**. Son signe est fonction de la transformation.

Le terme rajouté est toujours strictement positif ne s'annulant que pour les transformations réversibles. On l'appelle l'**entropie créée**.

L'entropie créée mesure l'irréversibilité de la transformation : elle traduit le désordre supplé-



mentaire que l'on a introduit dans le système en ne procédant pas de manière réversible.

Cette création d'entropie est consubstantielle à l'idée d'écoulement ou de flèche du temps, à savoir celle d'un déroulement des phénomènes dans un ordre donné, sans « retour en arrière » observé.

Seule la physique statistique est à même de nous faire comprendre l'origine de ces constats d'irréversibilité : les retours vers un état antérieur sont en fait possibles, mais ont des probabilités si infimes de se réaliser qu'ils ne sont pas observés à l'échelle de temps de l'humanité, alors que tous les processus microphysiques sont symétriques par rapport à un changement de sens du temps, ce que nous associons à l'idée de réversibilité des phénomènes.

Cette règle ne souffre à ce jour qu'une seule exception : la désintégration du kaon neutre  $K^0$  étudiée au C.E.R.N. entre 1991 et 1995, qui fait intervenir l'interaction faible, et implique une violation de la symétrie par renversement du temps.

### 3. Calcul de variations d'entropie

#### 3.1 Principe de calcul

Trois voies principales se présentent pour le calcul de la variation de l'entropie d'un système au cours d'une transformation le faisant passer d'un état d'équilibre à un autre.

- La plus simple est celle où la fonction entropie du système en fonction des paramètres d'état est connue - comme c'est le cas pour un gaz parfait. Une fois les caractéristiques de l'état d'équilibre final connues, il suffit d'introduire les valeurs des variables d'état adéquates de l'état initial dans l'expression de la fonction entropie pour obtenir sa valeur à l'état initial,  $S_i$ , de faire de même avec les paramètres d'état de l'état final pour avoir  $S_f$  et de faire la différence des deux :  $\Delta S_{i \rightarrow f} = S_f - S_i$ .

- Les deux autres voies apparaissent si la fonction entropie du système n'est pas connue. Lorsque la transformation est réversible, les paramètres d'état sont des paramètres d'équilibre successif et le second principe nous donne la marche à suivre : à supposer que nous soyons capable d'exprimer le transfert d'énergie thermique  $\delta Q_{rev}$  au système au cours d'une transformation infinitésimale en fonction des variations des paramètres d'état, notamment de la température  $T = T_e$  alors  $dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T}$  est connu en fonction de ceux-ci et elle est une différentielle exacte, donc théoriquement intégrable.

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = \int_{\text{état } i}^{\text{état } f} dS = \int_{\text{état } i}^{\text{état } f} \frac{\delta Q_{rev}}{T_e}$$

- Enfin, si la transformation est irréversible, nous exploitons le caractère de fonction d'état de l'entropie qui signifie que sa variation entre deux états d'équilibre est indépendante du chemin suivi.

Nous inventons alors une suite de transformations supposées réversibles qui conduisent de l'état initial à l'état final, transformations le long desquelles nous serions capables, selon la procédure précédente, d'exprimer les variations infinitésimales d'entropie et de les intégrer.

#### 3.2 L'entropie du gaz parfait

La variation d'entropie d'un gaz parfait de rapport des capacités  $\gamma$  entre deux états d'équilibre dont les paramètres d'état sont indicés par  $i$  pour l'état initial et  $f$  pour l'état final s'exprime des trois manières suivantes :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T_f V_f^{\gamma-1}}{T_i V_i^{\gamma-1}} \right) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{p_f V_f^\gamma}{p_i V_i^\gamma} \right) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T_f^\gamma p_f^{1-\gamma}}{T_i^\gamma p_i^{1-\gamma}} \right). \quad (27-6)$$

Nous reconnaissons dans les trois arguments des logarithmes les rapports qui sont apparus dans les expressions de la loi de Laplace. Si celle-ci est vérifiée au cours d'une transformation adiabatique d'un gaz parfait, alors sa variation d'entropie est nulle et la transformation, selon le second principe, est effectivement réversible, ce qui justifie la forme de la loi que nous avons acceptée pour de telles transformations.

### 3.3 La variation d'entropie d'un thermostat

Supposons que, lors d'une transformation, le thermostat ait été en contact avec un système  $S$  dont il a reçu la chaleur algébrique  $Q_{th}$ . Si nous notons  $T_{th}$  sa température, la variation d'entropie du thermostat est égale à :

$$\Delta S_{th} = \frac{Q_{th}}{T_{th}} \quad (27-7)$$

*Remarque :* Si nous notons  $Q$  la chaleur reçue algébriquement par le système  $S$  du thermostat, la convention de signe des échanges fait que  $Q_{th} = -Q$ .

### 3.4 Variation d'entropie d'une phase condensée

Nous avons déjà argumenté sur le fait que les transformations subies par des phases condensées étaient plutôt de nature isobare.

Soit un corps  $C$  de capacité thermique à pression constante  $C = m c_p$  subissant une transformation infinitésimale que nous supposons réversible au cours de laquelle sa température passe de  $T$  à  $T + dT$ . Sa variation élémentaire d'enthalpie  $dH$  au cours de cette transformation est égale à la chaleur  $\delta Q$  échangée avec l'extérieur, qui s'exprime  $CdT$ .

Par ailleurs, l'échange s'est produit à la température  $T$  pour le corps en question. La variation correspondante d'entropie de  $C$  vaut :

$$\Delta S = m c_p \ln \left( \frac{T_f}{T_i} \right). \quad (27-8)$$

### 3.5 Variation d'entropie lors d'une transition de phase

- La transition de phase se produit à une température  $T_{ch}$  fonction de la pression  $p_{ch}$  à laquelle on opère, ou réciproquement à une pression  $p_{ch}$  caractéristique de la température  $T_{ch}$  choisie (fiche 26, cf le caractère bijectif de la relation  $p(T)$  des courbes d'équilibres diphasés).

Les transitions de phase d'un état 1 à un état 2 que nous envisageons donnent toutes lieu à un échange de chaleur par unité de masse du corps pur qui la subit égal à  $L_{12}$ , à la température de transition de phase  $T_{12}$ .

Il en résulte une variation d'entropie de la masse  $m$  du corps pur égale à :

$$\Delta S_{12} = \frac{m L_{12}}{T_{12}}. \quad (27-9)$$


*Remarque :* De manière logique  $L_{12} = -L_{21}$ . La chaleur fournie pour transformer une phase plus condensée en une phase moins condensée est récupérée lors de la transition opposée, lorsque l'on retourne à la phase plus condensée.

- Un passage de l'état solide à l'état liquide ou de l'état liquide à l'état gazeux s'accompagne d'une augmentation de l'entropie. En effet, lors de ces changements un accroissement de la liberté de mouvement des entités constitutives du corps se produit, qui s'accompagne d'une plus grande mise en désordre. Cependant, le désordre créé est parfaitement réversible puisque les variations d'entropie sont exactement opposées lors des transitions de phase réciproques.

### 3.6 Entropie créée

L'entropie créée  $S_c$  lors de l'évolution d'un système, grandeur qui doit être positive ou nulle au cours de n'importe quelle transformation, est calculée par différence entre la variation d'entropie du système au cours de la transformation,  $\Delta S$  et l'entropie échangée avec l'extérieur  $\int \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T_{\text{ech}}}$  :

$$S_c = \Delta S - \int_{\text{état } i}^{\text{état } f} \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T_{\text{ech}}} \quad (27-10)$$

 La variation d'entropie d'un système au cours d'une transformation irréversible peut fort bien être négative, mais le calcul de l'entropie créée au cours de la transformation doit impérativement conduire à un résultat strictement positif.

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1** : Soit un cylindre aux parois diathermanes de section  $s = 30 \text{ cm}^2$ , fermé par un piston dont on néglige la masse. Il contient  $n = 0,2 \text{ mol}$  d'un gaz parfait de rapport  $\gamma = 1,4$ . La pression atmosphérique  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$  règne au dessus du piston. Le système est plongé dans un thermostat à la température  $T_0 = 300 \text{ K}$ .

On comprime le gaz de manière réversible jusqu'à doubler sa pression.

1. Calculez les variations d'entropie du gaz et du thermostat. Déduisez-en la variation d'entropie de l'univers au cours de la transformation. Concluez.

2. À partir de l'état obtenu à la fin de la transformation précédente, on relâche subitement la pression de sorte que seule la pression atmosphérique s'exerce sur le piston.

Reprenez la question 1.

**Exercice 2** : Calculer la variation d'entropie de l'univers lors de la mise en équilibre de l'exercice 3 de la fiche 25.

# 28 Thermodynamique

## 5. machines thermiques

### 1. Machine thermique cyclique ditherme

#### 1.1 Définitions et notations

- Une **machine thermique cyclique ditherme** est une machine fonctionnant par cycle - le système thermodynamique revient à son état initial après une suite de transformations - et qui n'a de transferts thermiques qu'avec deux sources de chaleur de températures distinctes.
- On appelle communément **source chaude** la source de chaleur dont la température absolue est la plus élevée, notée  $T_c$  ; L'autre source est appelée **source froide**, de température absolue inférieure à la précédente, notée  $T_f$ .

- On note  $Q_c$  le transfert thermique que la substance utilisée dans le fonctionnement de la machine, quel(s) que soi(ent) son (ses) état(s), reçoit de la source chaude,  $Q_f$  celui reçu de la source froide et  $W$  le travail reçu du milieu extérieur lors d'un cycle effectué par la machine.

Les conventions algébriques traditionnelles à la thermodynamique quant au signe de l'échange sont d'usage : la machine fournit du travail ou de la chaleur si  $W$ ,  $Q_c$  ou  $Q_f$  sont négatifs ; elle les reçoit effectivement dans le cas contraire.

*Remarque* : Les expressions telles « La machine fournit... », « la machine reçoit... » sous-entendent toujours « La substance, dont le modèle constitue le système thermodynamique, employée par la machine qui gère les échanges de chaleur ou de travail dudit système avec l'extérieur, les sources fournit ou reçoit... ».

- La machine est un **moteur** lorsqu'elle fournit du travail à l'extérieur :  $W < 0$ . Elle est une **machine frigorifique** dans le cas contraire.

#### 1.2 Application des principes de la thermodynamique

- Le système qui évolue au cours du cycle de fonctionnement revient à son état initial au terme de celui-ci. Or, le premier principe de la thermodynamique postule que l'énergie interne est une fonction des paramètres d'état, donc sa variation sur un cycle est nulle. Ainsi :

$$\Delta U_{cycle} = W + Q_c + Q_f \quad (28-1)$$

Il en est de même pour la variation de son entropie sur le cycle puisque le second principe de la thermodynamique en postule le caractère de fonction d'état. De plus, il établit une comparaison entre cette variation et les transferts thermiques que le fluide échange avec l'extérieur. Ainsi :

$$\Delta S_{cycle} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S_{cycle} \geq \oint \frac{\delta Q}{T_e}$$

l'égalité étant assurée lorsque le fonctionnement de la machine est idéalement réversible. La différence correspond à l'entropie créée pendant un cycle, due aux irréversibilités.

- Lorsque la machine est ditherme, les seuls échanges thermiques avec l'extérieur se produisent lors du contact de son fluide avec les sources : il reçoit (au sens algébrique)  $Q_c$  de la source chaude, à la température  $T_c$  et  $Q_f$  de la source froide, à la température  $T_f$ . L'intégrale de l'**inégalité de Clausius** se traduit par :

$$0 \geq \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \quad (28-2)$$

### 1.3 Impossibilité du moteur monotherme

Si la machine cyclique n'est en contact qu'avec une seule source, si  $Q_c = 0$  par exemple, l'inégalité de Clausius impose  $Q_f < 0$ .

Ainsi, une machine fonctionnant de manière cyclique avec une seule source de chaleur ne peut que lui en fournir ( $Q < 0$ ) et pour ce faire, doit recevoir du travail de l'extérieur car  $W = -Q > 0$  sur le cycle.

Nous retrouvons l'énoncé de Kelvin du second principe, soit « l'impossibilité du moteur monotherme ».

### 1.4 Moteur cyclique ditherme et théorème de Carnot

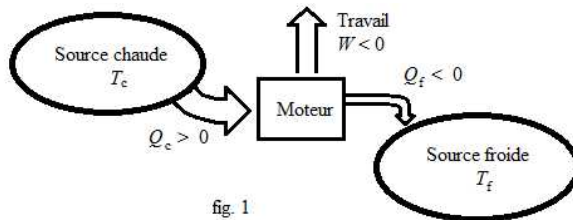
• Soit un moteur cyclique ditherme fonctionnant de manière réversible. Son fonctionnement sur un cycle vérifie  $-W = Q_c + Q_f > 0$  : Le travail qu'il produit pour le milieu extérieur est le résultat d'un transfert thermique globalement positif en provenance des sources de chaleur. Par ailleurs, comme il fonctionne de façon réversible,

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \quad \text{soit} \quad Q_f = -\frac{T_f}{T_c} Q_c \quad (28-3)$$

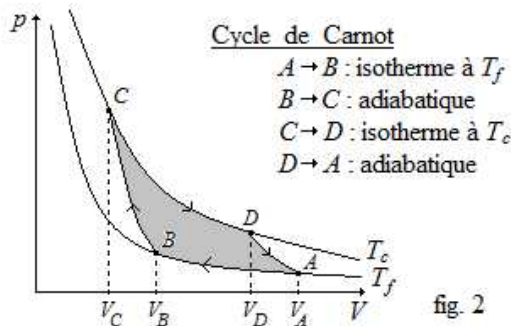
D'où :

$$Q_c + Q_f = \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) Q_c > 0$$

• Comme  $T_f < T_c$ , nous déduisons des relations précédentes que  $Q_c > 0$  et  $Q_f < 0$ . Le moteur cyclique ditherme fonctionne en recevant de la chaleur de la source chaude, transformant une partie en travail restitué au milieu extérieur et rejetant l'autre vers la source froide, telle une « taxe » à régler pour obtenir ce travail. La relation (28-3) interdit en effet que toute l'énergie reçue par transfert thermique de la source chaude puisse être transformée en travail.



• Une manière de modéliser une telle machine est d'envisager son fonctionnement avec un gaz qui se comporte comme un gaz parfait suivant le **cycle de Carnot** dont la représentation dans le plan de Clapeyron est la suivante :



- Nous définissons le **rendement** du moteur cyclique ditherme par le rapport :

$$\eta = \frac{-W}{Q_c} \quad (28-4)$$

qui établit la fraction de ce que nous récupérons d'utile (le travail exploitable) par rapport à la dépense (la chaleur apportée par la source chaude). Pour le moteur réversible,

$$\eta_C = \frac{-W}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

$\eta_C$ , rendement de la machine cyclique ditherme réversible, est appelé le **rendement de Carnot**. Il constitue le rapport maximal de transformation de la chaleur reçue par un moteur cyclique ditherme en travail.

En effet, en conservant l'inégalité de Clausius si la machine n'est pas parfaite,  $\frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c}$  et son rendement  $\eta$  est alors inférieur au rendement de Carnot.

## 1.5 Théorème de Carnot

*Le rendement maximal d'un moteur cyclique ditherme fonctionnant entre des sources de chaleur de températures  $T_f$  et  $T_c$  ( $T_f < T_c$ ) est égal à :*

$$\eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_c} \quad (28-5)$$

*Remarque :* Ce résultat est parfaitement indépendant du fluide utilisé dans la machine.

## 1.6 Machines frigorifiques

- Une **machine frigorifique cyclique ditherme** est une machine fonctionnant suivant un principe opposé à celui du moteur cyclique ditherme. Il est nécessaire de fournir un travail à la machine afin qu'elle transfère de l'énergie de la source froide vers la source chaude.

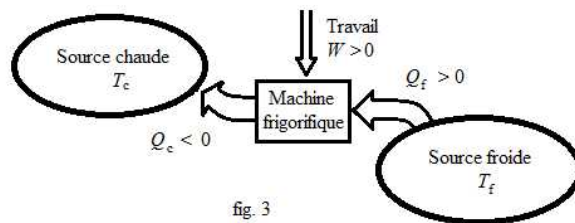


fig. 3

L'expression des deux principes de la thermodynamique demeure cependant exactement la même que pour le moteur cyclique ditherme. Seuls les signes des échanges sont opposés.

- Nous définissons l'**efficacité de la machine frigorifique** par le rapport du transfert thermique d'intérêt sur le coût pour l'obtenir. On distingue traditionnellement deux catégories de machines frigorifiques. Les machines de refroidissement (réfrigérateurs ou climatiseurs) dont la grandeur d'intérêt est la chaleur prélevée à la source froide ont une efficacité définie par :

$$e = \frac{Q_f}{W}$$

soit, pour une machine idéale fonctionnant de manière réversible :

$$e_M = -\frac{Q_f}{Q_f + Q_c} = \frac{T_f}{T_c - T_f} \quad (28-6)$$

Les machines de chauffage telles les pompes à chaleur, dont la grandeur d'intérêt est la chaleur apportée à la source chaude ont une efficacité définie par :

$$e = -\frac{Q_c}{W}$$

soit pour une pompe à chaleur idéale fonctionnant de manière réversible :

$$e_M = \frac{Q_c}{Q_f + Q_c} = \frac{T_c}{T_c - T_f} \quad (28-7)$$

- L'efficacité des pompes à chaleur est théoriquement toujours supérieure à un. Un travail  $W$  fournit à la pompe à chaleur permet d'obtenir un transfert d'énergie vers la source chaude toujours supérieure au travail dépensé.

## 2. Machine thermodynamique réelle

### 2.1 Variations par rapport à la machine ditherme théorique

Une machine réelle fonctionne souvent en s'écartant de la modélisation de la machine ditherme.

Nous avons implicitement supposé que le même fluide effectuait plusieurs fois consécutives le cycle caractérisant la machine. Or, cette dernière fonctionne souvent comme un système ouvert pour lequel, de surcroît, il est parfois difficile de définir une seule source froide et une seule source chaude.

Enfin, la « source chaude  $fg$  » n'est pas toujours extérieure au système. Si elle l'est pour une chaudière, dans les moteurs à combustion interne en revanche, c'est le système lui-même qui apporte les réactifs de la combustion (mélange d'air et d'essence ou de fuel) dont est tirée la chaleur fournie au système en même temps qu'elle en modifie la nature des constituants, les réactifs et les produits de la réaction étant renouvelés à chaque cycle.

### 2.2 Premier principe appliqué aux systèmes ouverts

- Face à ces nouveautés, il a fallu se doter d'une expression du premier principe claire et adaptée à ces types de fonctionnement. En effet, si un fluide circule dans une série de dispositifs transformant son état thermodynamique, tels un compresseur, une turbine, un échangeur de chaleur, ..., et que nous souhaitions lui appliquer le premier principe de la thermodynamique tel qu'il a été utilisé jusqu'alors, nous devrions raisonner sur un système fermé et envisager l'ensemble du fluide dans l'installation, fluide qui n'est pas à l'équilibre thermodynamique, ses paramètres d'état n'étant pas les mêmes en tout point du circuit. Cette difficulté a été surmontée en adaptant l'expression du premier principe aux cas dit des **systèmes ouverts**.

- Soit une installation fonctionnant de manière stationnaire et dont les paramètres intensifs du fluide sont définis et invariables au cours du temps en amont et en aval des principaux éléments agissant sur lui. Le changement des paramètres d'états du fluide entre son entrée dans l'un de ces dispositifs et sa sortie, s'exprime par les deux relations suivantes, dérivant du premier principe :

$$\Delta h = h_2 - h_1 = w_u + q \quad (28-8)$$

ou

$$D \cdot \Delta h = D(h_2 - h_1) = \dot{W}_u + \dot{Q} \quad (28-9)$$

$h_1$  et  $h_2$  les enthalpies massiques généralisées du fluide en entrée et en sortie du dispositif ;

$w_u$  le travail massique utile reçu par le fluide lors de son passage dans le dispositif, dû aux forces autres que celles de pression, prises en compte par l'enthalpie massique ;  $q$  la chaleur massique algébriquement reçue par le fluide lors de son passage dans le dispositif. Ces grandeurs sont toutes exprimées en  $\text{J.kg}^{-1}$ .

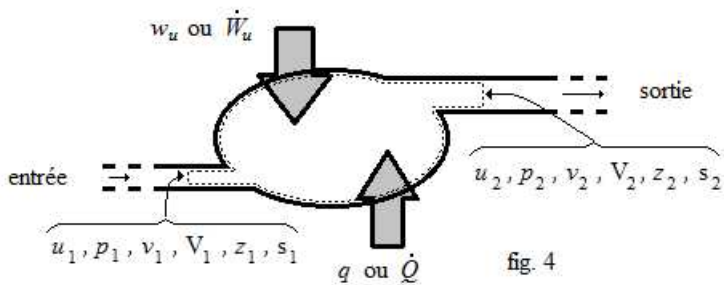
L'enthalpie massique généralisée est la somme de l'enthalpie massique  $u + pv$  ( $u$  énergie interne massique,  $p$  pression du fluide et  $v$  volume massique du fluide) et de l'énergie cinétique massique  $\frac{1}{2}V^2$  où  $V$  est la vitesse du fluide au point considéré.

$D$  le débit-masse en  $\text{kg.s}^{-1}$  ;  $\dot{W}_u$  la puissance utile (au même sens que le travail massique utile) exprimée en watt  $\text{W}$  ;  $\dot{Q}$  la puissance thermique reçue lors du passage dans le dispositif, exprimée en  $\text{W}$ .

*Remarque :* le régime peut être stationnaire et les vitesses d'entrée et de sortie du fluide différer à cause d'une variation possible de la masse volumique du fluide et de la section de l'entrée,  $s_1$  et de la sortie,  $s_2$ . Le débit-masse  $D$  est lié à ces grandeurs par :

$$D = \frac{V_1 s_1}{v_1} = \frac{V_2 s_2}{v_2} \quad (28-10)$$

• (28-8) et (28-9) traduisent un bilan énergétique effectué à travers une **surface de contrôle**  $\Sigma$ , surface fermée (en pointillé sur la figure 4) délimitant un volume  $\mathcal{V}_\Sigma$  qui contient le fluide à l'intérieur du dispositif.



• Le régime étant supposé stationnaire, les grandeurs physiques sont indépendantes du temps, le centre d'inertie des masses fluides à l'intérieur de  $\mathcal{V}_\Sigma$  est au repos dans le référentiel du laboratoire et l'énergie interne à l'intérieur de la surface de contrôle ne varie pas.

• Considérons un intervalle de temps  $\delta t$  pendant lequel transite à travers la machine une masse  $\delta m$  de fluide.

Le contenu de  $\mathcal{V}_\Sigma$  reçoit le travail utile  $\delta m w_u$ , le transfert thermique  $\delta m q$ , le travail des forces de pression du fluide qui « pousse » la masse entrante,  $p_1 v_1 \delta m$ , et il s'accroît de l'énergie interne due à l'état thermique du fluide entrant  $\delta m u_1$  et de son énergie cinétique  $\frac{1}{2} \delta m V_1^2$ .

Le contenu de  $\mathcal{V}_\Sigma$  perd les énergies interne  $\delta m u_2$  et cinétique  $\frac{1}{2} \delta m V_2^2$  du fluide sortant et doit lutter contre les forces de pression du fluide en aval dont il reçoit le travail  $-p_2 v_2 \delta m$ .  $v_1$  et  $v_2$  étant les volumes massiques du fluide respectivement en amont et en aval de la machine qu'il traverse. Ainsi, le bilan s'écrit-il :

$$\delta U = 0 = \delta m \left( w_u + q + p_1 v_1 + u_1 + \frac{1}{2} V_1^2 - u_2 - \frac{1}{2} V_2^2 - p_2 v_2 \right)$$

Divisons par  $\delta m$  l'égalité précédente et nous retrouvons le résultat (28-8). Divisons-le par  $\delta t$  et nous obtenons (28-9),  $\frac{\delta m}{\delta t}$  étant le débit-masse  $D$ , le travail utile massique et la puissance



mécanique utile étant liés par la relation :

$$\frac{\delta m}{\delta t} w_u = D w_u = \dot{W}_u \quad (28-11)$$

la chaleur massique et la puissance thermique par celle, similaire :

$$\frac{\delta m}{\delta t} q = D q = \dot{Q} \quad (28-12)$$

*Attention* : Ne pas oublier de comptabiliser le travail des forces de pesanteur lorsque les altitudes d'entrée et de sortie diffèrent, sous la forme d'une contribution  $g(z_1 - z_2)$  au travail utile massique ou  $Dg(z_1 - z_2)$  à la puissance utile, surtout lorsque la phase est liquide.

## 2.3 Conduite et usage des études

- Les installations réelles fonctionnant en circuit ouvert se servent fréquemment des diagrammes  $(h - p)$  appelés **diagrammes des frigoristes**.

- Si nous mesurons ou si nous fixons *a priori* certaines caractéristiques (température et pression, position et vitesse, ...) du fluide aux endroits cruciaux, nous repérons les points correspondant à ces caractéristiques sur le diagramme du fluide employé et en déduisons les valeurs des enthalpies massiques puis celles des enthalpies généralisées.

Grâce à leur différences, nous connaissons alors les travaux ou/et les chaleurs massiques à échanger avec le fluide pour obtenir les caractéristiques désirées et calibrer l'installation.

## Sauriez-vous répondre ?

### Exercice 1 :

Un moteur cyclique ditherme fonctionne entre deux sources de chaleur aux températures respectives  $T_f = 293 \text{ K}$  et  $T_c = 450 \text{ K}$ . Il fournit une puissance  $P$  égale à  $105 \text{ kW}$  lorsqu'il effectue  $n = 2250 \text{ cycles/min}$ . Ce moteur possède un rendement mesuré de  $32 \%$ .

1. Le moteur fonctionne-t-il de manière réversible ?
2. Calculez le travail fourni et la chaleur reçue de chaque source par cycle.
3. Déduisez-en l'entropie créée à chaque cycle.

### Exercice 2 :

Une conduite forcée en montagne, de section  $s$  constante transporte de l'eau liquide sous pression avec un débit-masse  $D$  sur un dénivelé  $H$  vers une turbine.

A.N. :  $s = 1,8 \text{ m}^2$ ,  $H = 1150 \text{ m}$  et  $V = 8 \text{ m.s}^{-1}$ .

1. Quel est le travail utile massique délivré par l'eau à la turbine et la puissance utile correspondante si l'on considère le transport comme adiabatique et que la température de l'eau n'a sensiblement pas varié ?
2. En réalité la viscosité de l'eau et les frottements sur les parois de la conduite entraînent une dissipation thermique massique égale à  $1,7 \text{ kJ.kg}^{-1}$ . Que devient la puissance utile sur la turbine ?

# Corrigés de la physique

## 1. Oscillateur harmonique

### Exercice 1

L'équilibre de la masse est assuré dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen par l'opposition de la tension du ressort au poids de  $m$ . L'axe vertical étant orienté vers le bas, la tension du ressort est  $\vec{T} = -k(x_{eq} - l_0)\vec{e}_x$ ,  $x_{eq}$  étant la position d'équilibre de la masse ; le poids de la masse  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$ . D'où :  $x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$ . A.N. :  $x_{eq} \approx 0,348$  m.

### Exercice 2

Dans le référentiel du laboratoire, le bilan des forces à un instant quelconque est : la tension du ressort  $\vec{T} = -k(x(t) - l_0)\vec{e}_x$  et le poids de  $m$ ,  $\vec{P} = mg\vec{e}_x$ . Le référentiel étant supposé galiléen, le principe fondamental de la dynamique s'applique à la masse et donne :  $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$ , soit, en projection sur  $(O, \vec{e}_x)$ ,  $m\ddot{x}(t) = -k(x(t) - l_0) + mg$ .

L'équation a pour solution particulière constante évidente  $x_p = x_{eq}$  et pour solution générale de l'équation sans second membre :  $x_g(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ , où  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

Or, à l'instant initial,  $x(0) = E_0 = 5$  cm et  $\dot{x}(0) = V_0 = 0,5$  m.s<sup>-1</sup>.

D'où :  $x(t) = x_{eq} + E_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ .

A.N. :  $x(t) = 0,25 + 0,05 \cos(10t) + 0,05 \sin(10t)$  en m.

## 2. Propagation d'un signal

### Exercice 1

Le problème est d'exprimer  $s(x, t_2)$  à partir de  $s(x_2, t)$ .  $v > 0$  est la célérité de propagation du signal dans le milieu, indépendamment de son sens de propagation.

À l'instant  $t_2$ , au point  $M$  d'abscisse  $x$ , la valeur du signal  $s(x, t_2)$  est ce qu'elle était au point  $M_2$  d'abscisse  $x_2$  à un instant  $t'$  tel que la distance séparant  $M$  de  $M_2$  soit parcourue par le signal pendant l'intervalle de temps  $|t' - t_2|$  à la vitesse  $v$  :  $s(x, t_2) = s(x_2, t')$ .

Formulons de manière algébrique la situation, supposons que  $x < x_2$  alors  $t' < t_2$  le signal ayant atteint le point  $M_2$  avant le point  $M$  puisqu'il se déplace dans le sens des  $x$  décroissants.

Ainsi,  $t_2 - t' = \frac{x_2 - x}{v}$  soit  $t' = t_2 + \frac{x - x_2}{v}$ . D'où :

$$s(x, t_2) = s\left(x_2, t_2 + \frac{x - x_2}{v}\right).$$

### Exercice 2

Si deux réémetteurs voisins opéraient, pour la même station radio, avec des signaux ayant des fréquences identiques, il y aurait des interférences tantôt destructives tantôt constructives dans la région située entre les deux réémetteurs.

D'où alternance de zones de réception maximale avec des zones d'atténuation plus ou moins complète du signal, le phénomène étant le plus marqué à égale distance de chaque réémetteur.

C'est pour éviter ceci que chaque station radio change de fréquence porteuse entre deux réémetteurs voisins. Il s'agit là d'une application pratique du théorème dit « des quatre couleurs ».

### 3. Optique géométrique 1 : principes et lois

#### Exercice 1

Faire un schéma de la situation avec le rayon injecté et sa première réflexion sur la paroi de la fibre.

Pour que la fibre guide la lumière, la réflexion de cette dernière sur la gaine doit être totale : elle doit arriver sur l'interface verre-air dans la fibre avec un angle d'incidence  $\beta_i \in [\beta_l; \frac{\pi}{2}]$  où

$\beta_l = \arcsin\left(\frac{n_a}{n_v}\right)$ . Cet angle correspond à un angle de réfraction après injection de la lumière  $\alpha_r = \frac{\pi}{2} - \beta_i$  :  $\alpha_r \in [0; \frac{\pi}{2} - \beta_l]$ . L'angle d'incidence à l'injection doit vérifier la loi de Snell-

Descartes  $n_a \sin \alpha_i = n_v \sin \alpha_r$ . D'où  $\alpha_i \in [0; \alpha_l]$  avec  $\alpha_l = \arcsin\left(\sqrt{\left(\frac{n_v}{n_a}\right)^2 - 1}\right) \approx 78,5^\circ$ .

### 5. Optique géométrique 3 : lentilles minces

#### Exercice 1

Soit  $S$  le sommet (ou centre optique) d'une lentille convergente de distance focale  $f'$ .

Soit  $A$  un objet réel sur l'axe optique ;  $x_A = \overline{SA} < 0$ .

Soit  $A'$  son image réelle par la lentille :  $x_{A'} = \overline{SA'} > 0$ .

La formule de conjugaison stipule que  $\frac{1}{x_{A'}} - \frac{1}{x_A} = \frac{1}{f'}$ . De plus, la distance entre l'objet et son image,  $D > 0$  est telle que  $D = \overline{AA'} = \overline{SA'} - \overline{SA} = x_{A'} - x_A$ . On déduit de la relation de conjugaison et de  $D$  l'équation :  $x_A^2 + D x_A + D f' = 0$ , qui n'a de solution que si son discriminant est positif, soit si  $D \geq 4 f'$ .

#### Exercice 2

Faire un schéma de la construction des rayons caractéristiques. Par définition, le grandissement transversal est  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ ,  $A$  et  $A'$  étant sur l'axe optique et  $B$  et  $B'$  dans les plans perpendiculaires à l'axe optique passant respectivement par  $A$  et  $A'$ .

Le rayon intéressant est celui passant par  $B$  et le centre optique  $S$  de la lentille, qui n'est pas dévié par la lentille. Il en résulte que  $\gamma = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ . Exprimons  $\overline{SA'}$  en fonction de  $\overline{SA}$  grâce à

la relation de conjugaison, puis remplaçons-la dans  $\gamma$ .  $\gamma = \frac{f'}{\overline{SA'} + f'}$ . Cette quantité n'est positive que si  $-f' < \overline{SA} < 0$ .

### 6. Optique géométrique 4 : l'œil et les instruments

#### Exercice 1

Les angles sont comptés positivement dans le sens trigonométrique à partir de l'axe optique. Faire une figure sur laquelle sont tracés les chemins empruntés par les rayons lumineux d'un faisceau parallèle à l'axe optique et ceux d'un faisceau parallèle incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe optique.

Le rayon incident faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe optique et passant par le sommet  $S_b$  de l'objectif passe par le point  $C$  dans le plan focal image de l'objectif, qui est aussi le plan focal objet de l'oculaire.

Le rayon qui lui est parallèle et qui passerait, après traversée de l'objectif, par le sommet  $S_c$  de l'oculaire, ne serait pas dévié par ce dernier et passerait par  $C$ . La direction  $S_c C$  fixe l'angle  $\alpha'$  d'émergence du faisceau de rayons émergeant de l'oculaire. Ainsi, à la limite des angles petits devant 1 de sorte que  $\tan \alpha \approx \alpha$  et  $\tan \alpha' \approx \alpha'$ ,  $\alpha = \frac{F_c C}{f'_b}$  et  $\alpha' = -\frac{F_c C}{f'_c}$ .

D'où l'expression de  $G$  à démontrer. Cette configuration est intéressante en ce que les images ne sont pas inversées, contrairement à ce qui se produit avec les oculaires convergents.

## 7. Un monde quantique 1 : expériences et interprétations fondamentales

### Exercice 1

$$1 \text{ eV} \approx 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} ; h \approx \frac{6,63 \times 10^{-34}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 4,14 \times 10^{-15} \text{ eV.s};$$

$$hc \approx 4,14 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8 \text{ eV.m et } 10^6 \text{ fois plus en eV.}\mu\text{m, soit environ } 1,24 \text{ eV.}\mu\text{m.}$$

Cette valeur est intéressante car elle fixe immédiatement les ordres de grandeurs de l'énergie des photons dans le visible : de  $\frac{1,24}{0,8} = 1,55 \text{ eV}$  à  $\frac{1,24}{0,4} = 3,05 \text{ eV}$ .

### Exercice 2

Pour obtenir des détails à l'échelle intramoléculaire ( $d \approx 0,1 \text{ nm}$ ), la longueur d'onde du photon doit être de l'ordre de grandeur de  $d$ . D'après la relation de Planck - Einstein :

$$E = \frac{hc}{\lambda} ; E \approx \frac{1,24}{10^{-4}} = 12,4 \text{ keV.}$$

### Exercice 3

D'après le principe de Bohr et la relation de Planck - Einstein, l'énergie du photon doit être exactement égale à la différence des énergies initiale et final :  $E_2 - E_1 = \frac{3E_0}{4} = \frac{hc}{\lambda_{12}}$  ; d'où

$$\lambda_{12} = \frac{4hc}{3E_0}. \quad \text{A.N. : } \lambda_{12} \approx 0,122 \mu\text{m (ultraviolet).}$$

## 8. Un monde quantique 2 : introduction à la fonction d'onde

### Exercice 1

Dans l'équation de Schrödinger, le laplacien n'opère que sur la partie spatiale de la fonction d'onde (dérivations par rapport aux seules coordonnées spatiales) :

$$\Delta\psi(\vec{r}, t) = \Delta(\varphi(\vec{r})\chi(t)) = \chi(t)\Delta\varphi(\vec{r}).$$

La dérivée partielle par rapport au temps n'opère que sur la partie temporelle de la fonction d'onde :  $\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial(\varphi\chi)}{\partial t} = \varphi\left(\frac{d\chi}{dt}\right)$ . L'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\chi(t)\Delta\varphi(\vec{r}) + V(\vec{r})\chi(t)\varphi(\vec{r}) = i\hbar\varphi(\vec{r})\frac{d\chi}{dt}(t).$$

En divisant ses deux membres par  $\varphi(\vec{r})\chi(t)$ , on obtient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(\vec{r})} \Delta \varphi(\vec{r}) + V(\vec{r}) = i\hbar \frac{1}{\chi(t)} \frac{d\chi}{dt}(t).$$

Or, le membre de gauche est fonction des seules coordonnées spatiales et celui de droite, fonction uniquement du temps. L'équation ne peut être satisfaite, quels que soient  $\vec{r}$  et  $t$ , que si chaque membre est égal à une même constante ayant la dimension d'une énergie, c'est elle que l'on prend pour  $E$ . D'où la forme de  $\chi(t)$  annoncée.

### Exercice 2

Soit l'équation aux valeurs propres à une dimension :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi = 0$$

Supposons l'énergie négative et posons :  $\frac{-1}{\delta^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}$ . L'équation devient :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} \varphi = 0.$$

de solution :  $\varphi(x) = A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta}$  (où  $A$  et  $B$  sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites). Or, aux limites  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ , d'où  $A = B = 0$ . Ainsi, la fonction d'onde d'un état stationnaire d'énergie négative est nulle : il n'y a pas d'état propre à  $E < 0$  pour le problème envisagé.

## 10. Notions fondamentales d'électricité 2 : les lois générales

### Exercice 1

Loi des nœuds,  $i_1 + i_4 + i_5 = i_2 + i_3$ , d'où :  $i_3 = i_1 + i_4 + i_5 - i_2$ . A.N. :  $i_3 = 0, 30 \text{ A}$ .

– dans les branches 1 et 3, intensités  $> 0$  donc électrons partant du nœud dans branche 1 et y arrivant dans branche 3 ;

– dans les autres branches, les intensités  $< 0$  donc électrons se déplaçant dans le sens des conventions d'orientation.

### Exercice 2

Sens de parcours de la maille : sens trigo. direct, les tensions ayant leur convention dans le même sens sont :  $u_{AB}$  et  $u_{DE}$  ; les autres ayant une convention de sens contraire.

Loi des mailles :  $u_{AB} + u_{DE} = u_{CB} + u_{DC} + u_{AE}$ . Si sens de parcours : sens horaire, les deux groupes définis précédemment permutent et la loi des mailles demeure identique.

$u_{AB} = u_{CB} + u_{DC} + u_{AE} - u_{DE}$ . A.N. :  $u_{AB} = -3, 5 \text{ V}$ .

## 11. Notions fondamentales d'électricité 3 : les dipôles

### Exercice 1

Une discontinuité d'énergie dans un système physique à un instant  $t_0$  signifie une puissance instantanée appelée par le système à cet instant infinie car :

$$p(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(t_0 + \Delta t) - \mathcal{E}(t_0)}{\Delta t}$$

avec un numérateur non nul alors que le dénominateur tend vers 0 : physiquement dénué de sens.

**Exercice 2**

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} C U^2. \quad \text{A.N. : } \mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \times 10^{-6} \times 50^2 = 1,25 \text{ mJ.}$$

**Exercice 3**

$\underline{Z}_L = jL\omega$ ; en convention récepteur :  $\underline{u}(t) = \underline{Z}_L \underline{i}(t)$ . Ainsi,  $|\underline{u}(t)| = |\underline{Z}_L| |\underline{i}(t)| = |\underline{Z}_L| \cdot |\underline{i}(t)|$ ;

or,  $|\underline{u}(t)| = U_m = \sqrt{2} U_e$ ,  $|\underline{i}(t)| = I_m = \sqrt{2} I_e$  et  $|\underline{Z}_L| = L\omega$ , d'où :  $I_e = \frac{U_e}{L\omega}$ .

$$\text{A.N. : } I_e = 5 / (47,10^{-3} \times 2\pi \times 500) \approx 33,9 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 33,9 \text{ mA.}$$

Lois horaires :  $u(t) = 5\sqrt{2} \cos\left(1000\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$ , et

$i(t) = 33,9 \sqrt{2} \cos(1000\pi t) \text{ mA}$  car  $\varphi_i = 0$  (référence) et  $\varphi_u - \varphi_i = \arg \underline{Z}_L$ .

## 12. Notions fondamentales d'électricité 4 : circuits linéaires du premier ordre

**Exercice 1**

- La loi des nœuds, après fermeture de l'interrupteur, donne :  $I_0 = i_R(t) + i_C(t)$ . La tension  $u(t)$  est commune au trois dipôles,  $i_R(t) = \frac{u(t)}{R}$  et  $i_C(t) = C \frac{du}{dt}(t)$  d'où l'équation différentielle sur  $u(t)$  :

$$I_0 = \frac{u(t)}{R} + C \frac{du}{dt}(t) \quad \text{soit} \quad RI_0 = u(t) + \tau \frac{du}{dt}(t) \quad \text{en posant} \quad \tau = RC.$$

La solution de l'équation est égale à la somme de la solution particulière  $u_p(t)$  et de la solution générale  $u_g(t)$  de l'équation homogène.

$u_p(t)$  est de même nature que le second membre, constant :  $u_p(t) = RI_0$ .  $u_g(t) = A e^{-t/\tau}$ , où  $A$  est la constante d'intégration déterminée sur la solution complète, à l'aide de la condition initiale. Ainsi,  $u(t) = RI_0 + A e^{-t/\tau}$ .

- Comme  $u(0) = 0$  (le condensateur est initialement déchargé et la tension à ses bornes est continue) :  $RI_0 + A = 0$  d'où  $A = -RI_0$ .

$$\text{Ainsi : } u(t) = RI_0 (1 - e^{-t/\tau}); \quad i_R(t) = I_0 (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad i_C(t) = I_0 e^{-t/\tau}.$$

- À l'ouverture de l'interrupteur, le condensateur se décharge dans la résistance.

$i_R(t) = -i_C(t)$ ,  $u(t) = Ri_R(t)$  et  $i_C(t) = C \frac{du}{dt}(t)$ . D'où l'équation sur  $u(t)$  :

$$0 = u(t) + RC \frac{du}{dt}(t),$$

La nouvelle condition initiale sur  $u(t)$ , en posant  $t = 0$  à l'instant d'ouverture de l'interrupteur :  $u(0) = RI_0$ . D'où  $u(t) = RI_0 e^{-t/\tau}$ .

**Exercice 2**

- La loi des nœuds donne :  $I_0 = i_R(t) + i_L(t)$ ;  $i_R(t) = u(t)/R$  et  $u(t) = L \frac{di_L}{dt}(t)$ .

On a le choix de former l'équation différentielle sur  $u(t)$  ou sur  $i_L(t)$  :

$$I_0 = i_L(t) + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt}(t).$$

Elle se résout de la même manière qu'à l'exercice 1. La continuité du courant électrique dans la bobine se traduit par :  $i_L(0) = 0$ .

Au final,  $i_L(t) = I_0(1 - e^{-t/\tau})$  avec  $\tau = L/R$  et  $i_R(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ .

Le courant électrique de la source passe au départ intégralement dans le résistor ohmique puis peu à peu se dirige vers la bobine pour ensuite passer intégralement dans la bobine.

- À l'ouverture de l'interrupteur, les équations électriques du circuit deviennent :

$$i_R(t) = -i_L(t), \quad i_R(t) = u(t)/R \quad \text{et} \quad u(t) = L \frac{di_L}{dt}(t). \quad \text{D'où :}$$

$$0 = i_L(t) + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt}(t),$$

avec  $i_L(0) = I_0$  si l'on suppose que l'on avait laissé le temps au régime transitoire de se dérouler complètement dans la phase précédente. D'où  $i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ .

### 13. Oscillateurs amortis

#### Exercice 1

Le résumé donne les définitions de la pulsation propre  $\omega_0$  et du facteur de qualité  $Q$ . D'après les équations (13-1) et (13-3) régissant un oscillateur mécanique amorti,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  et  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$  d'où :

$$Q = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}.$$

D'après les équations (13-2) et (13-3) de l'oscillateur électrique amorti,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  et  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$  d'où :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

#### Exercice 2

Le retour à l'équilibre de l'oscillateur amorti - électrique ou mécanique - s'effectue selon le régime critique si son facteur de qualité  $Q = 1/2$ , soit (d'après la question 1)  $\lambda = 2\sqrt{kM}$ .

A.N. :  $\lambda \approx 31,6 \cdot 10^3 \text{ kg.s}^{-1}$ .

#### Exercice 3

- L'intensité maximale complexe du courant électrique dans la maille est déterminée par le rapport de la tension maximale complexe à l'impédance complexe de la maille :

$\underline{Z} = R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$ . Soit, en posant la pulsation propre  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , le facteur de qualité

$Q = \frac{L\omega_0}{R}$  et la pulsation réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  :

$$\underline{I} = \frac{U_m}{R} \cdot \frac{j \frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} = \frac{U_m}{R} \cdot \frac{1}{1 + j Q \left( x - \frac{1}{x} \right)}$$

$$|\underline{I}| = I_m, \text{ et } I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

•  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ , soit, numériquement  $Q \approx 10,01$  ; les valeurs de  $x = 2\pi f \sqrt{LC}$  correspondant à chacune des deux fréquences sont,  $x_1 \approx 0,5886$  et  $x_2 \approx 1,373$ . Les intensités efficaces correspondantes sont :  $I_1 \approx 5,3 \text{ mA}$  et  $I_2 \approx 9,0 \text{ mA}$ .

•  $U_e = |Z_{R_{\text{mboxou } L \text{ ou } C}}| \cdot I_e$  aux bornes de chacun des éléments du montage.

	résistance	bobine	condensateur
$ Z $ à $f_1$ (en $\Omega$ )	120	707	2040
tension efficace $ Z I_1$ (en V)	0,64	3,7	11
$ Z $ à $f_2$ (en $\Omega$ )	120	1650	874
tension efficace $ Z I_2$ (en V)	1,1	15	7,9

## 14. Filtrage linéaire

### Exercice 1

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du 1er ordre est de la forme :  $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$

ou, avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$ , on a :  $\underline{H}(x) = \frac{1}{1 + jx}$ .  $U_{m,s} = |\underline{H}(x)|U_{m,e}$ .

Numériquement  $x = \frac{5}{3}$  ; d'où  $U_{m,s} \approx 2,6 \text{ V}$ .

### Exercice 2

La fréquence de résonance d'un tel filtre est  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  ; A.N. :  $f_0 \approx 5,7 \text{ kHz}$ .

La largeur de bande est définie comme :  $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$  avec  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  ;

A.N. :  $Q \approx 2,72$  d'où  $\Delta f \approx 2,01 \text{ kHz}$ .

## 15. Mécanique 1 : cinématique du point matériel et du solide

### Exercice 1

• Le calcul de la vitesse est l'application de son expression (15-4) en coordonnées cartésiennes :

$$\text{Pour } 0 \leq t < 5 \text{ s, } \quad \vec{v}_M : \begin{cases} v_x(t) = \dot{x}(t) & = 3 \\ v_y(t) = \dot{y}(t) & = 4 \\ v_z(t) = \dot{z}(t) & = 0 \end{cases}$$

$$\text{Pour } 5 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s, } \quad \vec{v}_M : \begin{cases} \dot{x}(t) & = 3 + 0,42(t - 5) \\ \dot{y}(t) & = 4 + 0,56(t - 5) \\ \dot{z}(t) & = 0 \end{cases}$$

chacune de ces composantes étant exprimée en  $\text{m.s}^{-1}$ .

• De même, le calcul de l'accélération est l'application de l'expression (15-7) sur les mêmes intervalles :




$$\vec{a}_M : \begin{cases} \dot{v}_x(t) = 0 \\ \dot{v}_y(t) = 0 \\ \dot{v}_z(t) = 0 \end{cases}, \quad \vec{a}_M : \begin{cases} \dot{v}_x(t) = 0,42 \\ \dot{v}_y(t) = 0,56 \\ \dot{v}_z(t) = 0 \end{cases}$$

chacune de ces composantes étant exprimée en  $\text{m.s}^{-2}$ .

- La composante suivant  $Oz$  du vecteur position est nulle à chaque instant, donc la trajectoire du point matériel est plane, contenue dans le plan  $xOy$ .

De  $0 \leq t < 5$  s, l'élimination du temps entre  $x(t)$  et  $y(t)$  conduit à la relation  $y = \frac{4}{3}x$ ; pour la période suivante, la même démarche conduit à  $y = \frac{4}{3}x$ .

Ainsi, la trajectoire complète est un segment de la même droite sur les deux intervalles, parcourue à vitesse constante pendant le premier intervalle et selon un mouvement uniformément accéléré pendant le second.

 Si vous n'avez pas remarqué la proportionnalité de  $y$  à  $x$  dans la seconde phase, il suffit d'exprimer  $t$  en fonction de  $x$  à partir de la première composante, de prendre la solution en  $t$  qui est dans le bon intervalle temps et de l'insérer dans  $y(t)$ . Quand les calculs semblent un peu longs, peut-être y a-t-il une simplification plus ou moins masquée.

## Exercice 2

L'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques conduit à :

$$\vec{v}_M : \begin{cases} v_r(t) = 0 \\ v_\theta(t) = a\omega \\ v_z(t) = v \end{cases} \quad \text{et} \quad v_M = \sqrt{v^2 + (a\omega)^2}.$$

et le vecteur accélération :

$$\vec{a}_M : \begin{cases} a_r(t) = -a\omega^2 \\ a_\theta(t) = 0 \\ a_z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad a_M = a\omega^2.$$


La vitesse et l'accélération sont constantes en normes, mais elles changent de direction à tous les instants, en demeurant orthogonales entre elles.

La projection de la trajectoire de  $M$  dans  $xOy$  est le cercle de rayon  $a$  et de centre  $O$ ; son équation cartésienne est  $x^2 + y^2 = a^2$ .

Le mouvement projeté sur  $xOy$  est circulaire uniforme; celui le long de  $Oz$  est rectiligne uniforme. Le mouvement est hélicoïdal.

# 16. Mécanique 2 : dynamique du point matériel

## Exercice 1

 Tout n'est pas dit dans l'énoncé, il ne faut donc pas hésiter à prendre des initiatives : supposer galiléen (si ce n'est pas explicitement dit, il faut le sous-entendre) le référentiel terrestre dans lequel le mouvement est étudié et choisir un repère de projection commode dans le référentiel.

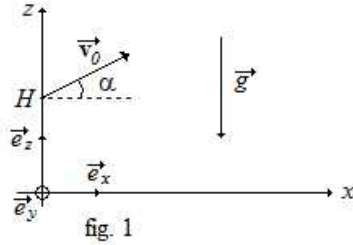
- Ainsi, l'axe  $Oz$  est dirigé suivant  $\vec{g}$  et l'axe  $Ox$  est tel que  $\vec{v}_0$  soit contenue dans le plan  $xOz$  :  $\vec{v}_0 = v_0(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_z)$ . Le point de lancement  $y$  a pour coordonnées  $(0, 0, H)$  et

celui d'impact une côte  $z = 0$ .

Le bilan des forces exercées sur  $M$  se résume à son poids  $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{e}_z$ .

- Dans le référentiel  $\mathcal{R}_g$  galiléen, le principe fondamental de la dynamique conduit à :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} \quad \text{soit} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$$



- $\vec{g}$  étant un vecteur constant, l'équation est intégrée, compte tenu des conditions initiales, en  $\vec{v}(t) = \vec{g} t + \vec{v}_0$ . La vitesse  $\vec{v}(t)$  étant la dérivée par rapport à  $t$  du vecteur position  $\overrightarrow{OM}(t)$ , son intégration par rapport au temps donne :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM}_0$$

où  $\overrightarrow{OM}_0 = H \vec{e}_z$  est le vecteur position à l'instant initial.

- Les équations horaires de  $M$  sur les trois axes sont :

$$\overrightarrow{OM}(t) : \begin{cases} v_0 \cos \alpha t \\ 0 \\ H + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

La trajectoire de  $M$  est plane, contenue dans le plan  $xOz$ .

La portée  $\Pi$  du tir est l'abscisse du point d'impact au sol de  $M$  ( $z = 0$ ). Or,  $z(t_p) = 0$  a pour solution positive :

$$t_p = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2 g H}}{g}$$

$$\Pi = x(t_p) = v_0 \cos \alpha \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2 g H}}{g}$$

La portée est extrême, à  $v_0$  fixée, pour les valeurs de  $\alpha$  telles que  $\frac{d\Pi}{d\alpha} = 0$ , soit :

$$0 = v_0 \cos 2\alpha + \frac{\sin \alpha (v_0^2 \cos 2\alpha - 2 g H)}{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2 g H}}$$

Posons  $u_0 = (2 g H)/v_0^2$ , l'expression précédente est réécrite :

$$\frac{u_0}{\cos 2\alpha} - 1 = \sqrt{1 + \frac{u_0}{\sin^2 \alpha}}$$

L'étude du signe du membre de gauche de la relation précédente montre que, si  $u_0 > 1$ , il y a une solution  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{4}[$  ; sinon la solution est  $\alpha \in ]\alpha_0; \frac{\pi}{4}[$  où  $\cos 2\alpha_0 = u_0$ .

Le membre de gauche est strictement croissant de  $u_0 - 1$  (ou 0 si  $u_0 < 1$ ) à  $+\infty$  ; celui de droite est strictement décroissant de  $+\infty$  (ou de  $\sqrt{\frac{1+u_0}{1-u_0}}$  si  $u_0 < 1$ ) à  $\sqrt{1+2u_0}$ .  $\forall u_0 > 0$ .

Les courbes représentatives des deux membres ne possèdent qu'une seule intersection.

On résout l'équation en posant  $w = \sin^2 \alpha$  ; il vient :  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{u_0 + 2}}$  et une portée maximale :

$$\Pi = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}$$

Si  $H = 0$ , on retrouve la portée classique  $\frac{v_0^2}{g}$ .

## Exercice 2

- Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.

Faisons le bilan des forces appliquées à la masse  $m$  : son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et la tension  $\vec{T}$  du fil dirigée de la masse vers  $O$ . Le repère le plus approprié est celui de coordonnées cylindriques :  $\vec{OM}(t) = l\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_z$  étant perpendiculaire au plan d'oscillation du pendule.

Dans ce repère,  $\vec{P} = mg(\cos \theta(t)\vec{e}_r - \sin \theta(t)\vec{e}_\theta)$  et  $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ .

- Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse fournit l'équation différentielle vectorielle du mouvement suivante :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{T}$$

En projection sur  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  et avec  $r = l = cste$  :

$$-ml\dot{\theta}^2(t) = mg \cos \theta(t) - T$$

$$ml\ddot{\theta}(t) = -mg \sin \theta(t)$$

L'équation différentielle du mouvement est l'équation différentielle en  $\theta(t)$  où n'apparaissent aucunes forces inconnues. Les forces de réaction, de tension des fils, etc, ... ne sont accessibles qu'une fois les caractéristiques du mouvement déterminées.

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0.$$

- À la limite des petites oscillations autour de  $\theta = 0$ ,  $\sin \theta \approx \theta$  et l'équation du mouvement devient :  $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0$ . On y reconnaît une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants caractéristique d'un oscillateur harmonique. Les petites oscillations sont ainsi périodiques, de période  $2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  et indépendante des conditions initiales, pourvu que l'approximation faite demeure valide au cours du mouvement.

## 17. Mécanique 3 : point de vue énergétique

### Exercice 1

La dimension de  $\beta$  est celle d'une force multipliée par le carré d'une longueur :  $M.L^3.T^{-2}$ .

L'énergie potentielle est exprimée à partir de la relation :  $d\mathcal{E}_p(x) = -\vec{f}(x) \cdot dx \vec{e}_x$ .

Pour  $x < x_B$ ,  $d\mathcal{E}_p(x) = -\frac{\beta}{(x - x_B)^2} dx$  est intégrée en  $\mathcal{E}_p(x) = \frac{\beta}{x - x_B} + C$ , où  $C$  est une constante d'intégration déterminée par les conditions aux limites choisies.

L'énergie potentielle est censée s'annuler à l'infini (sur cet intervalle  $x \rightarrow -\infty$ ), d'où  $C = 0$ .

Pour  $x > x_B$ , une démarche similaire conduit à  $\mathcal{E}_p(x) = -\frac{\beta}{x - x_B}$ .

Les expressions obtenues sur chaque intervalle sont résumées par l'expression de  $\mathcal{E}_p(x)$  :

$$\mathcal{E}_p(x) = \frac{-\beta}{|x - x_B|} \quad \text{pour tout } x \neq x_B$$

## Exercice 2

- La force de rappel élastique dérive de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_{p,e}(x) = \frac{1}{2} k(x - l_0)^2$ .

L'énergie potentielle totale dont dérive la résultante des forces s'exerçant sur le point est la somme de toutes les énergies potentielles :

$$\mathcal{E}_p(x) = -\frac{\beta}{|x - x_B|} + \frac{1}{2} k(x - l_0)^2.$$

Les positions d'équilibre du point matériel, s'il en existe, sont celles dont l'abscisse  $x$  vérifie  $\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x) = 0$  :

$$\begin{cases} \text{pour } l_0 < x < x_B, & \frac{\beta}{(x - x_B)^2} - k(x - l_0) = 0 \\ \text{pour } x_B < x, & -\frac{\beta}{(x - x_B)^2} - k(x - l_0) = 0 \end{cases}$$

Lorsque  $x > x_B$  le membre de gauche est toujours négatif : il n'y a pas de solution réelle à l'équation et donc pas de position d'équilibre : la première force et celle de rappel élastique sont toutes deux dirigées vers la gauche.

$\forall x \in [l_0; x_B[$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\beta}{(x - x_B)^2}$  est croissante de  $\beta/(l_0 - x_B)^2$  à  $+\infty$  ; la droite  $x \mapsto k(x - l_0)$  croissante de 0 à  $k(x_B - l_0)$ .

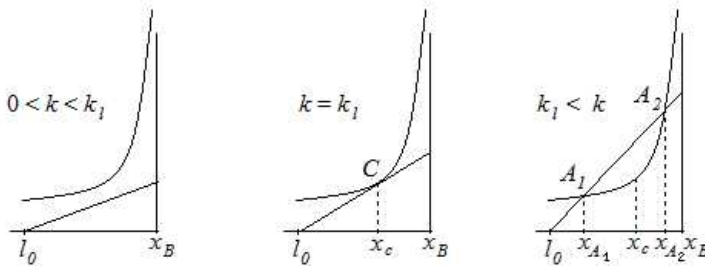


fig. 2

- Pour  $0 < k < k_l$ , les deux courbes ont une intersection vide : la première force l'emporte toujours sur la seconde et le point matériel se dirige vers  $x_B$ .
- Si  $k = k_l$  les deux courbes se coupent en un point  $C$  tel que la droite  $x \mapsto k(x - l_0)$  y est tangente à l'autre courbe. La position d'équilibre est stable à gauche : si le point matériel est déplacé à gauche de la position d'équilibre, la première force l'emporte sur la force de rappel du ressort et ramène le point matériel vers la droite ; il en est de même si le point matériel

est déplacé à droite de sa position d'équilibre, donc la position est instable à droite puisque la résultante des forces qui s'exercent sur le point l'en éloigne. Ainsi,  $C$  est une position d'équilibre instable. Le calcul donne, en  $C$  d'abscisse  $x_C$  :

$$\frac{\beta}{(x_C - x_B)^2} = k(x_C - l_0) \quad \text{et} \quad -\frac{2\beta}{(x_C - x_B)^3} = k$$

soit  $x_C = (2l_0 + x_B)/3$ .

- Lorsque  $k > k_l$ , les deux courbes se coupent en deux points,  $A_1$ , d'abscisse  $x_{A_1} < x_C$  et  $A_2$ , d'abscisse  $x_{A_2} > x_C$ . La fonction dérivée seconde est :

$$\mathcal{E}_p'' : x \mapsto \frac{2\beta}{(x - x_B)^3} + k$$

La position relative des courbes montre que  $\mathcal{E}_p''(x_{A_1}) > 0$ , donc que la position  $A_1$  est stable. Un raisonnement similaire mené en  $A_2$  amène à conclure à son instabilité.

## 18. Mécanique 4 : mouvement des particules chargées

### Exercice 1

- La force de gravitation entre deux protons de masse  $m_p$  à une distance  $r$  l'un de l'autre a pour intensité  $f_g$ , extraite de la loi de gravitation universelle :

$$f_g = \frac{\mathcal{G} m_p^2}{r^2}.$$

Elle est toujours attractive.

- La force électrostatique de Coulomb qui s'exerce entre eux, à la même distance, a pour intensité  $f_e$  :

$$f_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}.$$

Elle est toujours répulsive. Leur rapport vaut :

$$\frac{f_e}{f_g} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\mathcal{G} m_p^2}$$

qui est indépendant de la distance entre les protons.

Numériquement,  $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$  C et  $m_p \approx 1,66 \cdot 10^{-27}$  kg, d'où  $\frac{f_e}{f_g} \approx 1,25 \times 10^{36}$ .

L'interaction gravitationnelle est négligeable dans les mouvements de particules chargées devant la force électrostatique.

### Exercice 2

La partie magnétique de la force de Lorentz apparaît comme homogène au produit  $q v B$  :

$[q v B] = [f]$ . On en déduit que  $[q B] = \left[\frac{f}{v}\right]$ , d'où la dimension de l'expression de  $R$  :

$$\left[\frac{m v}{q B}\right] = \left[\frac{m v^2}{f}\right].$$

Or,  $[m v^2]$  est la dimension d'une énergie, donc d'un travail, soit le produit d'une force par une longueur,  $[f] \cdot [l]$  où  $l$  est une longueur. Ce qui confirme que  $R$  a bien la dimension d'une longueur.

## 19. Mécanique 5 : dynamique de rotation

### Exercice 1

Soit un point matériel  $M$ , de masse  $m$  et animé d'une vitesse  $\vec{v}_R$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$ ; soit un axe de rotation passant par  $A$  de direction  $\vec{u}_\Delta$ ; le moment cinétique du point  $M$  par rapport à l'axe  $\Delta$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est, par définition, égal à :

$$L_\Delta(M/\mathcal{R}) = \vec{u}_\Delta \cdot \vec{L}_A(M/\mathcal{R}), = \vec{u}_\Delta \cdot (\vec{AM} \wedge m \vec{v}_R)$$

Soit  $B$  un autre point de  $\Delta$ , calculons :

$$\vec{u}_\Delta \cdot \vec{L}_B(M/\mathcal{R}) = \vec{u}_\Delta \cdot (\vec{BM} \wedge m \vec{v}_R).$$

Attendu que  $\vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM}$ ; attendu que le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition, ainsi que le produit scalaire.

$$\vec{u}_\Delta \cdot (\vec{BM} \wedge m \vec{v}_R) = \vec{u}_\Delta \cdot (\vec{BA} \wedge m \vec{v}_R) + \vec{u}_\Delta \cdot (\vec{AM} \wedge m \vec{v}_R).$$

Attendu que le produit mixte  $\vec{u}_\Delta \cdot (\vec{BA} \wedge m \vec{v}_R)$  est aussi égal à  $m \vec{v}_R \cdot (\vec{u}_\Delta \wedge \vec{BA})$ ; attendu que  $A$  et  $B$  appartenant tous les deux à l'axe  $\Delta$ , le vecteur  $\vec{AB}$  est colinéaire à  $\vec{u}_\Delta$ , leur produit vectoriel est nul. Nous pouvons conclure que :

$$\vec{u}_\Delta \cdot \vec{L}_B(M/\mathcal{R}) = \vec{u}_\Delta \cdot \vec{L}_A(M/\mathcal{R})$$

Ce qui démontre l'indépendance du moment du point par rapport à l'axe du choix du point  $A$  sur l'axe.

### Exercice 2

1. Le système tourne dans le sens de rotation conventionnellement choisi si  $\dot{\theta} > 0$ . Le moment du couple moteur doit être positif et celui du couple résistant de frottement solide doit s'opposer à cette rotation :  $\mathcal{M}_f > 0$  de sorte que  $-\mathcal{M}_f < 0$ .

2. Le théorème du moment cinétique autour d'un axe fixe prend la forme donnée par la relation (19-11). Les moments des efforts extérieurs qui s'exercent sur le solide sont : le moment du couple moteur,  $\mathcal{M}_m$ ; le moment des efforts des paliers sur le solide, traduit par le couple de frottement solide  $-\mathcal{M}_f$  et le moment du couple de frottement fluide  $-\lambda \dot{\theta}$ . Ainsi, le théorème s'exprime :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathcal{M}_m \lambda \frac{d\theta}{dt} \quad \text{ou} \quad J \dot{\omega} = \mathcal{M}_m - \mathcal{M}_f - \lambda \omega,$$

où  $\omega = \dot{\theta}$ .

3. Pour que la mise en rotation se produise, il faut que le moment du couple moteur soit supérieur au moment du couple de frottement solide :  $\mathcal{M}_m > \mathcal{M}_f$ . Nous supposons cette hypothèse. satisfaite.

L'équation en  $\omega$  est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre; notons  $\tau = \frac{J}{\lambda}$ . La solution de l'équation en  $\omega$  est, en supposant la vitesse angulaire nulle à l'instant initial est :

$$\omega(t) = \left( \frac{\mathcal{M}_m - \mathcal{M}_f}{\lambda} \right) \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right).$$

La vitesse angulaire tend vers une vitesse limite. L'intégration de  $\omega(t)$  donne l'évolution de l'angle de rotation en fonction du temps. En supposant l'angle nul à l'instant initial, il est égal, aux instants ultérieurs, à :

$$\theta(t) = \left( \frac{\mathcal{M}_m - \mathcal{M}_f}{\lambda} \right) \left( t + \tau \left( \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right) \right).$$

La courbe représentative de  $\theta(t)$  tend vers la droite asymptote d'équation :

$$\theta = \left( \frac{M_m - M_f}{\lambda} \right) (t - \tau)$$

avec laquelle elle est pratiquement confondue au bout de  $5\tau$ .

## 20. Mécanique 6 : champs de force centrale

### Exercice 1

D'après la relation (20-3), la constante des aires est donnée par  $C = r^2 \dot{\theta}$  exprimée à n'importe quel instant si le mouvement se fait sous l'effet d'une force centrale, donc en particulier à l'instant initial. Il en résulte que  $C = r_0^2 \dot{\theta}_0$  et le moment cinétique initial en  $O$  du point matériel est égal à  $m C \vec{e}_z$ , puisque le rayon vecteur initial et le vecteur vitesse initial sont dans le plan  $xOy$ .

### Exercice 2

- L'énergie potentielle associée à la force centrale est  $\mathcal{E}_p(r) = -\frac{k}{r}$ . D'après (20-5), l'énergie potentielle effective du point matériel est :

$$\mathcal{E}_{eff} = \frac{m C^2}{2 r^2} - \frac{k}{r}$$

Si l'énergie mécanique initiale du point matériel est  $\mathcal{E}_{m0}^{(1)} \geq 0$ , le mouvement radial est illimité :  $r \in [r_1; +\infty]$  ; au cours du mouvement, le point matériel contourne le centre de force. L'état du point matériel est un état de diffusion.

- Si elle est  $\mathcal{E}_{m0}^{(3)} < \mathcal{E}_{m0}^{(2)} < 0$ , le mouvement radial du point matériel est limité :  $r \in [r_m; r_M]$  ; le point matériel tourne autour du centre de force qui l'attire, se rapprochant de lui au mieux à la distance  $r_m$  et s'en éloignant au pire à la distance  $r_M$ , la vitesse angulaire se déduisant de la constante des aires. L'état du point matériel est un état lié.

- Enfin, si elle est égale à  $\mathcal{E}_{m0}^{(3)}$ , le mouvement est circulaire de rayon  $r_3$  et donc uniforme autour du centre de force. Il s'agit d'un état lié particulier.

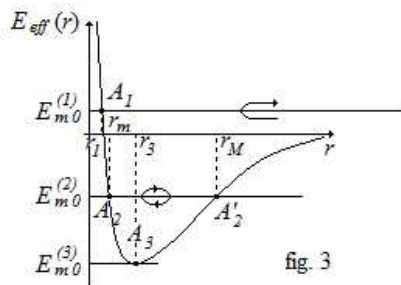


fig. 3

## 21. Mécanique 7 : champs newtoniens de force centrale

### Exercice 1


Le résultat sera donné par la troisième loi de Kepler. Sans données numériques sur la masse de la Terre, on se souvient du lien entre accélération de la pesanteur  $g$  et la masse de la Terre :

$$\frac{GM}{R_T^2} \approx g$$

$R_T$  étant le rayon terrestre. Ainsi, la troisième loi devient :

$$\frac{(R_T + h)^3}{T^2} = \frac{g R_T^2}{4\pi^2} \quad \text{soit} \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R_T + h)^3}{g R_T^2}}$$

$$\text{A.N. : } T \approx \frac{2\pi}{6,4 \times 10^6} \cdot \sqrt{\frac{(6,75 \times 10^6)^3}{9,8}} \approx 5500 \text{ s ou } 1 \text{ h } 32 \text{ min environ.}$$

 Les distances doivent être exprimées en mètres ; le temps recueilli est alors en secondes.

La vitesse du satellite sur son orbite circulaire vaut :

$$v = \frac{2\pi (R_T + h)}{T} = R_T \sqrt{\frac{g}{R_T + h}}$$

$$\text{A.N. : } v \approx 6,4 \times 10^6 \times \sqrt{\frac{9,8}{6,75 \times 10^6}} \approx 7,7 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1} \text{ ou } 7,7 \text{ km.s}^{-1}.$$

## Exercice 2

L'apogée  $h_a$  et le périégée  $h_p$  ayant les valeurs données, le demi-grand axe  $a = R_T + \frac{h_a + h_p}{2}$  de l'ellipse orbitale a la même valeur que précédemment. L'énergie mécanique du satellite ne dépendant que de ce paramètre (cf. (21-8)), elle vaut :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\mathcal{G} M m}{R_T + h} = -\frac{\mathcal{G} M m}{2a}$$

où  $v$  est la vitesse du satellite lorsqu'il est à l'altitude  $h$  au-dessus de la surface de la Terre,  $h \in [h_p ; h_a]$ . Soit :

$$v \approx R_T \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\frac{R_T + h_a + h_p - h}{R_T + h}}$$


Ainsi, à son apogée,  $h = h_a$ , sa vitesse est égale à

$$v_a \approx R_T \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\frac{R_T + h_p}{R_T + h_a}}$$

et au périégée,  $h = h_p$ , elle vaut :

$$v_p \approx R_T \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\frac{R_T + h_a}{R_T + h_p}}$$

$$\text{A.N. : } v_a \approx 7,68 \text{ km.s}^{-1} \text{ et } v_p \approx 7,75 \text{ km.s}^{-1}.$$

 La masse du satellite n'intervient pas dans la détermination des vitesses.

## 22. Le champ magnétique et son action sur les courants électriques

### Exercice 1

La norme du moment magnétique est, d'après sa définition,  $M = N i S$ .

Numériquement :  $M = 250 \times 0,15 \times 2 \times 10^{-3} = 75 \text{ mA.m}^2$ .



**Exercice 2**

- Le moment du couple qui s'exerce sur un moment magnétique  $\vec{M}$  placé dans un champ magnétique uniforme vaut (cf. (22-6)) est  $\vec{M} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ .

Pour que ce dernier soit maximal, il suffit que le moment magnétique, donc la normale au plan des spires de la bobine, ait une direction orthogonale à celle du champ magnétique. Sa norme vaut alors  $M = MB$ , soit :  $M = 75 \times 10^{-3} \times 35 \times 10^{-3} = 2,625 \times 10^{-3} \text{ N.m}$ .

- Le moment du poids d'une masse  $m$  suspendue à l'extrémité d'un levier horizontal de longueur  $d$  a pour norme  $mgd$ . La masse dont le moment du poids est identique au moment des actions du champ magnétique sur la bobine plate est :

$$m = \frac{MB}{gd}$$

- Application numérique :  $m = \frac{2,625 \times 10^{-3}}{9,8 \times 0,1} \approx 2,7 \text{ g}$ .

**23. Lois de l'induction****Exercice 1****1. Analyse du problème**

- Supposons le système initialement au repos. La masse  $M$  entraîne par l'intermédiaire du fil la barre ; cette dernière se déplace dans les lignes de champ du champ magnétique. Ainsi, la surface de la boucle constituée de la barre, de la résistance et des portions de rails entre elles varie au cours du temps et par conséquent le flux du champ magnétique à travers la boucle.

Il apparaît donc selon la loi de Faraday une force électromotrice induite dans le circuit et un courant induit. D'après la loi de Lenz, les effets de ce courant induit - la force de Laplace qui s'exerce sur la barre dans le champ magnétique-, s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance : la force de Laplace sera dirigée probablement dans le sens du vecteur de base  $-\vec{e}_y$ , ce qui ralentira la progression de l'équipage constitué de la masse  $M$  et de la barre.

- Supposons que le référentiel de l'expérience soit galiléen pour y appliquer le théorème de la résultante cinétique à la barre et à la masse (deux équations mécaniques non triviales) et déterminer l'équation électrique du circuit équivalent (une équation électrique).

**2. Mise en équation**

- Appelons  $y(t)$  la position de la barre ; orientons le courant électrique d'intensité  $i$  dans le sens de  $\vec{e}_x$ . Si la barre progresse de  $dy$  selon  $\vec{e}_y$ , la masse  $M$  progresse de la même quantité selon  $-\vec{e}_z$ .

La tension du fil au niveau de la masse  $m$  est notée  $\vec{T} = T\vec{e}_y$  ; transmise en intensité par le fil inextensible, sans masse et passant par la gorge d'une poulie sans inertie tournant sans frottement autour de son axe de rotation, elle s'exprime au niveau de la masse  $M$  :  $\vec{T}' = T\vec{e}_z$ .

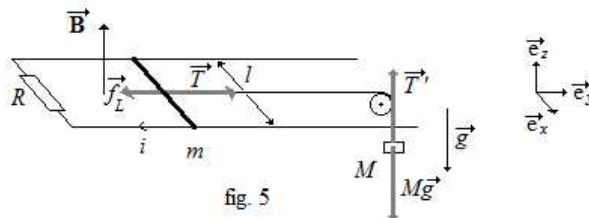


fig. 5

- Bilan des forces sur la barre : son poids (compensé par la réaction des rails, supposée dirigée selon  $\vec{e}_z$ ), la tension du fil  $T\vec{e}_y$  et la force de Laplace  $-iBl\vec{e}_y$ .

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la barre et projeté sur la direction  $\vec{e}_y$  se traduit par :

$$m\ddot{y} = T - iBl \quad (1)$$

Bilan des forces sur la masse  $M$  : son poids  $-Mg\vec{e}_z$  et la tension du fil  $T\vec{e}_z$ .

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la masse  $M$  et projeté sur la direction  $\vec{e}_z$  se traduit par :

$$-M\ddot{y} = -Mg + T \quad \text{ou} \quad M\ddot{y} = Mg - T \quad (2)$$

(1) + (2) membre à membre donne :

$$(m + M)\ddot{y} = Mg - iBl \quad (3)$$

Phénomènes d'induction : L'orientation de  $i$  impose celle de la normale orientée au plan du circuit, à savoir  $-\vec{e}_z$  ; le vecteur surface du circuit est ainsi  $\vec{S} = -ly\vec{e}_z$ . Le champ magnétique est  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ , son flux  $\Phi$  à travers le circuit est donc :

$$\Phi = \vec{S} \cdot \vec{B} = -lBy$$

Selon la loi de Faraday, la force électromotrice induite vaut :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = lB\dot{y}$$

Elle est représentable par une source de tension dont la flèche de convention est dans le même sens que  $i$ . Le courant induit dans le circuit est donc  $i = \frac{e}{R}$  et donne l'équation électrique :

$$i = \frac{lB}{R}\dot{y} \quad (4)$$

En remplaçant  $i$  dans (3) par son expression issue de (4), nous obtenons l'équation différentielle sur  $y$  suivante :

$$(m + M)\ddot{y} + \frac{B^2 l^2}{R}\dot{y} = Mg$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre en  $\dot{y}$ , à coefficients constants et avec second membre constant. La constante de temps  $\tau$  qui gouverne sa solution générale en  $\exp(-t/\tau)$  est :

$$\tau = \frac{(m + M)R}{B^2 l^2}$$

et sa solution particulière est égale à sa vitesse de régime permanent :

$$v_\infty = \dot{y}_p = \frac{RMg}{B^2 l^2}.$$

## Exercice 2

Le champ magnétique créé par la bobine principale peut être évalué par l'expression donnant la valeur du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infiniment long :

$$B_1 \approx \mu_0 \frac{N}{l} i_1(t)$$

- Son flux à travers les spires de la bobine plate, l'orientation des normales aux plans des

spires étant colinéaire et de même sens que le champ magnétique créé, est égal à :

$$\Phi_2 = N' S' B_1 = \mu_0 \frac{N N' S'}{l} i(t) = M i_1(t)$$

A.N. :  $M \approx 25 \text{ mH}$ .

• Le courant électrique dans la bobine 1 varie au cours du temps ; le champ magnétique qu'il crée a la même variation dans le cadre de l'A.R.Q.S. Son flux  $\Phi_2 = M i_1$  à travers les spires de la bobine plate varie donc et induit, selon la loi de Faraday, une force électromotrice  $e_2(t)$  à ses bornes. En convention récepteur, la tension aux bornes de la seconde bobine sera :

$$u_2(t) = -e_2(t) = \frac{d\Phi_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt}$$

La tension aux bornes de la bobine est périodique, de période 10 ms. Pour  $t \in [0 ; 4 \text{ ms}]$  :

$$u_2 = 25 \times 10^{-3} \frac{50 \times 10^{-3} - (-50 \times 10^{-3})}{4 \times 10^{-3} - 0} = 0,625 \text{ V}$$

Pour  $t \in [4 \text{ ms} ; 10 \text{ ms}]$  :

$$u_2 = 25 \times 10^{-3} \frac{-50 \times 10^{-3} - 50 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-3} - 4 \times 10^{-3}} \approx -0,42 \text{ V}$$

## 24. Thermodynamique 1 : description des systèmes à l'équilibre

### Exercice 1

•  $M = 18 \text{ g.mol}^{-1}$  désigne la masse molaire de l'eau ;  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  le nombre d'Avogadro ;  $V = 1,5 \text{ L}$ , le volume de la bouteille d'eau ;  $\rho = 1 \text{ g.cm}^{-3}$  sa masse volumique ;  $V_o$  le volume des masses d'eau océaniques.

• La bouteille contient la masse d'eau  $m = \rho V$ , soit  $n = \rho V/M$  moles d'eau et  $N = n N_A = \rho V N_A/M$  molécules d'eau « marquées ». Ces molécules sont censées se répartir uniformément dans le volume  $V_o$  des eaux océaniques, où elles sont alors en concentration  $c = \frac{N}{V_o}$  molécules par unité de volume. Si l'on remplit à nouveau la bouteille d'eau mélangée, il y aura en moyenne  $N' = c V$  molécules de l'eau « marquée » dans cette bouteille, soit :

$$N' = \frac{\rho V^2 N_A}{M V_o}.$$

Évaluons le volume  $V_o$  des eaux océaniques en faisant l'hypothèse qu'elles recouvrent 70 % de la surface  $S = 4\pi R_T^2$  du globe sur une épaisseur  $h$  d'environ 4500 m. Soit  $V_o = 0,7 \times 4\pi \times (6,4 \times 10^6)^2 \times 4500 \approx 1,62 \times 10^{18} \text{ m}^3$  ou  $1,62 \times 10^{21} \text{ L}$ .

• A. N. :  $N' \approx 46,4 \times 10^3$ . Une mole contient ainsi entre 46 000 et 47 000 fois plus de molécules qu'il n'y a de bouteilles de 1,5 L dans les océans ! Un verre d'eau de 20 cL contiendrait probablement entre 820 et 830 molécules de son contenu initial !

### Exercice 2

Il s'agit d'appliquer avec les bonnes unités la loi des gaz parfaits pour une quantité de matière égale à  $n = 1$  mole. Le volume recherché est :

$$V_m = \frac{RT}{p}$$

$$\text{A.N. : } V = \frac{8,314 \times 293}{10^5} \approx 24,4 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ ou } 24,4 \text{ L.}$$

**Exercice 3**

Il s'agit d'une transformation isotherme. D'après la première loi de Joule, l'énergie interne d'un gaz parfait n'est fonction que de sa température. Si cette dernière ne varie pas, l'énergie interne du gaz parfait ne varie pas non plus.

**25. Thermodynamique 2 : premier principe****Exercice 1**

- Le gaz est soumis à une pression externe transmise par le piston et issue de la force de la pression atmosphérique,  $p_0$ , et du poids du piston  $mg$ . La pression extérieure est le rapport de la force résultante à la section du piston :  $p_{\text{ext}} = p_0 + \frac{mg}{s}$ .

$$\text{A.N. : } p_{\text{ext}} \approx 1,0016 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

- Le piston étant à l'équilibre mécanique, la pression extérieure est égale à la pression du gaz,  $p = p_{\text{ext}}$ . Le volume se déduit de la loi des gaz parfaits :  $V_i = \frac{nRT_a}{p_{\text{ext}}}$ .

$$\text{A.N. : } V_i \approx 4,864 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ soit } 4,864 \text{ L.}$$

- Le système est en contact avec une seule source de chaleur : sa transformation est monotherme. Suffisamment lente pour être considérée comme réversible, elle est donc isotherme. Le gaz étant parfait, il suit la première loi de Joule : son énergie interne est restée constante.  $\Delta U = 0$ .

Donc, d'après le premier principe de la thermodynamique,  $W = -Q$ .

La température finale est la même que la température initiale :  $T_f = T_a$  ; son volume est divisé par deux :  $V_f = \frac{V_i}{2}$  ; d'après la loi des gaz parfaits, sa pression a dû doubler :  $p_f = 2p_{\text{ext}}$ .

Le travail des forces de pression reçu par le gaz vaut :

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} p_{\text{ext}} dV = - \int_{V_i}^{V_f} p dV = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT_a}{V} dV = nRT_i \ln\left(\frac{V_i}{V_f}\right)$$

$$\text{A.N. : } W = 0,2 \times 8,314 \times 293 \ln 2 \approx 338 \text{ J.} \quad Q = -338 \text{ J.}$$

Le gaz a reçu du travail lors de la compression qu'il évacue par transfert thermique à travers la paroi pour demeurer en équilibre thermique avec le thermostat extérieur.

**Exercice 2**

- La transformation est monobare et monotherme. Au cours de celle-ci, le gaz est en contact avec le thermostat, mais n'est plus en équilibre avec lui à tous instants.

La pression externe qui s'exerce sur lui n'est plus due qu'à la pression atmosphérique et au poids du piston qui ferme le cylindre, soit  $p_{\text{ext}} = p_0 + \frac{mg}{s}$ . La pression du gaz n'est alors plus un paramètre d'état pendant la transformation ; elle ne le redevient qu'une fois l'équilibre rétabli.

- La température finale est égale à la température initiale ; la pression finale est celle au départ de l'exercice 1, donc son volume est redevenu le volume de départ. Le gaz est parfait, donc sa variation d'énergie interne au cours du retour à l'état de départ est nulle.

Le travail reçu des forces de pression vaut  $W = -p_{\text{ext}}(V_i - V_f)$ .

$$\text{A.N. : } W \approx -243,6 \text{ J.}$$

- La variation d'énergie interne étant nulle, l'échange thermique est opposé au travail reçu :  $Q = -W$ , soit  $Q = 243,6 \text{ J}$ . Le thermostat doit fournir au gaz l'énergie que ce dernier perd en augmentant son volume afin que l'équilibre thermique entre le gaz et lui se rétablisse.
- Le retour à l'état de départ de manière irréversible n'a pas permis de récupérer l'intégralité du travail de compression fourni au gaz au cours de la transformation réversible.

### Exercice 3

La transformation est une mise en équilibre thermique dans un calorimètre adiabatique à pression constante. La variation de l'enthalpie du système constitué de l'eau et du fer est égale au transfert thermique reçu de l'extérieur au cours de l'évolution :  $\Delta H = Q$ . Négligeant les fuites thermiques,  $Q = 0$ , et  $\Delta H = 0$ . L'enthalpie est une fonction d'état extensive, elle est donc égale à la somme de l'enthalpie de l'eau et de celle du fer et leurs variations s'ajoutent aussi :

$$\Delta H = \Delta H_{\text{eau}} + \Delta H_{\text{fer}}$$

Les deux constituants sont des phases condensées ; la variation d'enthalpie de chacune d'elles est le produit de sa capacité thermique par sa variation de température : l'eau passe de la température initiale  $T_e$  à la température finale d'équilibre  $T_{eq}$  et le fer, de la température initiale  $T_F$  à la température finale  $T_{eq}$ . Ainsi :

$$\Delta H_{\text{eau}} = m_e c_p^{(e)} (T_{eq} - T_e) \text{ et } \Delta H_{\text{fer}} = m_F c_p^{(F)} (T_{eq} - T_F). \text{ D'où :}$$

$$\Delta H = m_e c_p^{(e)} (T_{eq} - T_e) + m_F c_p^{(F)} (T_{eq} - T_F) = 0$$

soit la température d'équilibre :

$$T_{eq} = \frac{m_e c_p^{(e)} T_e + m_F c_p^{(F)} T_F}{m_e c_p^{(e)} + m_F c_p^{(F)}}$$

A.N. :  $T_{eq} \approx 33,6^\circ\text{C}$ .



Vérifiez que l'injection des températures en kelvins dans le calcul redonne une température en kelvins équivalente à celle donnée ci-dessus en degrés Celsius.

## 26. Thermodynamique 3 : changements d'état

### Exercice 1

Exemple d'exercice sur les changements d'états où il faut émettre des hypothèses pour établir un bilan énergétique avec une (des) condition(s) de validation des hypothèses.

- Pour une masse de glace suffisamment faible, l'équilibre du système est un état liquide à la température d'équilibre  $0^\circ\text{C} < T_f < T_e$ . La mise en équilibre se déroule à pression constante, sans transfert thermique avec l'extérieur (calorimètre adiabatique,  $Q = 0$ ) ; l'enthalpie du système est constante :

$$\Delta H = 0 = \Delta H_s + \Delta H_l$$

où  $\Delta H_s$  est la variation d'enthalpie de l'eau initialement sous forme de glace et  $\Delta H_l$  la variation d'enthalpie de l'eau initialement liquide.

- La glace se réchauffe jusqu'à sa température de fusion  $T_{fg} = 0^\circ\text{C}$  à la pression atmosphérique normale, puis elle fond à  $T_{fg}$  et l'eau produite se réchauffe jusqu'à la température finale. La variation d'enthalpie de cette masse d'eau au cours de ces transformations successives est ainsi :

$$\Delta H_s = m_g c_{p,g} (T_{fg} - T_g) + m_g L_f + m_g c_{p,e} (T_f - T_{fg})$$

L'eau initialement liquide dans le calorimètre se refroidit de  $T_e$  à  $T_f$  ; son enthalpie varie de :

$$\Delta H_l = m_e c_{p,e} (T_f - T_e)$$

Ainsi, la température finale  $T_f$  est égale à :

$$T_f = \frac{m_g T_{fg} + m_e T_e}{m_g + m_e} - m_g \frac{c_{p,g} (T_{fg} - T_g) + L_f}{(m_g + m_e) c_{p,e}}$$

L'expression de  $T_f$  n'est valide que si elle est supérieure à  $T_{fg}$ , soit pour une masse de glace initiale :

$$m_g \leq \frac{m_e c_{p,e} (T_e - T_{fg})}{c_{p,g} (T_{fg} - T_g) + L_f} = m_{g1}$$

Lorsque la masse de glace dépasse  $m_{g1}$ , une partie de celle-ci ne fond pas et l'équilibre final est un système diphasé constitué d'eau liquide et de glace à sa température de fusion. Dans cette hypothèse et en appelant  $m_{gf}$  la masse de glace non fondue, la variation d'enthalpie de l'eau solide est :

$$\Delta H_s = m_g c_{p,g} (T_{fg} - T_g) + (m_g - m_{gf}) L_f \quad ;$$

celle de l'eau liquide est :

$$\Delta H_l = m_e c_{p,e} (T_{fg} - T_e)$$

La température finale est  $T_{fg}$  et la masse de glace restante telle que :

$$m_g c_{p,g} (T_{fg} - T_g) + (m_g - m_{gf}) L_f + m_e c_{p,e} (T_{fg} - T_e) = 0$$

avec  $0 \leq m_{gf} \leq m_g$ . Soit :

$$m_{gf} = m_g \left( 1 + \frac{c_{p,g} (T_{fg} - T_g)}{L_f} \right) + \frac{m_e c_{p,e} (T_{fg} - T_e)}{L_f}$$

D'où :

$$m_{g1} \leq m_g \leq \frac{m_e c_{p,e} (T_e - T_{fg})}{c_{p,g} (T_{fg} - T_g)} = m_{g2}$$

Au delà de  $m_{g2}$ , la glace n'a pas fondu et une partie de l'eau liquide initiale s'est solidifiée. L'équilibre final du système est encore un équilibre liquide - solide à sa température de fusion. Dans cette hypothèse, en appelant  $m_{lf}$  la masse d'eau liquide finale à  $T_{fg}$ , les variations d'enthalpies de la glace et de l'eau liquide initiales sont respectivement :

$$\Delta H_s = m_g c_{p,g} (T_{fg} - T_g)$$

$$\Delta H_l = m_e c_{p,e} (T_{fg} - T_e) - (m_e - m_{lf}) L_f$$

$\Delta H_s + \Delta H_l = 0$ , soit une masse d'eau liquide  $m_{lf}$  égale à :

$$m_{lf} = m_e + \frac{m_e c_{p,e} (T_e - T_{fg}) - m_g c_{p,g} (T_{fg} - T_g)}{L_f}$$

qui doit vérifier :  $0 \leq m_{lf} \leq m_e$ , soit un intervalle de masse de glace  $m_g$  :

$$m_{g2} \leq m_g \leq \frac{m_e c_{p,e} (T_e - T_{fg}) + m_e L_f}{c_{p,g} (T_{fg} - T_g)} = m_{g3}$$

Enfin, au delà de  $m_{g3}$ , l'eau liquide a été refroidie jusqu'à  $T_{fg}$  puis s'est solidifiée. Le système est entièrement solide à la température d'équilibre  $T_f < T_{fg}$ . Les variations d'enthalpie de la glace et de l'eau liquide initiales sont respectivement :

$$\Delta H_s = m_g c_{p,g} (T_f - T_g)$$

$$\Delta H_l = m_e c_{p,e} (T_{fg} - T_e) - m_e L_f + m_g c_{p,g} (T_f - T_{fg})$$

La température finale de la glace est :

$$T_f = \frac{m_g T_{fg} + m_e T_e}{m_g + m_e} + m_e \frac{c_{p,e} (T_e - T_{fg}) + L_f}{(m_g + m_e) c_{p,g}}$$

Les limites de l'équilibre diphasé sont donc  $m_{g1}$  et  $m_{g3}$ .

### Exercice 2

1. La masse volumique de l'éthanol liquide est  $\rho_l = d \rho_{eau}$  où  $\rho_{eau}$  est la masse volumique de l'eau liquide à 20 °C, voisine de 1000 kg.m<sup>-3</sup>. Le volume massique est l'inverse de la masse volumique :  $v_l = \frac{1}{d \rho_{eau}}$ . Ainsi,  $v_l \approx 1,267 \text{ L.kg}^{-1}$ .

La vapeur d'éthanol à la pression de vapeur saturante à 20°C est censée se comporter comme un gaz parfait : exprimons son volume molaire et son volume massique,  $v_v$ , en divisant le volume molaire par la masse molaire  $M_{eth}$  de l'éthanol :

$$\frac{V}{n} = \frac{RT}{p_s} \quad \text{et} \quad v_v = \frac{RT}{M_{eth} p_s}$$

$$\text{A.N. : } v_v = \frac{8,314 \times 293}{46 \times 10^{-3} \times 58,7 \times 10^3} \approx 0,9022 \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$$

2. Soit  $V'$  le volume d'éthanol liquide introduit dans l'enceinte et  $m$  la masse correspondante :  $m = \frac{V'}{v_l}$ , soit  $m = 3,945 \text{ g}$ . Le volume massique de la substance répartie dans le volume  $V$  de l'enceinte est  $v = \frac{V}{m}$ , égal à 0,2535 m<sup>3</sup>.kg<sup>-1</sup>. On constate que  $v_v > v > v_l$  donc le liquide s'est partiellement vaporisé.

La fraction massique liquide de l'éthanol est donné par la règle des moments :  $x_l = \frac{v_v - v}{v_v - v_l}$  soit  $x_l \approx 0,720$  et sa fraction massique vapeur,  $x_v = \frac{v - v_l}{v_v - v_l}$  soit  $x_v \approx 0,2800$ .

3. La chaleur fournie par le thermostat au liquide pour qu'il se vaporise à la température de 20°C est  $Q_v = m_v L_v = m x_v L_v$ .

$$\text{A.N. : } Q_v = 3,945 \times 0,2800 \times 925 \approx 1,02 \text{ kJ.}$$

*Remarque 1* : Autre manière de faire : déterminer par la loi des gaz parfaits la pression  $p$  que l'éthanol, supposé vaporisé, aurait dans l'enceinte à la température donnée : si  $p \geq p_s$ , le système est diphasé ; si  $p < p_s$ , tout le liquide s'est vaporisé.

*Remarque 2* : Il n'y a pas d'autre échange que la chaleur  $Q_v$ , absorbée par l'éthanol liquide pour être vaporisé, l'enceinte étant initialement vide. La partie d'éthanol qui se vaporise n'a à lutter contre aucune force de pression extérieure.

## 27. Thermodynamique 4 : second principe

### Exercice 1

1. • La transformation est monotherme réversible, elle est donc isotherme. Le gaz étant supposé parfait, le doublement de sa pression initiale conduit à une division par deux de son volume initial,  $V_f = \frac{V_i}{2}$ .

La variation de l'entropie d'un gaz parfait, en fonction de la température et de la pression est :

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T_f^\gamma p_f^{1-\gamma}}{T_i^\gamma p_i^{1-\gamma}} \right)$$

Or  $T_f = T_i = T_0$  et  $p_f = 2 p_i$ , d'où :

$$\Delta S = -nR \ln \left( \frac{p_f}{p_i} \right) = -nR \ln 2$$

A.N. :  $\Delta S = -0,2 \times 8,314 \times \ln 2 \approx -1,153 \text{ J.K}^{-1}$ .

- La variation d'entropie du thermostat est  $\Delta S_{th} = \frac{Q_{th}}{T_0}$  où  $Q_{th}$  est l'énergie échangée par lui avec le gaz :  $Q_{th} = -Q$ . Or, le gaz est parfait, il suit donc la première loi de Joule et sa variation d'énergie interne est nulle. D'après le premier principe de la thermodynamique, il en résulte que  $W = -Q$ ,  $W$  étant le travail reçu par le gaz lors de la compression. Ainsi,  $Q_{th} = W$ .

- La transformation est une suite d'équilibres au cours desquels la pression du gaz est en permanence égale à la pression extérieure ; le travail est donc donné par :

$$W = - \int_{V_i}^{V_f/2} \frac{nRT_0}{V} dV = nRT_0 \ln 2$$

Il en résulte que  $\Delta S_{th} = nR \ln 2$ . La variation d'entropie de l'univers est égale à  $\Delta S + \Delta S_{th} = 0$ , conformément au caractère réversible de la transformation.

**2. •** La transformation est monotherme. La température finale d'équilibre du gaz est égale à sa température initiale. Sa pression est égale à la pression du début,  $p_0$ . Donc, le gaz aura retrouvé ses caractéristiques initiales  $p_0$ ,  $V_i$  et  $T_0$ .

Comme il retrouve son état initial, sa variation d'entropie est opposée à celle de la transformation précédente. Ainsi,  $\Delta S = 1,153 \text{ J.K}^{-1}$ .

Le travail fourni par le gaz au cours de son expansion vaut, puisque  $p_{ext} = p_0$  est :

$$W = - \int_{V_i/2}^{V_i} p_{ext} dV = - \frac{p_0 V_i}{2} = - \frac{nRT_0}{2}$$

A.N. :  $W = - \frac{0,2 \times 8,314 \times 300}{2} \approx -250 \text{ J}$ .

- Comme sa température à l'équilibre est de nouveau  $T_0$ , son énergie interne n'a pas varié et le transfert thermique que le gaz a reçu de la part du thermostat est  $Q = -W$ . La variation d'entropie du thermostat a la même expression générale que précédemment :  $\Delta S_{th} = \frac{W}{T}$

A.N. :  $\Delta S_{th} = \frac{-250}{300} \approx -0,833 \text{ J.K}^{-1}$ .

- La variation d'entropie de l'univers vaut  $\Delta S + \Delta S_{th}$ , soit  $0,32 \text{ J.K}^{-1}$ . Elle est bien strictement positive comme l'on s'y attend, en vertu du second principe de la thermodynamique, pour l'univers, système isolé, subissant une transformation irréversible.

## Exercice 2

Nous avons donné l'expression de la variation d'entropie d'une phase condensée (cf. formule (27-8)). L'entropie est une fonction extensive : sa variation pour un système constitué de deux phases est la somme des variations d'entropie pour chacune d'elles. Le calorimètre était adiabatique, son contenu n'avait aucun échange thermique avec l'extérieur : la variation d'entropie de l'univers est par conséquence égale à celle du système. Ainsi,

$$\Delta S_u = \Delta S = \Delta S_{eau} + \Delta S_{fer}$$



or

$$\Delta S = m_e c_p^{(e)} \ln \left( \frac{T_{eq}}{T_e} \right) + m_F c_p^{(F)} \ln \left( \frac{T_{eq}}{T_F} \right)$$

$$\text{A.N. : } \Delta S = 250 \times 4,19 \times \ln \left( \frac{273 + 33,6}{273 + 20} \right) + 100 \times 0,449 \times \ln \left( \frac{273 + 33,6}{273 + 350} \right) \approx 15,7 \text{ J.K}^{-1}.$$

- La variation d'entropie de l'univers est strictement positive, conformément au caractère irréversible de la mise en équilibre thermique des deux corps.



*Si dans l'expression donnant la température d'équilibre, il est possible de laisser les températures en degré Celsius, il est impératif qu'elles soient exprimées en kelvins dans les variations d'entropie.*

## 28. Thermodynamique 5 : les machines thermiques

### Exercice 1

1. Le moteur cyclique ditherme fonctionne de manière réversible si son rendement est égal au rendement de Carnot  $\eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ . A.N. :  $\eta_C = 1 - \frac{293}{450} \approx 0,349$ . Le rendement du moteur est strictement inférieur à cette valeur donc le moteur fonctionne de manière irréversible.

2. Le travail fourni par cycle  $W_{cycle}$  est égal à l'opposé du rapport de la puissance divisée par le nombre de cycle par seconde soit :

$$W_{cycle} = - \frac{P}{n(\text{en cycles / s})}$$

$$\text{A.N. : } W_{cycle} = - \frac{105 \cdot 10^3 \times 60}{2250} = -2800 \text{ J.}$$

D'après la définition du rendement  $\eta$ , la source chaude a fourni au moteur  $-W_{cycle}/\eta$  soit  $\frac{2800}{0,32} = 8750 \text{ J}$ . La machine a échangé avec la source froide la chaleur  $Q_f = -W - Q_c$ , soit :  $Q_f = -5950 \text{ J}$ .

3. L'entropie créée à chaque cycle est la différence entre la variation de l'entropie de la machine et l'entropie échangée :

$$S_c = \Delta S_{cycle} - \frac{Q_f}{T_f} - \frac{Q_c}{T_c}$$

$$\text{A.N. : } S_c \approx 0,863 \text{ J.K}^{-1} \text{ à chaque cycle.}$$

### Exercice 2

1. L'application du premier principe de la thermodynamique aux systèmes ouverts se fait en considérant que l'énergie interne et l'enthalpie de l'eau sont des fonctions de la seule température, donc  $h_2 - h_1 = 0$  ; que la conduite est adiabatique donc  $q = 0$  et  $\dot{Q} = 0$ . Il en résulte que  $w_u = 0$  et  $\dot{W} = 0$ .

Or, le travail massique utile est la somme du travail massique fourni par l'eau à la turbine  $w_e$  et du travail massique reçu des forces de pesanteur  $w_p = gH$ , donc  $w_e = -gH$  et  $\dot{W}_e = D w_e$  avec  $D = \rho_{eau} s V$ . Ainsi :

$$w_e = -\rho_{eau} s V g H \quad \text{d'où} \quad \dot{W}_e = -162,5 \text{ MW.}$$

La puissance sur la turbine est négative car elle est comptabilisée du point de vue du fluide qui la lui apporte. L'eau aurait accéléré au terme de sa chute si elle n'avait pas cédé de la puissance à la turbine.

**2.** Le premier principe appliqué aux systèmes ouverts doit prendre en compte cette dissipation thermique sous la forme d'une chaleur massique échangée  $q = -1,7 \text{ kJ.kg}^{-1}$ . D'où :

$$w'_e + w_p + q = 0 \quad \text{soit} \quad w'_e = -w_p - q$$

A.N. :  $w'_e = -9581,5 \text{ J.kg}^{-1}$  et  $\dot{W}'_e \approx -138 \text{ MW}$ .

La différence correspond à une perte d'efficacité d'environ 15 % de la chute.

## Partie 3

# Chimie



Antoine Lavoisier, 1743-1794

Considéré comme un des pères de la chimie moderne, il a énoncé la première version de la loi de conservation de la matière.

Il fit d'importantes recherches sur la composition de l'eau (dont il appela les composants oxygène et hydrogène) et le processus de combustion (encore l'oxygène).

Il participa (avec Claude Louis Berthollet) à une nouvelle nomenclature chimique qui a servi de base au système actuel.



# 1 Systèmes physico-chimiques

## 1. Les trois états de la matière

Principalement, on distingue trois états de la matière.

### 1.1 Gaz

C'est l'état physique le plus désordonné, les espèces chimiques sont en forte agitation et très éloignées les unes des autres.

### 1.2 Liquide

L'état liquide est plus ordonné que l'état gazeux. Les espèces chimiques sont réparties irrégulièrement, la distance séparant les espèces est de l'ordre de grandeur de l'espèce chimique ce qui permet leur déplacement de proche en proche.

### 1.3 Solide

Trois structures à l'état solide existent :

- **Solide cristallin**

L'espèce chimique est organisée de façon régulière, elle s'organise de façon périodique dans l'espace.

Plusieurs organisations existent. On parle de **variétés allotropiques**.

- **Solide amorphe**

Les espèces chimiques se distribuent de façon aléatoire.

Il n'y a aucun ordre.

La structure est proche de celle de l'état liquide mais les espèces chimiques sont figées.

- **Solide semi-cristallin**

Il y a présence de zones cristallines ordonnées et de zones amorphes désordonnées.

## 2. Différentes transformations

Il existe trois types de transformations.

### 2.1 Transformations physiques

L'espèce chimique change de phase ou de variétés allotropiques.

**Exemples :**  $\text{H}_2\text{O(l)} \rightarrow \text{H}_2\text{O(g)}$  ;  $\text{C(s, diamant)} \rightarrow \text{C(s, graphite)}$

### 2.2 Transformations chimiques

Plusieurs espèces chimiques réagissent pour donner d'autres espèces.

Dans une transformation chimique, les électrons se réorganisent.

**Exemple :**  $\text{H}_2\text{(g)} + \frac{1}{2} \text{O}_2\text{(g)} \rightarrow \text{H}_2\text{O(g)}$

### 2.3 Transformations nucléaires

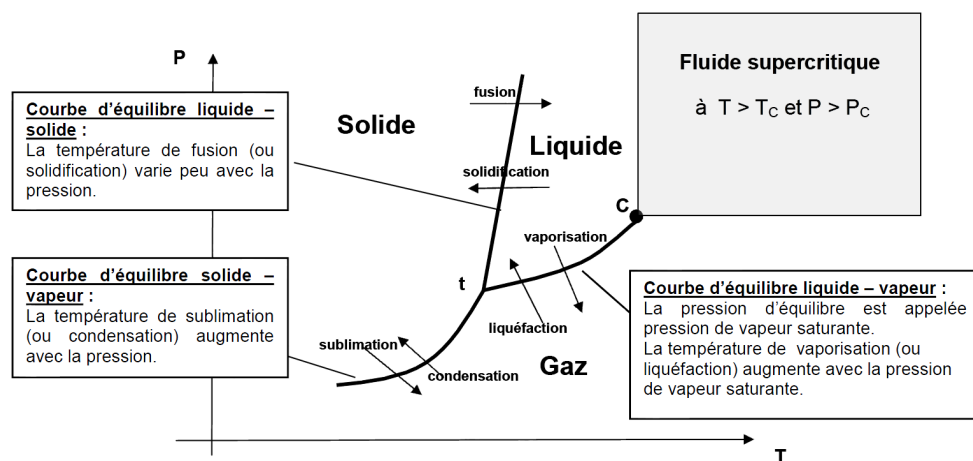
La transformation nucléaire concerne les noyaux des atomes.

**Exemple :**  ${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^{222}_{86}\text{Rn}$

### 3. Diagrammes d'état (P, T)

En fonction des conditions de pression et de température, l'espèce chimique se présentera sous une ou plusieurs phases. Le diagramme isochore ( $V = \text{constante}$ ),  $P = f(T)$  permet de déterminer l'état physique de l'espèce.

#### 3.1 Allure du diagramme isochore $P = f(T)$



#### 3.2 Commentaires

- Aux fortes pressions, les phases condensées sont présentes : solide puis liquide.
- Aux plus faibles pressions, c'est l'état gazeux qui est stable.
- Au point **t**, appelé point triple, coexistent les trois phases liquide, solide et gazeuse.
- Le point **C** se nomme point critique. Pour  $T > T_C$  et  $P > P_C$ , on est dans le domaine du fluide supercritique. Les fluides supercritiques sont de plus en plus utilisés en chimie car ils proposent une alternative de chimie respectueuse de l'environnement (ex : utilisation du dioxyde de carbone supercritique pour permettre l'extraction de composés apolaires).

#### 3.3 Exemple d'utilisation d'un fluide supercritique

Comparaison de l'extraction de la caféine par fluide supercritique ou par une méthode classique de solvant :

Extraction par le dioxyde de carbone supercritique	Extraction par solvant (ex : hexane)
la caféine est très soluble dans le $\text{CO}_2$ supercritique	la caféine est soluble dans un solvant organique
le $\text{CO}_2$ est non toxique	le solvant est souvent toxique

$T_C(\text{CO}_2) = 31^\circ\text{C}$ , $P_C(\text{CO}_2) = 74$ bars ; la faible température ne dénature pas les qualités des extraits	l'extraction est réalisée à température d'ébullition des solvants
séparation facile : Une fois le composé extrait, il suffit de diminuer la pression. Lorsque le dioxyde de carbone n'est plus à l'état supercritique, les extraits précipitent car ils ne sont plus solubles dans le dioxyde de carbone gazeux.	séparation par élimination du solvant par vaporisation. Il y a risque de présence de solvant résiduel.

## 4. Qu'est-ce qu'un constituant physico-chimique ?

Un constituant physico-chimique correspond à :

une espèce chimique	une phase donnée
Atome (ex. Argon, Hélium) Molécule (ex. dioxyde de carbone $\text{CO}_2$ ) Ion (ex. ion chlorure $\text{Cl}^-$ ) Particule (électron, particule $\alpha = {}^4_2\text{He} \dots$ ).	On définit une phase comme un domaine où des grandeurs telles la température, la pression (grandeurs dites intensives, indépendantes de la quantité de matière) varient de façon continue dans l'espace. Principalement, on retrouve les trois états de la matière : gaz, liquide, solide.

**Exemple :**  $\text{H}_2\text{O}(\text{l})$ ,  $\text{H}_2\text{O}(\text{g})$  forment deux constituants physico-chimiques.

## 5. Systèmes physico-chimiques

### 5.1 Généralités

- Un système physico-chimique peut comprendre plusieurs constituants physico-chimiques (espèces chimique + état physique).

#### Exemples

$\text{H}_2\text{O}(\text{l})$  + Ethanol(l) forme un système physico-chimique

$\text{H}_2\text{O}(\text{v})$  + Ethanol(v) forme un autre système physico-chimique.

- Si une seule espèce chimique est présente, on parle d'un corps pur. Si plusieurs espèces interviennent, il s'agit d'un mélange.

### 5.2 Les mélanges

Pour décrire les mélanges, il convient d'utiliser des grandeurs pertinentes.

Considérons le mélange de  $N$  espèces chimiques  $A_1, A_2, \dots, A_N$  de quantité de matière respectives  $n_1, n_2, \dots, n_N$ . On définit  $n_{\text{tot}}$ , la quantité de matière totale du mélange. Si le mélange est :

- un solide ou un liquide**

Pour décrire chaque espèce  $A_i$ , on utilise plutôt la **fraction molaire** définie par :

$$x_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2 + \dots + n_N} = \frac{n_i}{n_{tot}} .$$

- **une solution aqueuse**

On utilise plutôt la **concentration molaire** de l'espèce  $A_i$ , définie par :

$$[A_i] = \frac{n_i}{V}$$

où  $V$  est le volume de la phase aqueuse.

- **un gaz**

On définit la pression partielle  $P_i$  de l'espèce  $A_i$ .

Soit  $P$  la pression totale du système. La **pression partielle**  $P_i$  de l'espèce  $A_i$  est la pression qu'aurait  $A_i$  si l'espèce était pure dans le mélange de volume  $V$ , à la température  $T$ .

On suppose que le mélange est un mélange de gaz parfaits. Chaque espèce chimique vérifie la loi des gaz parfaits :

$$P_i = \frac{n_i R T}{V} \quad \text{avec}$$

$P_i$  pression partielle de l'espèce  $A_i$  en Pa,

$R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$  appelé constante des gaz parfaits,

$T$ , température en K,

$V$ , volume en  $\text{m}^3$ .

**Relations :**

$$P = \frac{n_{tot} R T}{V} = \frac{\sum_i n_i R T}{V} = \sum_i P_i$$

$$\frac{P_i}{P} = \frac{n_i}{n_{tot}} = x_i \implies P_i = x_i P \quad (\text{loi de Dalton}).$$

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Soit le système physico-chimique suivant dans un réacteur R :  $\text{CO}_2(\text{g})$  de quantité de matière  $n_1$ ,  $\text{CO}_2(\text{aq})$  de quantité de matière  $n_2$ ,  $\text{HCO}_3^-$  de quantité de matière  $n_3$  à  $T = 298 \text{ K}$ , eau. Le seul gaz présent dans le réacteur est le dioxyde de carbone.

Quelles sont les grandeurs pertinentes permettant de décrire les différents constituants physico-chimiques du système ?

Exprimez ces grandeurs en fonction des quantités de matière.

**Exercice 2 :** On considère un système physico-chimique en équilibre contenant du monoxyde de carbone (0,5 mol), du dihydrogène (1 mol) et du méthanol gazeux (0,5 mol) à  $T = 309^\circ\text{C}$  et  $P = 167 \text{ bar}$ .

Calculez les pressions partielles des différentes espèces chimiques.



## 2 Transformation chimique

Une transformation chimique est une transformation au cours de laquelle des espèces chimiques disparaissent et de nouvelles apparaissent.

Les espèces qui disparaissent sont qualifiées de **réactifs**.

Les espèces qui apparaissent sont nommées les **produits**.

La transformation chimique permet de passer d'un état initial à un état final.

Pour pouvoir décrire l'évolution macroscopique du système, la transformation chimique est modélisée par la réaction chimique dont on écrit une équation.

### 1. Écriture de l'équation de réaction

Pour écrire l'équation de la réaction, il faut :

- ❶ Identifier les réactifs et les produits.
- ❷ Placer les réactifs à gauche de l'équation, les produits à droite. Réactifs et produits seront séparés par une flèche ( $\rightarrow$ ) : réactifs  $\rightarrow$  produits.
- ❸ Afin d'assurer la conservation en nature et en nombre des éléments chimiques, il convient d'ajuster les nombres stœchiométriques  $v_i$ . Si un corps simple est présent dans l'équation, il vaut mieux terminer en ajustant le nombre stœchiométrique de cette espèce.

Exemple :  $\text{MnO}_2(\text{s}) + 4\text{HCl}(\text{g}) \rightarrow \text{MnCl}_2(\text{s}) + 2\text{H}_2\text{O}(\text{l}) + \text{Cl}_2(\text{g})$ .

Les nombres stœchiométriques seront définis comme des valeurs positives que le composé soit un réactif ou un produit.

### 2. Avancement chimique $\xi$

#### 2.1 Description

Pour décrire l'évolution de la transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique, on utilise l'avancement chimique, ou avancement de la réaction, noté  $\xi$  et valant :

- pour un produit :

$$\xi = \frac{n_i - n_i^0}{v_i} \quad (\text{en mol})$$

avec  $n_i^0$  = quantité de matière de l'espèce  $A_i$  à  $t = 0$  ;

$n_i$  = quantité de matière de l'espèce  $A_i$  à  $t$ .

- pour un réactif :

$$\xi = \frac{n_i^0 - n_i}{v_i} \quad (\text{en mol})$$

avec  $n_i^0$  = quantité de matière de l'espèce  $A_i$  à  $t = 0$  ;

$n_i$  = quantité de matière de l'espèce  $A_i$  à  $t$ .

#### 2.2 Bilan

Un bilan de matière permet de préciser l'évolution du système.

**Exemple :**

	$N_2(g)$	+	$3H_2(g)$	=	$2NH_3(g)$
$t = 0$	$n_{N_2}^0$		$n_{H_2}^0$		$n_{NH_3}^0$
$t$	$n_{N_2}^0 - \xi$		$n_{H_2}^0 - 3\xi$		$n_{NH_3}^0 + 2\xi$

### 3. Constante d'équilibre

#### 3.1 Définition

Lorsque qu'au niveau macroscopique, on n'observe plus d'évolution des quantités de matière des réactifs ou des produits, on en conclut que la transformation chimique a atteint un état d'équilibre. On associe alors à l'équation de la réaction, une grandeur thermodynamique, appelée constante d'équilibre notée  $K^0$ .

Cette grandeur ne dépend que de la température  $K^0(T)$ . À une température fixée, la constante d'équilibre est une constante.

Avec la réaction chimique  $\nu_1 A_1 + \dots + \nu_N A_N \rightarrow \nu'_1 A'_1 + \dots + \nu'_N A'_N$ , on obtient :

$$K^0 = \frac{\prod_{\text{produit } j} (a_j)_{eq}^{\nu'_j}}{\prod_{\text{réactif } i} (a_i)_{eq}^{\nu_i}}$$

avec  $a_{j,eq}$  activité des produits à l'équilibre  $a_{i,eq}$  activité des réactifs à l'équilibre.



Puisque les activités sont adimensionnelles, la constante d'équilibre n'a pas d'unité.

#### 3.2 Expression des activités

espèce chimique	phase	Activité $a_i$
Espèce chimique pure $A_i$	liquide ou solide	$a_i = 1$
	gaz	$a_i = \frac{P_i}{P^0}$ $P_i$ : pression partielle en bar ; $P^0 = 1 \text{ bar}$
Espèce chimique $A_i$ dans un mélange	solution aqueuse diluée	$a_i = \frac{C_i}{C^0}$ $C_i$ : concentration de $A_i$ ; $C^0 = 1 \text{ mol.L}^{-1}$
	gaz	$a_i = \frac{P_i}{P^0}$ $P_i$ : pression totale en bar ; $P^0 = 1 \text{ bar}$



Si l'on connaît l'avancement  $\xi_e$  lorsque l'état d'équilibre est atteint, il suffit d'exprimer les activités des réactifs et des produits en fonction de  $\xi_e$ . Par report dans la constante d'équilibre, on peut calculer la valeur de  $K^0$ .

### 3.3 Exemples

- $\text{PCl}_3(\text{g}) + \text{Cl}_2(\text{g}) = \text{PCl}_5(\text{g}) \quad K^0 = \frac{P_{\text{PCl}_5,eq} P^0}{P_{\text{PCl}_3,eq} P_{\text{Cl}_2,eq}}$
- $2\text{Hg}(\text{l}) + \text{O}_2(\text{g}) = 2\text{HgO}(\text{s}) \quad K^0 = \frac{P^0}{P_{\text{O}_2,eq}}$

## 4. Quotient réactionnel

• Lorsque qu'au niveau macroscopique, il y a évolution des quantités de matière des réactifs ou des produits, on associe à la réaction chimique une grandeur appelée quotient de réaction, notée  $Q_r$ .

- Avec la réaction chimique  $\nu_1 A_1 + \dots + \nu_N A_N \rightarrow \nu'_1 A'_1 + \dots + \nu'_N A'_N$ , on obtient :

$$Q_r = \frac{\prod_{\text{produit } j} (a_j)_{\text{hors eq}}^{\nu'_j}}{\prod_{\text{réactif } i} (a_i)_{\text{hors eq}}^{\nu_i}}$$

- La constante d'équilibre  $K^0$  et le quotient de réaction  $Q_r$  diffèrent.  $K^0$  s'exprime à partir des activités des espèces lorsque l'état d'équilibre est atteint,  $Q_r$  est relié aux activités hors équilibre.
- $K^0$  ne dépend que de la température alors que  $Q_r$  dépend de la température et de l'avancement chimique  $\xi$  :  $K^0(T) \neq Q_r(T, \xi)$ .

## 5. Évolution d'une transformation chimique

### 5.1 Sens d'une évolution

Lorsque une transformation chimique est en évolution, on définit au niveau de l'équation de réaction deux sens :

le sens direct (noté + 1) qui va des réactifs vers les produits,

et le sens indirect (noté -1) qui va des produits vers les réactifs.

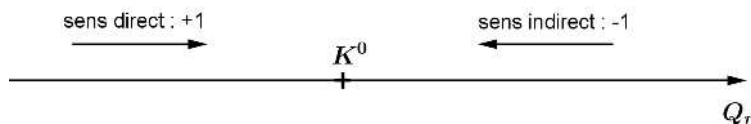
### 5.2 Critère d'évolution

La comparaison de la constante d'équilibre  $K^0$  et du quotient réactionnel  $Q_r$  permet de prédire l'évolution du système :

Si  $Q_r < K^0$  alors le système évolue dans le sens direct.

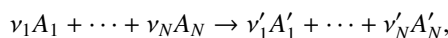
Si  $Q_r > K^0$  alors le système évolue dans le sens indirect.

Si  $Q_r = K^0$  alors le système n'évolue plus, il a atteint l'état d'équilibre.



## 6. Détermination de la composition du système dans l'état final

Soit la réaction chimique



de constante d'équilibre  $K^0$ , connue.

Pour connaître la composition du système dans l'état final, il faut :

- ❶ Dresser un bilan matière aux instants  $t = 0$  et  $t$ .
- ❷ Exprimer la constante d'équilibre en fonction des activités des espèces et de l'avancement à l'équilibre  $\xi_e$ .
- ❸ Résoudre l'équation et calculer  $\xi_e$ .

Plusieurs cas sont alors possibles :

- $\xi_e = \xi_{max}$  : on peut considérer que la transformation chimique est **totale**.
- $\xi_e < \xi_{max}$  : on peut considérer qu'on atteint l'état d'équilibre. La transformation chimique est dite **limitée**.
- $\xi_e > \xi_{max}$  : cela est impossible, on a consommé le réactif limitant. La transformation chimique est totale mais on n'a pas atteint l'état d'équilibre.

Si on ajoute suffisamment de réactif limitant, le système évolue jusqu'à pouvoir atteindre l'état d'équilibre.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1** : Le carbonate de calcium  $\text{CaCO}_3(\text{s})$  se décompose en oxyde de calcium(II)  $\text{CaO}(\text{s})$  et en dioxyde de carbone. L'équation de la réaction est :



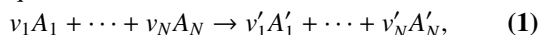
A  $T = 1100 \text{ K}$  constante, la constante d'équilibre vaut :  $K(1100 \text{ K}) = 1,17$ . Le volume du réacteur est constant et vaut  $V_0 = 10,0 \text{ L}$ .

1. Calculez la pression de  $\text{CO}_2(\text{g})$  à l'équilibre  $P(\text{CO}_2)_{\text{meq}}$  à  $T = 1100 \text{ K}$ . Déduisez-en la quantité de matière de dioxyde de carbone à l'équilibre.
2. Si on maintient la pression du dioxyde de carbone à  $1,0 \text{ bar}$ , comment évolue le système ?
3. Dans le réacteur on introduit  $n(\text{CaCO}_3) = 1,00 \times 10^{-1} \text{ mol}$ , déterminez la composition finale du système. Est-on à l'équilibre ?
4. Dans le réacteur on introduit  $n = 2,00 \times 10^{-1} \text{ mol}$ , déterminez la composition finale du système. Est-on à l'équilibre ?

### 3 Cinétique chimique

On considère un système fermé (sans apport ou retrait de matière) à volume  $V$  constant.

Soit la réaction chimique



## 1. Facteurs cinétiques

Un **facteur cinétique** est un paramètre permettant d'influencer la vitesse d'une transformation chimique. La température, la concentration des réactifs, la présence de catalyseurs, la lumière sont des exemples de facteurs cinétiques.

Généralement, une augmentation de température ou de concentration des réactifs accélèrent la vitesse de la réaction chimique.

## 2. Vitesse volumique globale d'une réaction chimique

### 2.1 Expression avec l'avancement volumique $x$

La vitesse volumique globale  $v$  (en  $\text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$ ) d'une réaction chimique se définit à partir de l'avancement chimique molaire  $\xi$  (en mol) ou de l'avancement volumique  $x = \frac{\xi}{V}$  (en  $\text{mol.L}^{-1}$ ) par :

$$v = \frac{1}{V} \cdot \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\frac{\xi}{V}}{dt} = \frac{dx}{dt}.$$

### 2.2 Expression avec les concentrations des réactifs ou produits

Du bilan matière en concentration :

$$\begin{array}{ccccccc} \nu_1 A_1 & + \dots + & \nu_N A_N & \rightarrow & \nu'_1 A'_1 & + \dots + & \nu'_N A'_N \\ t = 0 & c_1 & & c_N & c'_1 & & c'_N \\ t & c_1 - \nu_1 x & & c_N - \nu_N x & c'_1 + \nu'_1 x & & c'_N + \nu'_N x \end{array}$$

on déduit pour tout  $i$  :

$$\begin{aligned} \frac{d[A_i]}{dt} &= \frac{d(c_i - \nu_i x)}{dt} = -\nu_i \frac{dx}{dt} \implies v = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\nu_i} \cdot \frac{d[A_i]}{dt} \\ \frac{d[A'_i]}{dt} &= \frac{d(c'_i + \nu'_i x)}{dt} = \nu'_i \frac{dx}{dt} \implies v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\nu'_i} \cdot \frac{d[A'_i]}{dt} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$v = \frac{1}{\nu'_1} \cdot \frac{d[A'_1]}{dt} = \dots = \frac{1}{\nu'_N} \cdot \frac{d[A'_N]}{dt} = -\frac{1}{\nu_1} \cdot \frac{d[A_1]}{dt} = \dots = -\frac{1}{\nu_N} \cdot \frac{d[A_N]}{dt}$$

### 3. Vitesse de disparition et de formation

#### 3.1 Vitesse de formation d'un produit

$$v_f(A'_i) = \frac{d[A'_i]}{dt} \quad (\text{en mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}).$$

#### 3.2 Vitesse de disparition d'un réactif

$$v_d(A_i) = -\frac{d[A_i]}{dt} \quad (\text{en mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}).$$

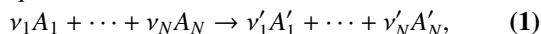
#### 3.3 Relation entre vitesse globale de la réaction chimique et vitesse de formation et disparition

$$v = \frac{v_f(A'_1)}{\nu'_1} = \dots = \frac{v_f(A'_N)}{\nu'_N} = \frac{v_d(A_1)}{\nu_1} = \dots = \frac{v_d(A_N)}{\nu'_N}$$

### 4. Ordre d'une réaction chimique

#### 4.1 Définition

Soit la réaction chimique



La réaction admet un ordre si la vitesse s'écrit sous forme d'un produit :

$$v = k \prod_{\text{réactif } i} [A_i]^{\alpha_i}$$

avec :  $\alpha_i$  = ordre partiel par rapport au réactif  $A_i$  (sans unité) ;

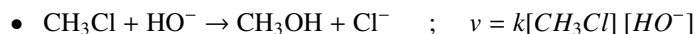
$\sum \alpha_i$  = ordre global de la réaction chimique (sans unité) ;

$k$  = constante de vitesse de la réaction (unité :  $(\text{mol.L}^{-1})^{1-\sum \alpha_i}.\text{s}^{-1}$ ).

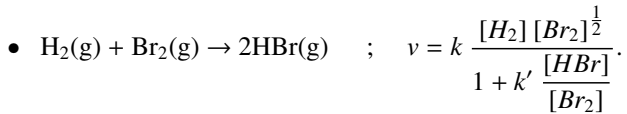
#### 4.2 Commentaires

- Généralement,  $\alpha_i$  n'a a priori aucun lien avec le nombre stœchiométrique  $\nu_i$ .
- Dans certains cas, les produits peuvent intervenir dans l'expression de la loi de vitesse.
- La constante de vitesse  $k$  a une unité qui varie suivant la valeur de l'ordre global de la réaction.

#### 4.3 Exemples



La réaction admet un ordre partiel par rapport à  $\text{CH}_3\text{Cl}$  de 1, un ordre partiel par rapport à  $\text{HO}^-$ , soit un ordre global de 2.



La réaction est sans ordre car  $v$  ne peut pas s'exprimer sous la forme d'un produit de concentrations de réactifs.

## 5. Détermination expérimentale de l'ordre d'une réaction chimique

Soit la réaction admettant un ordre :  $\text{A} + 2\text{B} \rightarrow \text{C}$  avec  $v = k[\text{A}]^\alpha \cdot [\text{B}]^\beta$ .

### 5.1 Expression de $v$ avec une seule variable de concentration

Il existe principalement deux méthodes.

- **Méthode de dégénérescence de l'ordre (méthode d'isolement d'Ostwald)**

- On place en large excès un des deux réactifs, par exemple B devant A.
- Au cours de la réaction :  $[\text{B}] \approx \text{const} \approx [\text{B}]_0$  ( $[\text{B}]_0$  : concentration initiale de B)
- $v = k[\text{A}]^\alpha \cdot [\text{B}]^\beta \approx k[\text{A}]^\alpha \cdot [\text{B}]_0^\beta$ .
- On définit une constante apparente,  $k_{app} = k[\text{B}]_0^\beta$ .
- Donc  $v = k_{app}[\text{A}]^\alpha$  n'est fonction que d'une **variable de concentration**.

- **Stœchiométrie des réactifs**

- On place B et A en proportion stœchiométrique :  $[\text{B}]_0 = 2[\text{A}]_0$  où  $[\text{B}]_0$  et  $[\text{A}]_0$  sont les concentrations initiales de B et A.
  - On a alors  $[\text{B}] = 2[\text{A}]$  à chaque instant.
  - On substitue dans l'expression de  $v$ ,  $[\text{B}]$  par  $[\text{A}]$  :
- $$v = 2^\beta \cdot k[\text{A}]^{\alpha+\beta} = k'[\text{A}]^{\alpha'} \quad (\text{avec } k' = 2^\beta k) \text{ n'est alors fonction que d'une variable de concentration.}$$

### 5.2 Relier la grandeur physique mesurée à la concentration $[\text{A}]$ de l'espèce

Pour déterminer les ordres de la réaction, il faut suivre en fonction du temps la concentration  $[\text{A}]$ . Différentes méthodes existent :

- **Méthode chimique** : en effectuant des prélèvements à des dates précises, puis en dosant A, on peut accéder directement à  $[\text{A}] = f(t)$ .
- **Méthode physique** : on mesure une grandeur physique au cours du temps (absorbance, conductivité, pression, ...). Il s'agit de relier cette grandeur physique à la concentration de l'espèce pour obtenir la courbe  $[\text{A}] = f(t)$ .

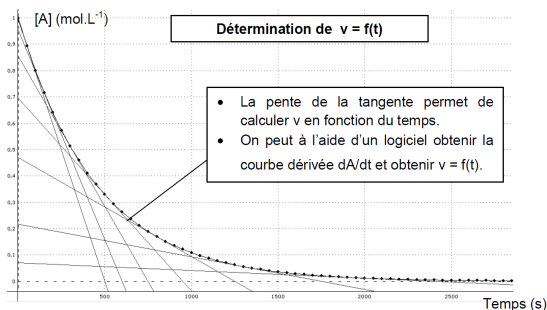
### 5.3 Obtention de l'ordre grâce à une méthode judicieusement choisie

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer  $\alpha$  si  $v = k[\text{A}]^\alpha$ .

- **Méthode différentielle**

- On détermine la vitesse de réaction à partir de  $[\text{A}] = f(t)$  :

$$v(t) = -\frac{1}{\nu_A} \cdot \frac{d[A]}{dt} = -\frac{\text{pente de la tangente à la courbe en } t}{\nu_A}.$$



– De  $v = k[A]^\alpha$  on déduit :  $\ln v = \ln k + \alpha \ln[A]$ , il suffit de tracer la droite  $\ln v = f(\ln[A])$ . La pente de la droite donne l'ordre  $\alpha$  et l'ordonnée à l'origine permet d'accéder à  $k$ .

### • Méthode intégrale

On suppose un ordre et on intègre l'expression analytique de  $[A]$ . Puis, on la confronte aux résultats expérimentaux. Distinguons 3 cas.

$$\underline{\alpha = 0}$$

Comme  $v = k[A]^0 = k = -\frac{1}{\nu_A} \cdot \frac{d[A]}{dt}$  soit  $d[A] = -k\nu_A dt$ ,

on tire :  $\int_{[A]_0}^{[A]_t} d[A] = - \int_{t=0}^t k\nu_A dt$  puis :  $[A]_t = [A]_0 - k\nu_A t$  (1).

Traçons à l'aide des valeurs expérimentales la courbe  $[A] = f(t)$ .

Si on obtient une droite, l'ordre 0 est confirmé, la pente permet de déterminer  $k$ . S'il ne s'agit pas d'une droite, l'ordre 0 est infirmé.

$$\underline{\alpha = 1}$$

Comme  $v = k[A] = -\frac{1}{\nu_A} \cdot \frac{d[A]}{dt}$  soit  $\frac{d[A]}{[A]} = -k\nu_A dt$ ,

on tire :  $\int_{[A]_0}^{[A]_t} \frac{d[A]}{[A]} = - \int_{t=0}^t k\nu_A dt$  puis :  $\ln[A]_t = \ln[A]_0 - k\nu_A t$  (2).

Traçons à l'aide des valeurs expérimentales la courbe  $\ln[A] = f(t)$ .

Si on obtient une droite, l'ordre 1 est confirmé, la pente permet de déterminer  $k$ . S'il ne s'agit pas d'une droite, l'ordre 1 est infirmé.

$$\underline{\alpha = 2}$$

Comme  $v = k[A]^2 = -\frac{1}{\nu_A} \cdot \frac{d[A]}{dt}$  soit  $\frac{d[A]}{[A]^2} = -k\nu_A dt$ ,

on tire :  $\int_{[A]_0}^{[A]_t} \frac{d[A]}{[A]^2} = - \int_{t=0}^t k\nu_A dt$  puis :  $\frac{1}{[A]_t} = \frac{1}{[A]_0} + k\nu_A t$  (3).

Traçons à l'aide des valeurs expérimentales la courbe  $\frac{1}{[A]} = f(t)$ .

Si on obtient une droite, l'ordre 2 est confirmé, la pente permet de déterminer  $k$ . S'il ne s'agit pas d'une droite, l'ordre 2 est infirmé.



### • Méthode des temps de demi-réaction

Le temps de demi-réaction est le temps, noté  $t_{1/2}$ , au bout duquel la moitié du réactif en défaut a disparu, soit  $[A]_{t_{1/2}} = \frac{1}{2}[A]_0$ .

À l'aide des expressions (1), (2), (3) obtenues par la méthode intégrale, on peut calculer les temps de demi-réaction :

	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre $\alpha \neq 1$
Expression de $t_{1/2}$ dans le cas général	$t_{1/2} = \frac{[A]_0}{2k\nu_A}$	$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k\nu_A}$	$t_{1/2} = \frac{1}{2k\nu_A[A]_0}$	$t_{1/2} = \frac{2^{\alpha-1} - 1}{2k\nu_A[A]_0^{\alpha-1}}$
Expression de $t_{1/2}$ si $\nu_A = 1$	$t_{1/2} = \frac{[A]_0}{2k}$	$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$	$t_{1/2} = \frac{1}{2k[A]_0}$	$t_{1/2} = \frac{2^{\alpha-1} - 1}{2k[A]_0^{\alpha-1}}$

Commentaires


$\alpha = 0$  :  $t_{1/2}$  augmente avec  $[A]_0$  ; si on double  $[A]_0$ , on double  $t_{1/2}$ .

$\alpha = 1$  :  $t_{1/2}$  est indépendant de  $[A]_0$ .

$\alpha = 2$  :  $t_{1/2}$  diminue avec  $[A]_0$  ; si on double  $[A]_0$ , on divise  $t_{1/2}$  par 2.

$\alpha \neq 1$  :  $t_{1/2}$  est inversement proportionnel à  $[A]_0^{\alpha-1}$ .

L'évolution de  $t_{1/2}$  avec la concentration initiale de A permet donc de déterminer  $\alpha$ .

 les désintégrations radioactives suivent des cinétiques d'ordre 1. On définit le temps de demi-vie de l'isotope comme le temps à partir duquel la moitié de l'isotope s'est désintégré.

## 6. Influence de la température

### 6.1 Loi d'Arrhénius

Les constantes de vitesse  $k$  des réactions chimiques sont des fonctions généralement croissantes de la température.

Une réaction suit la loi d'Arrhénius si sa constante de vitesse peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$$


avec  $k$  = constante de vitesse ;

$A$  : facteur préexponentiel (unité de  $k$ ) ;

$E_a$  : énergie d'activation ( $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) ;

$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  (constante des gaz parfaits) ;

$T$  : température en K.

 L'énergie d'activation est une grandeur constante propre à la réaction qui représente la barrière énergétique à franchir pour que la réaction ait lieu.

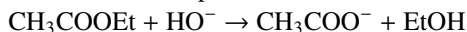
## 6.2 Détermination d'une énergie d'activation

D'après la loi d'Arrhénius :  $\ln k = \ln A - \frac{E_a}{RT}$ .

Pour déterminer l'énergie d'activation, il suffit d'obtenir  $k$  à différentes températures puis de tracer  $\ln k$  en fonction de  $\frac{1}{T}$ . La pente de la droite obtenue est  $-\frac{E_a}{R}$  ce qui permet de déterminer  $E_a$ .

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** On étudie la réaction de saponification suivante :



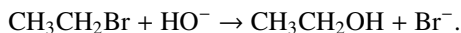
On se place dans les conditions stœchiométriques et on détermine la concentration au cours du temps des ions hydroxyde  $\text{HO}^-$ .

t(min)	0	15,5	46,4	108,2	231,8	479,1
[OH] mol.L <sup>-1</sup>	0,100	0,0500	0,0250	0,0125	0,00625	0,003125

Déterminez l'ordre global de la réaction.

Confirmez ce résultat par une méthode intégrale. Déduisez-en la constante de vitesse.

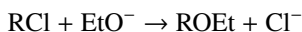
**Exercice 2 :** On s'intéresse à la réaction de substitution nucléophile suivante :



On a déterminé la constante de vitesse de cette réaction à différentes températures. En supposant que cette réaction vérifie la loi d'Arrhenius, déterminez l'énergie d'activation.

t en K	298	300	325	350
k en mol. <sup>-1</sup> .L <sup>-1</sup> .min <sup>-1</sup>	0,090	0,114	1,78	18,7

**Exercice 3 :** Soit l'équation de la réaction suivante :



Donnez les différentes définitions de la vitesse de la réaction en fonction des réactifs et des produits.

Si l'on connaît la courbe  $[\text{Cl}^-] = f(t)$ , comment déterminer la vitesse de la réaction ?

Sachant que les réactifs ont été placés en proportion stœchiométrique, déterminez l'ordre global de la réaction avec les données ci-dessous.

t(min)	0	0,1	0,5	1,0	2,0	5,0
[RCl] mol.L <sup>-1</sup>	0,1000	0,0841	0,0514	0,0346	0,0209	0,0096
Vitesse de la réaction $v$ mol.L <sup>-1</sup> .min <sup>-1</sup>	0,189	0,134	0,045	0,0226	0,0083	0,0017

# 4 Configuration électronique d'un atome

## 1. Modèle de l'atome

### 1.1 Constitution d'un atome

Un atome est constitué d'un noyau et d'électrons.

- **Constitution du noyau**

Le noyau est formé de deux types de particules : les protons et les neutrons. Ces particules sont appelées des nucléons.

Un proton porte une charge **électrique positive**,  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C.

Un neutron est une particule neutre.

Le noyau contient  $A$  **nucléons**, soit  $Z$  **protons** et  $A - Z$  **neutrons** où  $A$  correspond au nombre de masse et  $Z$  au numéro atomique.

Le noyau porte donc une charge  $+Ze$ .

On symbolise le noyau par  ${}^A_ZX$  où  $X$  est le symbole de l'atome considéré.

C'est le numéro atomique  $Z$  qui caractérise l'élément chimique.

- **Électrons**

Un électron porte une charge **électrique négative**,  $-e = -1,6 \times 10^{-19}$  C

Il y a  $Z$  électrons dans un atome.

### 1.2 L'atome, un ensemble électriquement neutre

L'atome possède autant d'électrons que de protons. L'atome est donc globalement neutre.

### 1.3 Une masse concentrée dans le noyau

Les protons et les neutrons ont des masses similaires mais largement supérieures à la masse d'un électron.

	neutron	proton	électron
masse (kg)	$1,67 \times 10^{-27}$	$1,67 \times 10^{-27}$	$9,11 \times 10^{-31}$

La masse de l'atome est donc concentrée dans le noyau.

### 1.4 Structure lacunaire de l'atome

La dimension du noyau est de  $10^{-15}$  m, celle de l'atome du dixième de nanomètre soit  $10^{-10}$  m.

L'espace entre le noyau et les électrons est essentiellement constitué de vide. On parle donc de structure lacunaire.

## 1.5 Isotopes

- Deux noyaux sont dits isotopes s'ils ont même numéro atomique  $Z$  (même élément chimique) mais un nombre de neutrons  $A - Z$  différents.

**Exemple :**  ${}^{12}_6\text{C}$  et  ${}^{13}_6\text{C}$ .

- La proportion des isotopes (exprimée en %) dans la nature est appelée abondance isotopique naturelle.

**Exemple :**  $\%({}^{12}_6\text{C}) = 98,9 \%$  et  $\%({}^{13}_6\text{C}) = 1,1 \%$ .

- Les **isotopes stables** sont pourvus d'un noyau de structure stable, qui ne subit aucune modification au cours du temps en l'absence d'apport d'énergie extérieure.

Au contraire, les isotopes radioactifs possèdent un noyau instable qui se transforme spontanément en un autre par émission d'un rayonnement ou d'une particule.

## 2. Définitions

- Une **entité chimique** est un atome, un ion ou un groupe d'atomes liés (molécules, ions, radicaux).

**Exemple :** entité chimique atomique : Fe ; entité chimique ionique :  $\text{Fe}^{2+}$  ; entité chimique moléculaire :  $\text{H}_2\text{O}$ .

- Une **espèce chimique** est un ensemble d'entités chimiques identiques.
- Un **corps simple** est un corps constitué d'un seul type d'atomes.

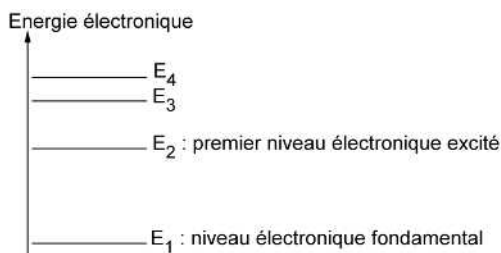
**Exemple :** Fe et  $\text{H}_2$  sont deux corps simples.  $\text{H}_2\text{O}$  n'est pas un corps simple car formé des atomes H et O.

## 3. Énergie électronique d'un atome

### 3.1 Quantification de l'énergie électronique

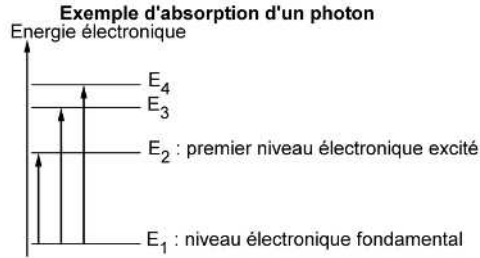
L'énergie électronique des atomes ne peut prendre que quelques valeurs particulières, on parle d'une **quantification** de l'énergie électronique.

On distingue donc différents niveaux d'énergie électronique accessibles.



### 3.2 Interaction matière-rayonnement

- Un atome peut **absorber** un photon et passer d'un niveau d'énergie électronique  $E_i$  à un niveau électronique  $E_j$  (avec  $E_i < E_j$ ).



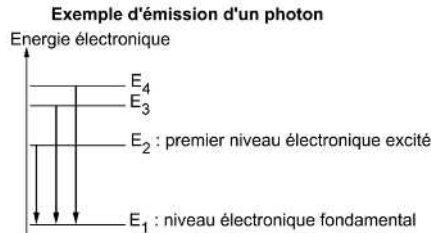
Lors d'une absorption correspondant à une transition des niveaux électroniques  $E_i$  à  $E_j$ , la fréquence  $\nu$  (ou la longueur d'onde  $\lambda$ ) du photon absorbé doit vérifier :

$$h\nu = h \frac{c}{\lambda} = E_j - E_i$$

où  $c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$  est la célérité de la lumière, et  $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$  est la constante de Planck.

Lors d'une transition électronique, l'onde lumineuse absorbée appartient au domaine du visible ou de l'ultra-violet.

- Un atome excité peut **émettre** un photon en se désexcitant et passer d'un niveau d'énergie électronique  $E_i$  à un niveau électronique  $E_j$  (avec  $E_i > E_j$ ).



Lors d'une émission correspondant à une transition des niveaux électroniques  $E_i$  à  $E_j$ , la fréquence  $\nu$  (ou la longueur d'onde  $\lambda$ ) du photon absorbé doit vérifier :

$$h\nu = h \frac{c}{\lambda} = E_i - E_j$$

## 4. Configuration électronique d'un atome

### 4.1 Nombres quantiques

La description de la matière nécessite un modèle de mécanique quantique. Dans ce modèle, l'état d'un électron ou d'un atome est décrit par 4 nombres, nommés nombres quantiques et notés  $n, l, m_l$  et  $m_s$  :

- Le nombre quantique principal  $n$  est un nombre entier positif non nul ;
- Le nombre quantique secondaire  $l$  est un entier positif ou nul inférieur strictement à  $n$  ;
- Le nombre quantique magnétique  $m_l$  est un entier relatif compris entre  $-l$  et  $+l$  ;
- Le nombre quantique magnétique de spin  $m_s$  peut prendre uniquement deux valeurs :  $+\frac{1}{2}$

ou  $-\frac{1}{2}$ .

## 4.2 Orbitales atomiques

Établir la configuration électronique d'un atome à l'état fondamental, c'est donner la répartition des électrons de l'atome dans des sous-couches électroniques appelées orbitales atomiques.

- Une orbitale atomique est caractérisée par les trois nombres quantiques ( $n, l, m_l$ ).
- À la grandeur  $l$ , on associe un type d'orbitales atomiques :

Valeur de $l$	0	1	2	3
Type de l'OA	<i>s</i>	<i>p</i>	<i>d</i>	<i>f</i>

- Comment déterminer une orbitale atomique à partir des nombres quantiques ( $n, l, m_l$ ) ?

Valeurs de $n$	Valeurs de $l$	Valeurs de $m_l$	Nombres d'orbitales atomiques (OA) dans la sous-couche électronique	Nom de l'orbitale atomique
$n = 1$	$l = 0$	$m_l = 0$	1 OA (1 valeur de $m_l$ )	1s
$n = 2$	$l = 0$	$m_l = 0$	1 OA (1 valeur de $m_l$ )	2s
	$l = 1$	$m_l = -1$ ou 0 ou 1	3 OA (3 valeurs de $m_l$ )	$2p_x, 2p_y, 2p_z$
$n = 3$	$l = 0$	$m_l = 0$	1 OA (1 valeur de $m_l$ )	3s
	$l = 1$	$m_l = -1$ ou 0 ou 1	3 OA (3 valeurs de $m_l$ )	$3p_x, 3p_y, 3p_z$
	$l = 2$	$m_l = -2; -1$ $m_l = 0; 1; 2$	5 OA (5 valeurs de $m_l$ )	$3dz^2, 3d(x^2 - y^2)$ $3dxy, 3dxy, 3dyz$

## 4.3 Configuration électronique à l'état fondamental d'un atome

Pour établir la configuration électronique à l'état fondamental, un principe et une règle doivent être respectés.

### • Principe de Pauli

*Dans un atome, deux électrons ne peuvent avoir le même nombre de quadruplet de nombres quantiques ( $n, l, m_l, m_s$ ).*

Soit des électrons appartenant à une même OA, ils ont donc les mêmes nombres quantiques  $n, l, m_l$ . Les électrons d'une même OA ne se différencient que par le nombre quantique  $m_s$ , qui ne peut prendre que 2 valeurs ( $+\frac{1}{2}$  ou  $-\frac{1}{2}$ ).

*Une orbitale atomique peut donc contenir au maximum deux électrons de nombres de spin  $m_s$  opposés.*

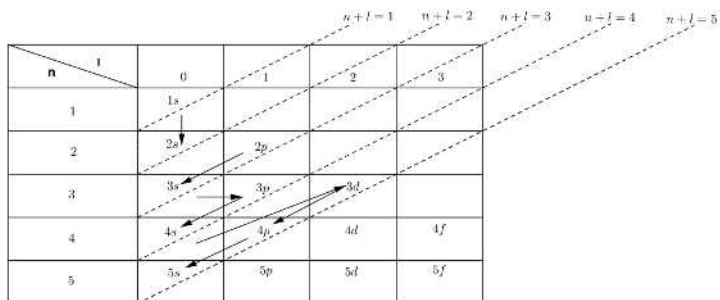
### • Règle de Klechkowski

L'état fondamental correspond à l'énergie électronique minimale. La règle de Klechkowski permet d'obtenir l'ordre de remplissage des électrons dans les orbitales ato-

miques. C'est une règle empirique.

*On classe les orbitales atomiques par ordre de  $n + l$  croissant. Si deux OA ont la même valeur de  $n + l$ , on commence par remplir l'OA de  $n$  le plus faible.*

La règle de Klechkowski peut se résumer par le schéma mnémotechnique :



$$(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^2(3d)^4.$$

La configuration électronique réelle est :

$$(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^1(3d)^5.$$

Cette exception peut s'expliquer par la stabilisation particulière des sous-couches électroniques totalement ou demi-remplies.

## 5. Configuration électronique à l'état fondamental d'un ion

### 5.1 Cas des cations

Pour obtenir la configuration électronique à l'état fondamental d'un cation, on retire à l'atome le nombre d'électrons adéquats. Les électrons sont retirés aux sous-couches électroniques de nombre quantique principal  $n$  le plus élevé.

**Exemple :**  $\text{Fe}^{2+}$  ; la configuration électronique à l'état fondamental de  $\text{Fe}^{2+}$  est :

$$(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(3d)^6.$$

### 5.2 Cas des anions

Pour obtenir la configuration électronique à l'état fondamental d'un anion, on ajoute à l'atome le nombre d'électrons adéquats. Pour déterminer la configuration à l'état fondamental, on respecte la règle de Klechkowski. Ex :  $_{17}\text{Cl}^-$ .

La configuration du chlore à l'état fondamental est :  $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^5$ .

La configuration des ions  $\text{Cl}^-$  à l'état fondamental est :  $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6$ .

### 5.3 Prédiction de la formule des ions

Pour se stabiliser, un atome a tendance à gagner (en formant un anion) ou à perdre (en formant un cation) des électrons pour saturer ou vider une sous-couche électronique.

**Exemples :**

- Le soufre  $_{16}\text{S}$ , de configuration électronique  $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^4$  va facilement gagner deux électrons pour former l'ion  $\text{S}^{2-}$  de configuration  $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6$ .
- Le sodium  $_{11}\text{Na}$ , de configuration électronique  $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^1$  va perdre un électron pour former l'ion  $\text{Na}^+$  de configuration  $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^0$ .

## 6. Électrons de valence, électrons de cœur

Les électrons de valence sont ceux responsables de la réactivité des atomes.

Les électrons de valence sont les électrons qui occupent les OA de nombre quantique le plus élevé et les OA en cours de remplissage.

Les autres électrons sont les électrons de cœur.

**Exemples :**

$_{17}\text{Cl}$  :  $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^5$  ; les électrons  $3s$ ,  $3p$  sont les électrons de valence, les autres sont les électrons de cœur.



${}_{17}\text{Fe} : (1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^2(3d)^6$  ; les électrons  $4s, 3d$  (en cours de remplissage) sont les électrons de valence, les autres sont les électrons de cœur.

${}_{32}\text{S}^{2-} : (1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6$  ; les électrons  $3s, 3p$  sont les électrons de valence de l'ion, les autres sont les électrons de cœur.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 : 1.** Le manganèse admet à l'état fondamental la configuration électronique suivante :  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^5$ .

Précisez les électrons de cœur et les électrons de valence.

2. Donnez les valeurs des nombres quantiques  $n, l$  associées aux orbitales atomiques  $3d, 4s$  et  $2p$ .

3. Écrivez, si elle existe, le nom de l'orbitale atomique associée aux nombres quantiques suivants :  $(n = 3, l = 2)$  ;  $(n = 4, l = 4)$  ;  $(n = 2, l = 0)$

**Exercice 2 :** Donnez la configuration électronique à l'état fondamental des atomes ou ions suivants. Soulignez les électrons de valence.

• Atomes :  ${}_{17}\text{Cl}$  ;  ${}_{26}\text{Fe}$  ;  ${}_{19}\text{K}$

• Ions :  $\text{K}^+$  ;  $\text{Cl}^-$  ;  $\text{Fe}^{3+}$ .

**Exercice 3 :** Quels ions sont susceptibles de se former à partir des atomes suivants :

${}_{12}\text{Mg}$  ;  ${}_{17}\text{Cl}$  ?


# 5 Classification périodique des éléments

## 1. Présentation de la classification périodique

La classification périodique se présente sous la forme d'un tableau de 7 lignes, appelées périodes et de 18 colonnes. Le tableau est situé sur la page suivante.

Les éléments sont classés par ordre croissant de numéro atomique  $Z$ . Chaque case du tableau correspond à un élément.

Voir tableau page suivante.

 Pour les périodes 2 et 3, des phrases mnémotechniques permettent de retrouver les éléments : **Liliane Becha Bien Chez Notre Oncle Ferdinand Nestor et Napoléon Mangea Allègrement Six Poulets Sans Claquer d'Argent**.

## 2. Relation entre la classification périodique et la configuration électronique

### 2.1 Commentaires

- La structure de la classification est liée à la configuration électronique des éléments.
- Les 7 périodes suivent le remplissage des couches électroniques de  $n = 1$  à 7.
- La période commence toujours par le remplissage de la sous-couche  $ns$  et se termine par une sous-couche  $1s$  dans la première période ou une sous-couche  $np$  pour  $n > 1$ .

### 2.2 Étude des périodes

- La première période correspond au remplissage de la couche  $1s$ , soient deux éléments : H de configuration  $(1s)^1$  et He de configuration  $(1s)^2$ .
- La seconde période correspond au remplissage des sous-couches  $2s, 2p$  qui peuvent contenir 8 électrons donc 8 éléments.
- La troisième période correspond au remplissage des sous-couches  $3s, 3p$ . Le remplissage des  $3d$  n'appartient pas à la troisième période car les OA  $3d$  se remplissent après les OA  $4s$ . Il y a donc encore 8 éléments dans la troisième période.
- La quatrième période correspond au remplissage des sous-couches  $4s, 3d$  et  $4p$ . Il y a donc :  $2 + 10 + 6 = 18$  éléments.
- La cinquième période correspondra au remplissage des sous-couches  $5s, 4d$  et  $5p$ , la sixième aux sous-couches  $6s, 4f, 5d$  et  $6p$  (le remplissage de la couche  $4f$  est isolé du tableau), la septième aux sous-couches  $7s, 5f, 6d$  et  $7p$  (le remplissage de la couche  $5f$  est isolé du tableau) (voir tableau plus loin).

# La Classification périodique

18 colonnes																	
période	Numéro atomique →																
	→ masse atomique																
	Nom																
	Symbole																
I	1 H 1,0																2 He 4,0
II	3 Hydrogène 1,0	4 Be 9,0															5 B 10,8
III	11 Lithium 6,94	12 Béryllium 9,0	13 Bore 10,8	14 Carbone 12,0	15 Azote 14,0	16 Oxygène 16,0	17 Fluor 19,0	18 Néon 20,2									
IV	19 Sodium 23,0	20 Magnésium 24,3	21 Scandium 44,9	22 Titane 47,9	23 Vanadium 50,9	24 Chrome 52,0	25 Manganèse 54,9	26 Fer 55,8	27 Cobalt 58,9	28 Nickel 58,7	29 Cuivre 63,5	30 Zinc 65,4	31 Gallium 69,7	32 Germanium 72,6	33 Arsenic 74,9	34 Sélénium 79,0	35 Brome 79,9
V	37 Potassium 39,1	38 Calcium 40,1	39 Scandium 44,9	40 Titane 47,9	41 Vanadium 50,9	42 Chrome 52,0	43 Manganèse 54,9	44 Fer 55,8	45 Cobalt 58,9	46 Nickel 58,7	47 Cuivre 63,5	48 Zinc 65,4	49 Gallium 69,7	50 Germanium 72,6	51 Arsenic 74,9	52 Sélénium 79,0	53 Brome 79,9
VI	55 Césium 132,9	56 Baryum 137,3	57 Lanthane 138,9	58 Cérium 140,1	59 Praseodyme 140,9	60 Néodyme 144,2	61 Prométhée 144,9	62 Europium 151,9	63 Gadolinium 157,3	64 Terbium 158,9	65 Dysprosium 162,5	66 Holmium 164,9	67 Erbium 167,3	68 Thulium 168,9	69 Ytterbium 173,0	70 Lutétium 175,0	71 Hafnium 178,5
VII	87 Francium 223,0	88 Radium 226,0	89 Actinium 227,0	90 Thorium 232,0	91 Protactinium 231,0	92 Uranium 238,0	93 Neptunium 237,0	94 Plutonium 244,0	95 Américium 243,0	96 Curium 247,0	97 Berkélium 247,0	98 Californium 251,0	99 Einsteinium 252,0	100 Fermium 257,0	101 Mendelevium 258,0	102 Nobelium 259,0	103 Lawrencium 262,0







- Si la configuration électronique se termine par  $((n-1)d)^q$ , alors l'élément appartient à la colonne  $q + 2$ .
  - Si la configuration électronique se termine par  $(np)^q$ , alors l'élément appartient à la colonne  $q + 12$ .
- Ces règles excluent les exceptions à la règle de Klechkowski.

### Exemple

Le palladium a pour configuration électronique  $[\text{Kr}](5s)^2(4d)^8$ .

La période de l'élément correspond au nombre quantique principal le plus élevé soit la 5<sup>e</sup> période.

Le palladium appartient au bloc  $d$  donc il appartient à la  $2 + 8 = 10^{\text{e}}$  colonne.

## 5. Électronégativité

### 5.1 Définition

L'électronégativité caractérise l'aptitude d'un atome à attirer le doublet d'électrons d'une liaison.

### 5.2 Différentes échelles

L'électronégativité est une grandeur dérivée en ce sens qu'elle n'est pas mesurable directement. Cette grandeur est sans dimension. Plusieurs échelles numériques d'électronégativité ont été proposées (échelles de Pauling, Mulliken et d'Allred et Rochow).

*Échelle d'électronégativité de Pauling de quelques éléments de la classification périodique*

1	2	13	14	15	16	17
H 2,2						
Li 1,0	Be 1,6	B 2,0	C 2,6	N 3,0	O 3,4	F 4,0
Na 0,9	Mg 1,3	Al 1,6	Si 1,9	P 2,2	S 2,6	Cl 3,2

On ne s'intéressera pas à l'électronégativité des gaz rares (colonne 18) qui sont des éléments restant monoatomiques et ne formant pas de liaison.

### 5.3 Évolution de l'électronégativité

- Dans une période, l'électronégativité augmente de la gauche vers la droite.
- Dans une colonne, l'électronégativité augmente de bas en haut.

### 5.4 Relation entre l'électronégativité et le pouvoir oxydant ou réducteur

- Les éléments ayant une forte électronégativité ont une aptitude à gagner des électrons, il s'agit donc d'éléments oxydants.

- Les éléments ayant une faible électronégativité ont tendance à céder des électrons, il s'agit donc d'éléments réducteurs.

### Exemple

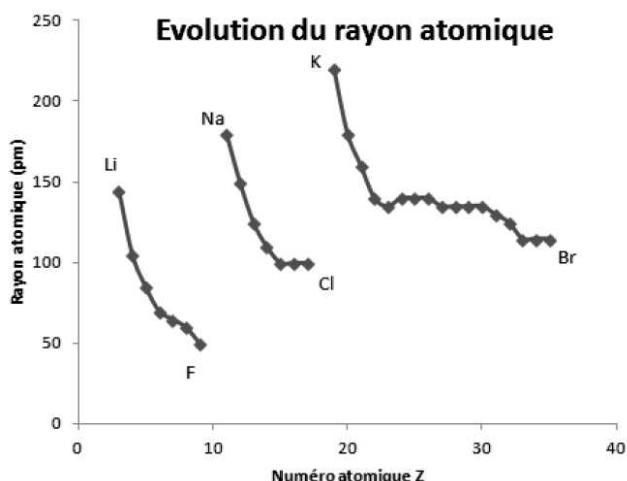
Les métaux faiblement électronégatifs sont des réducteurs, les halogènes fortement électronégatifs sont des oxydants.

## 6. Rayon atomique

### 6.1 Définition

Le rayon atomique représente la distance la plus probable entre le noyau de l'élément et les électrons les plus externes (électrons de valence).

### 6.2 Évolution du rayon atomique dans la classification périodique



- Dans une période, le rayon atomique diminue avec  $Z$  (de la gauche vers la droite).
- Dans une colonne, le rayon atomique augmente avec  $Z$ .

### 6.3 Notion de charge effective

- Dans un modèle simplifié de l'atome, on peut négliger les interactions entre électrons et considérer que l'électron ne subit que l'influence du noyau. Cependant, les électrons se comportent alors comme un écran entre l'électron considéré et le noyau si bien que la charge ressentie par l'électron vis-à-vis du noyau n'est plus  $Z.e$  mais  $Z^*.e$  où  $Z^*$  est appelée charge effective. On a :  $Z^* < Z$ .
- Quand on se déplace dans une période, la charge du noyau augmente de 1. L'écrantage augmente aussi mais plus faiblement. L'électron le plus externe ressent donc une charge effective plus grande. Il est donc plus attiré par le noyau et s'en rapproche. Le rayon atomique diminue.
- Quand on descend dans une colonne, l'électron externe appartient à une sous-couche électronique de  $n$  plus élevé. L'électron se trouve donc à plus grande distance du noyau d'où l'augmentation du rayon atomique.



**Sauriez-vous répondre ?**

**Exercice 1 :** On donne les configurations des éléments suivants. Précisez les électrons de valence. Pour chaque configuration, donnez les numéros de la période et de la colonne de l'élément.

- $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^2(3d)^7$  ;
- $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^4$  ;
- $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^2(3d)^{10}(4p)^6(5s)^1$ .

**Exercice 2 :** Donnez la configuration électronique des atomes se trouvant dans la classification périodique aux positions ci-dessous. Précisez le nombre d'électrons de valence.

- 5<sup>e</sup> période et 12<sup>e</sup> colonne ;
- 3<sup>e</sup> période et 2<sup>e</sup> colonne ;
- 4<sup>e</sup> période et 16<sup>e</sup> colonne.

**Exercice 3 :** Comparez l'électronégativité (notée  $\chi$ ) et les rayons atomiques (noté R) des séries d'éléments ci-dessous :

- Fluor, chlore, brome, iode.
- Sodium, magnésium, aluminium, silicium.

# 6 Comment décrire les entités chimiques moléculaires ?

## 1. Schéma de Lewis

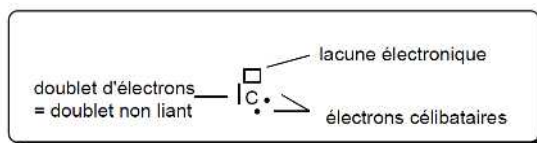
### 1.1 Schéma de Lewis d'un atome

- Seuls les électrons de valence d'un atome interviennent dans sa réactivité, aussi le schéma de Lewis décrit le symbole de l'atome avec ses électrons de valence.
- Pour obtenir le schéma de Lewis d'un atome, il faut déterminer la configuration électronique de valence, puis à l'aide de la règle de Hund, il s'agit d'identifier le nombre d'électrons célibataires, de doublets d'électrons et d'orbitales de valence non occupées (lacunes électroniques).
- Dans le schéma de Lewis d'un atome, on dessine :
  - le symbole de l'atome
  - les électrons célibataires représentés par •
  - les doublets d'électrons représentés par |
  - les lacunes électroniques représentés par □

Ex : C :  $(1s)^2(2s)^2(2p)^2$  avec

$\uparrow\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
2s	2p <sub>x</sub>	2p <sub>y</sub>	2p <sub>z</sub>

Le carbone possède : 1 doublet d'électrons, 2 électrons célibataires et une lacune électronique.



### 1.2 Pourquoi un atome a-t-il tendance à faire des liaisons covalentes ?

- Pour gagner en stabilité, un atome a tendance à vouloir saturer ses orbitales de valence. Il peut donc mettre en commun des électrons avec d'autres atomes et former une liaison covalente.

*Une liaison covalente associe donc deux atomes et consiste en la mise en commun de deux électrons par ces atomes. La liaison covalente correspond à un doublet d'électrons.*

- **Exemple :** Le carbone possède 4 électrons de valence. Pour saturer ses orbitales de valence, il doit encore acquérir 4 électrons. Il réalise alors 4 liaisons covalentes. Bien que les

4 doublets de liaison soient partagés, l'atome de C a capté les électrons des atomes avec lesquels il est lié ; il peut ainsi saturer ses orbitales de valence.

### 1.3 Règle de l'octet

*Lors de la formation de liaisons covalentes, chaque atome tente d'acquérir une couche électronique  $(ns)^2(np)^6$  c'est-à-dire à s'entourer de 8 électrons. Seul l'hydrogène se limite à un doublet d'électrons.*

Il existe des limites à cette règle :

- Les composés déficitaires en électrons (par exemple le bore n'a que trois électrons de valence, s'il les partage, il ne pourra s'entourer que de 6 électrons).
- Les composés hypervalents : à partir de la troisième période, les orbitales  $d$  existent. Les atomes peuvent alors engager des liaisons de façon à saturer les couches [gaz rare]  $(ns)^2(n-1)d^{10}(np)^6$  c'est-à-dire à s'entourer de 18 électrons.
- Les atomes de la deuxième période ne pourront jamais dépasser l'octet contrairement aux atomes des 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, ... périodes.

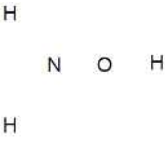
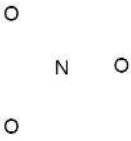
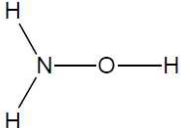
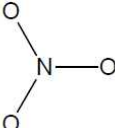
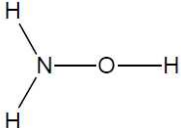
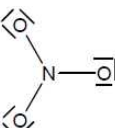
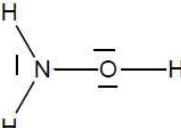
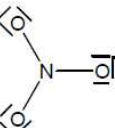
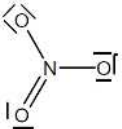
### 1.4 Schéma de Lewis d'une molécule ou d'un ion polyatomique

Il convient de déterminer :

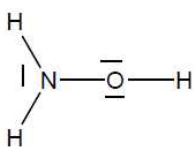
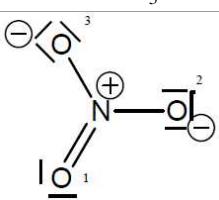
- la disposition des atomes et la répartition des électrons,
- la charge formelle sur les atomes du schéma de Lewis.


#### *Disposition des atomes et répartition des électrons*

	molécule $\text{NH}_2\text{OH}$	ion $\text{NO}_3^-$
<p>❶ <i>Décompte des électrons de valence :</i></p> <p>Pour chaque atome, on décompte le nombre d'électrons de valence <math>N_v</math>.</p> <p>On décompte ensuite le nombre d'électrons de valence globale <math>N_e</math> comme <math>N_e = \sum N_v</math>.</p> <p>Dans le cas d'un ion polyatomique de charge <math>ze</math> (<math>Z &gt; 0</math> pour un cation, <math>Z &lt; 0</math> pour un anion), le nombre <math>N_e</math> se calcule comme : <math>N_e = \sum N_v - Z</math>.</p> <p>On calcule le nombre <math>ND</math> de doublet d'électrons : <math>ND = \frac{N_e}{2}</math>. Si <math>ND</math> n'est pas entier, il y aura un électron célibataire.</p>	<p>On a :</p> <p><math>N_v(\text{N}) = 5</math> ;</p> <p><math>N_v(\text{O}) = 6</math> ;</p> <p><math>N_v(\text{H}) = 1</math> ;</p> <p><math>Z = -1</math></p> <p>donc <math>N_e = 14</math></p> <p>et <math>ND = 7</math>.</p>	<p>On a :</p> <p><math>N_v(\text{N}) = 5</math> ;</p> <p><math>N_v(\text{O}) = 6</math> ;</p> <p>donc</p> <p><math>N_e = 23 + 1 = 24</math></p> <p>et <math>ND = 12</math>.</p>

<p>❷ Disposer les symboles des atomes. Les atomes terminaux entourent les atomes centraux.</p> <p>Pour placer les atomes, il faut suivre les consignes ou respecter les propriétés chimiques des atomes (les atomes électro-négatifs sont souvent des atomes terminaux). L'atome d'hydrogène est un atome terminal.</p>		
<p>❸ Relier par des liaisons simples les atomes (centraux et terminaux). Comptabiliser le nombre de doublets d'électrons qu'il manque à la structure.</p>	 <p>Il reste à placer 3 doublets d'électrons.</p>	 <p>Il reste à placer 9 doublets d'électrons.</p>
<p>❹ Placer des doublets d'électrons en tant que doublets non liants sur les atomes terminaux de façon à respecter la règle de l'octet. Comptabiliser le nombre de doublets d'électrons qu'il manque à la structure.</p>	 <p>Il reste à placer 3 doublets d'électrons</p>	 <p>Plus de doublet d'électrons à placer.</p>
<p>❺ Placer le reste des doublets d'électrons sur les atomes centraux.</p>		
<p>❻ Compter le nombre d'électrons qui entourent chaque atome central :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Si ce nombre d'électrons est égal à 8, conserver la structure. Si ce nombre d'électrons est inférieur à 8, transformer un (voire plusieurs) doublet(s) non liant(s) des atomes terminaux en liaison(s) multiple(s) avec le(s) atome(s) central(aux).</li> <li>– Si l'atome présente un déficit de 2 électrons, placer une lacune électronique sur l'atome.</li> <li>– Si ce nombre d'électrons est supérieur à 8, la structure sera valable si l'atome est hypervalent (atomes n'appartenant pas à la 1<sup>ère</sup> ou 2<sup>e</sup> ligne de la classification périodique).</li> </ul>	<p>N : 8 électrons ; O : 8 électrons</p>	<p>N : 6 électrons <math>\Rightarrow</math></p> 

**Charges formelles**

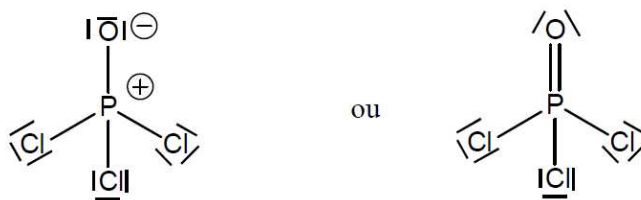
	molécule $\text{NH}_2\text{OH}$	ion $\text{NO}_3^+$
<p>Dans le schéma de Lewis, un atome peut présenter des charges formelles.</p> <p>Pour obtenir la charge formelle d'un atome, il suffit de comparer :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>le nombre d'électrons de valence que l'atome possède en propre <math>N_{v,p}</math> (ses doublets non liants et un électron par liaison covalente) dans le schéma de Lewis ;</li> <li>le nombre d'électrons de valence <math>N_v</math> lorsque l'atome est neutre.</li> </ul> <p>Charge de l'atome : <math>N_v - N_{v,p}</math>.</p>	 <p> <math>N_v(\text{N}) = 5</math>  et <math>N_{v,p}(\text{N}) = 5</math>  <math>N_v(\text{O}) = 6</math>  et <math>N_{v,p}(\text{O}) = 6</math>  <math>N_v(\text{H}) = 1</math>  et <math>N_{v,p}(\text{H}) = 1</math>  donc pas de charges formelles. </p>	 <p> <math>N_v(\text{N}) = 5</math>  et <math>N_{v,p}(\text{N}) = 4</math>  donc charge + sur N.  <math>N_v(\text{O}^1) = N_v(\text{O}^2) = N_v(\text{O}^3) = 6</math>  et <math>N_{v,p}(\text{O}^2) = N_{v,p}(\text{O}^3) = 7</math>  <math>N_{v,p}(\text{O}^2) = 6</math>  donc charge - sur <math>\text{O}^2</math> et <math>\text{O}^3</math>. </p>

 La somme des charges formelles est égale à la charge globale de l'entité chimique.

**Atomes hypervalents**

Les atomes n'appartenant pas aux première et deuxième périodes peuvent être hypervalents. Si un atome hypervalent central présente une charge formelle positive, on peut envisager de substituer un doublet non liant d'un atome terminal par une liaison multiple avec l'atome hypervalent.

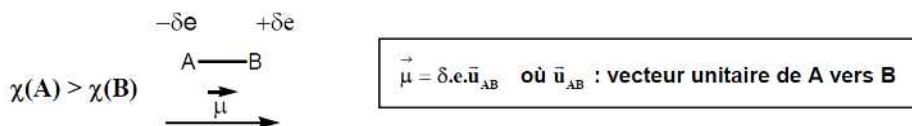
Exemple

**2. Polarité des molécules****2.1 Liaisons polarisées**

Dans une liaison covalente, si deux atomes présentent une différence d'électronégativité, alors la liaison est polarisée. La liaison est caractérisée par un moment dipolaire, noté  $\vec{\mu}$ .

**2.2 Moment dipolaire d'une molécule**

Le moment dipolaire d'une molécule est la somme des moments dipolaires de toutes les liaisons covalentes de la molécule :




$$\vec{\mu} = \sum_i \vec{\mu}_i \quad \text{où } \vec{\mu}_i \text{ est le moment dipolaire d'une liaison.}$$

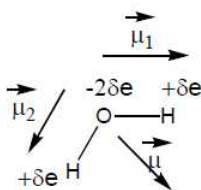
## 2.3 Molécule polaire, molécule apolaire

Une molécule est **polaire** si le moment dipolaire de la molécule est non nul.

Une molécule est **apolaire** si le moment dipolaire de la molécule est nul.

 Pour calculer le moment dipolaire de la molécule, il faut tenir compte de la géométrie.

L'eau présente un moment dipolaire, c'est une molécule polaire.



## Sauriez-vous répondre ?

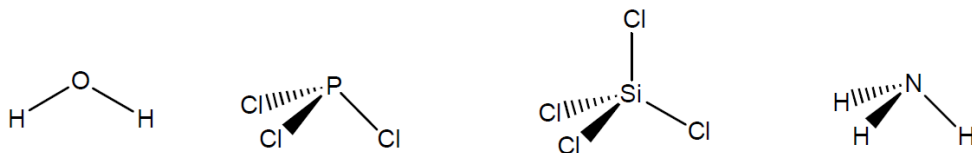
**Exercice 1 :** Donnez les schémas de Lewis des atomes et édifices polyatomiques ci-dessous. Pour les édifices polyatomiques, précisez la géométrie de l'atome central (les atomes en gras sont des atomes centraux).

1.  ${}_6\text{C}$  ;  ${}_1\text{H}$  ;  ${}_{17}\text{Cl}$ .

2.  $\text{PCl}_3$ ,  $\text{PCl}_3$ ,  $\text{NCl}_3$ ,  $\text{NH}_4^+$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{NO}_3^-$ ,  $\text{NO}_2^+$ ,  $\text{NO}_2^-$ ,  $\text{CO}_3^{2-}$ ,  $\text{AlCl}_3$ ,  $\text{SO}_4^{2-}$ .

Les atomes en gras sont des atomes centraux.

**Exercice 2 :** Les molécules suivantes présentent les géométries ci-dessous. Indiquez si les espèces chimiques sont polaires.



# 7 Les interactions intermoléculaires et les solvants moléculaires

- La liaison covalente qui unit les atomes dans une molécule met en jeu des énergies de l'ordre de plusieurs centaines de  $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$  : c'est une liaison forte.
- La cohésion des liquides et des solides moléculaires s'explique par des interactions intermoléculaires à courte portée à faibles énergies (10 à 100 fois plus faibles que celles des liaisons covalentes). Il existe deux catégories d'interactions intermoléculaires :
  - les **interactions de van der Waals** présentes dans toutes les molécules (énergie de l'ordre de quelques  $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ ),
  - les **liaisons hydrogène** (énergie de l'ordre de quelques dizaines de  $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ ).

## 1. Les interactions de van der Waals

### 1.1 Des interactions d'origine électrostatique

- Un dipôle est constitué de deux particules de charges opposées, et séparées par une « faible » distance. Il est caractérisé par un vecteur moment dipolaire. Deux dipôles exercent l'un sur l'autre une interaction attractive.
- Les interactions de van der Waals existent pour tous les composés. Elles sont d'origine électrostatique et mettent en jeu des forces électrostatiques attractives entre dipôles.
- Les interactions de Van der Waals ne se manifestent qu'à courte distance (inférieure à 300 pm). L'énergie mise en jeu est de l'ordre de quelques  $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

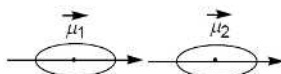
### 1.2 Trois interactions de van der Waals

Trois types d'interaction de Van der Waals existent :

- Interaction dipôle permanent/dipôle permanent (interaction de Keesom).
- Interaction dipôle permanent/dipôle induit (interaction de Debye).
- Interaction dipôle instantané/ dipôle instantané (interaction de London).

### 1.3 Les interactions de type Keesom


- L'interaction de Keesom résulte de l'interaction entre les dipôles permanents des molécules polaires (ex : HBr). Cette interaction tend à aligner les dipôles de deux molécules 1 et 2, et s'oppose à l'agitation thermique, qui tend à réorienter les dipôles dans des directions aléatoires.



Pour un liquide moléculaire, l'énergie de l'interaction attractive est de la forme :

$$U = -k_{\text{Keesom}} \frac{\|\vec{\mu}_1\| \cdot \|\vec{\mu}_2\|}{d^6}$$

avec  $k_{\text{Keesom}}$  : constante de Keesom et  $d$  : distance séparant les deux dipôles.

 Plus les molécules sont polaires ( $\|\vec{\mu}\|$  élevé), plus les molécules sont liées entre elles. Plus les molécules sont éloignées, plus l'interaction est faible.

La force d'attraction intermoléculaire, dite force de van der Waals, qui dérive de cette énergie est en  $\frac{1}{d^7}$ .

## 1.4 Les interactions de type Debye

La polarisabilité est l'aptitude d'un nuage électronique à se déformer sous l'action d'un champ électrique extérieur (créé par exemple par une molécule polaire). Un dipôle induit se crée (cf. schéma pour la molécule  $I_2$  apolaire mais polarisable).




L'interaction entre le moment dipolaire permanent d'une molécule polaire  $M_1$  et le dipôle qu'elle peut induire dans une molécule  $M_2$  est l'interaction de Debye.

Pour un liquide moléculaire, l'énergie de l'interaction attractive est de la forme :

$$U = -k_{\text{Debye}} \frac{\|\vec{\mu}_1\| \cdot \|\vec{\mu}_{2,\text{ind}}\|}{d^6}$$

avec  $k_{\text{Debye}}$  : constante de Debye.


 Plus une liaison est polarisable, plus le moment dipolaire induit est élevé et les molécules sont liées entre elles. Plus les atomes sont volumineux, plus la polarisabilité des liaisons augmente.

## 1.5 Les interactions de type London

- Cette interaction explique les interactions entre molécules apolaires.
- En moyenne, le moment dipolaire de ces molécules est nul. À un instant donné, la distribution des électrons n'est pas symétrique et la molécule présente un moment dipolaire instantané non nul.
- L'interaction entre ces moments dipolaires instantanés se traduit par une interaction attractive de la forme :

$$U = -k_{\text{London}} \frac{\|\vec{\mu}_{1,\text{ins}}\| \cdot \|\vec{\mu}_{2,\text{ins}}\|}{d^6}$$


avec  $k_{\text{London}}$  : constante de London.

 Plus les liaisons sont polarisables, plus les moments dipolaires instantanés sont élevés et les molécules sont liées entre elles.



## 1.6 Bilan des interactions de van der Waals

L'interaction de Van der Waals est la somme des trois interactions Keesom, Debye et London. Elle augmente avec la polarité et la polarisabilité des molécules, la polarisabilité augmentant avec la taille des molécules.

 *S'il n'existait que des interactions attractives entre les molécules, celles-ci s'interpénétreraient, il existe également des interactions répulsives entre les molécules à plus courte portée.*

## 2. Liaisons hydrogène

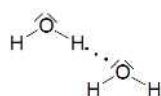
- Une liaison hydrogène s'établit entre un hydrogène acide (atome d'hydrogène lié par covalence à un atome très électronégatif : fluor, oxygène, azote) et un atome très électronégatif porteur d'un doublet non liant (fluor, oxygène, azote).

La liaison hydrogène est donc spécifique à certaines molécules.

- La longueur de la liaison hydrogène est de l'ordre de 200 pm, l'énergie associée à la liaison hydrogène est de l'ordre de quelques dizaines de  $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ . La liaison hydrogène est donc une interaction plus forte que les interactions de van der Waals.

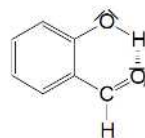
- Deux types de liaisons hydrogène existent : les liaisons hydrogène intermoléculaires, faisant intervenir deux molécules distinctes et les liaisons hydrogène intramoléculaires qui se développent entre deux groupes d'atomes au sein d'une même molécule.

Ex : liaison hydrogène intermoléculaire



O, H, O sont alignés

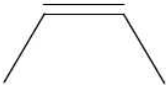
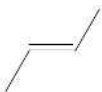
Ex : liaison hydrogène intramoléculaire

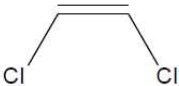
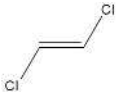


Acide salicylique

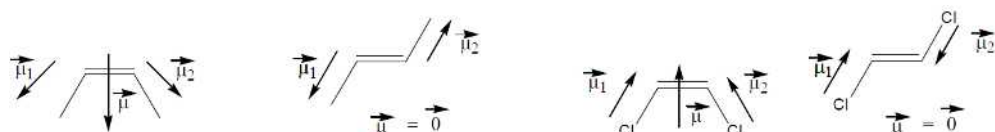
## 3. Étude d'une propriété physique, la température d'ébullition

- Ex : évolution des températures d'ébullition des alcènes.

Alcène	Formule brute	$T_{eb}$ °C (sous 1 bar)
(Z) But-2-ène		4°
(E) But-2-ène		1°

(Z) But-1, 2-dichloroéthène		60°
(E) But-1, 2-dichloroéthène		49°

- Analyse des moments dipolaires : on considère qu'un atome de carbone  $AX_3$  est légèrement plus électro-négatif qu'un carbone  $AX_4$ .



Les atomes des deux molécules ont des polarisabilités identiques, donc ces molécules ne se différencient uniquement que par les interactions de Keesom.

Les composés Z sont polaires contrairement aux composés E, apolaires. Les interactions de van der Waals seront donc plus faibles pour les composés E, d'où des températures d'ébullition plus faibles.

## 4. Solvant moléculaire

### 4.1 Grandeurs caractéristiques d'un solvant

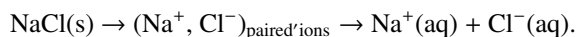
Un solvant se caractérise par deux grandeurs :

- Son moment dipolaire  $\vec{\mu}$  qui traduit le caractère polaire ou apolaire du solvant.
- Sa permittivité relative  $\epsilon_r$  qui révèle le caractère dissociant du solvant.

### 4.2 Caractère dissociant d'un solvant

Cette propriété du solvant intervient par exemple sur des composés ioniques.

- Schéma d'ionisation en solution d'un solide ionique (ex : NaCl) :



- Un solvant sera dissociant s'il sépare facilement les deux ions de la paire d'ions.
- La force d'attraction  $\vec{F}$  entre les deux ions est de type coulombienne :

$$\|\vec{F}\| = \frac{q_+ q_-}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r d^2}$$

où  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_r$  sont respectivement la permittivité du vide et la permittivité relative du solvant (sans unité). Plus  $\epsilon_r$  augmente, plus la force d'attraction entre les deux ions diminue et leur séparation en devient plus aisée.

*Un solvant est donc plus dissociant si sa permittivité relative  $\epsilon_r$  est grande :*

*Solvant dissociant :  $\epsilon_r > 40$  ;*

*Solvant peu ou pas dissociant :  $\epsilon_r < 20$ .*

### 4.3 Polarité du solvant

Plus le moment dipolaire (unité : Debye) du solvant est élevé, plus l'interaction que le solvant engage avec un ion ou une molécule polaire augmente.

*Un solvant stabilise davantage les ions ou les molécules polaires si son moment dipolaire est élevé.*

*Solvant polaire :  $\mu > 1,3D$*

*Solvant peu polaire :  $\mu < 0,5D$ .*

### 4.4 Solvants protogènes (protiques) et aprotogènes

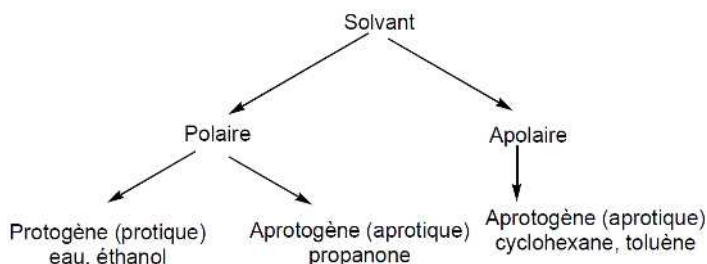
- Un solvant est dit protogène (ou protique) s'il est capable d'engager un de ses hydrogènes dans une liaison hydrogène. Cet hydrogène est donc lié à un atome électronégatif (N, O, F). Dans le cas contraire, le solvant est dit aprotogène (ou aprotique).

#### • Exemples

– eau, éthanol possèdent des H pouvant engager une liaison hydrogène, il s'agit de solvants protogènes.

– La propanone ne peut engager de H dans une liaison hydrogène, c'est un solvant aprotique.

### 4.5 Schéma résumé

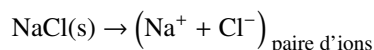


### 4.6 Mise en solution d'une espèce moléculaire ou ionique

- *Dissolution d'une espèce ionique (ex : dissolution de  $\text{NaCl}(s)$  dans l'eau)*

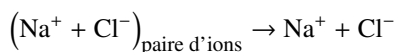
#### ❶ Formation de paires d'ions

La polarité d'un solvant permet l'ionisation du cristal ionique et la formation d'une paire d'ion.



#### ❷ Dispersion des ions

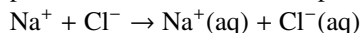
Comme l'interaction entre anion et cation est inversement proportionnelle à la permittivité relative  $\epsilon_r$  du solvant, plus  $\epsilon_r$  est grande, plus les ions se dispersent facilement.




### ③ Solvation des ions

Les molécules de solvant entourent les anions et les cations en créant des interactions :

- Interaction solvant–anions par interactions anion–dipôle,
- Interaction solvant–cations par des interactions cation–dipôle :




 Pour dissoudre un composé ionique, il convient d'utiliser un solvant polaire ( $\mu$  élevé) et dissolvant ( $\epsilon_r$  élevé).

#### • Dissolution d'une espèce moléculaire M

Suivant la nature de l'espèce moléculaire M, il conviendra d'examiner les propriétés de l'espèce pour choisir le solvant permettant la dissolution. Le solvant capable de la dissoudre doit pouvoir générer des interactions avec l'espèce. Le mécanisme de dissolution est :



- Si l'espèce moléculaire est apolaire, un solvant apolaire permettra la formation de liaison de van der Waals de type London.
- Si l'espèce moléculaire est polaire, un solvant polaire permettra la formation de liaison de van der Waals de type Keesom.
- Si de plus le solide moléculaire peut créer des liaisons hydrogène avec le solvant, la solvation sera facilitée en cas de solvant protogène.

 Pour dissoudre un composé moléculaire polaire, il convient d'utiliser un solvant polaire. Lorsque le composé peut engendrer des liaisons hydrogène, un solvant protogène favorise la dissolution.

Pour dissoudre un composé moléculaire apolaire, il faut utiliser un solvant apolaire.

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Voici quatre composés : éthane ( $\text{CH}_3\text{-CH}_3$ ), éthanol ( $\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{OH}$ ), éthanal ( $\text{CH}_3\text{-CHO}$ ), acide éthanique ( $\text{CH}_3\text{-COOH}$ ).

Associez les températures d'ébullitions (à  $P = 1$  bar) suivantes aux composés :  $-89^\circ\text{C}$  ;  $118^\circ\text{C}$  ;  $20^\circ\text{C}$  ;  $78^\circ\text{C}$ .

**Exercice 2 :** On considère les solvants eau et cyclohexane de formule  $\text{C}_6\text{H}_{12}$ .

Précisez si ces solvants sont polaires ou apolaires, protogènes ou aprotogènes.

Dans quel solvant, les espèces diiode  $\text{I}_2$ , et l'ion  $\text{I}_3^-$  se solubilisent le plus ?

# 8

## Le modèle du cristal parfait

L'état solide peut être décrit par deux modèles limites : le cristal parfait et le solide amorphe où la distribution des espèces chimiques est totalement aléatoire. En réalité, l'état solide sera intermédiaire à ces deux modèles limites.

### 1. Le modèle du cristal parfait

#### 1.1 Le modèle

Dans un cristal parfait, les espèces chimiques se répartissent de façon régulière et périodique cela tant au niveau microscopique que macroscopique.

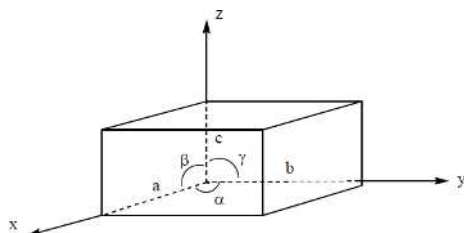
On peut donc décrire le cristal parfait comme un assemblage, une succession de parallélépipèdes dans lesquels se disposent les entités chimiques. La connaissance de ce parallélépipède permet par répétition d'obtenir le cristal parfait.

Dans le cristal parfait, il n'y a aucun défaut observé, c'est l'ordre absolu.

#### 1.2 Définition

On définit alors :

- Le motif comme l'entité chimique la plus petite qui se répète dans le cristal. Le motif peut-être de différentes natures : atomes, ions, molécules, ...
- La maille correspond au parallélépipède qui permet de décrire le cristal parfait. On le définit par les trois angles  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  et les trois longueurs  $a, b$  et  $c$  ci-dessous :



#### 1.3 Différents types de cristaux

Les cristaux peuvent être classés suivant la **force de liaison** qui assure la **cohésion**.

Liaisons physiques ou liaisons chimiques fortes	Liaisons intermoléculaires faibles
<p><i>Cristaux métalliques :</i></p> <p>Motif : atome métallique modélisé à une sphère de rayon égal au rayon métallique.</p> <p>Liaison : on suppose que chaque atome métallique a libéré un électron. La liaison est modélisée par l'interaction entre des cations positifs et un nuage d'électrons.</p> <p>Exemple : Fe(s), Na(s)</p>	<p><i>Cristaux moléculaires :</i></p> <p>Motif : molécule modélisée à une sphère de rayon égal au rayon de van der Waals.</p> <p>Liaison intermoléculaire : forces de van der Waals ou liaison hydrogène.</p> <p>Exemple : Eau (glace), cristaux de diiode.</p>

<p><b><i>Cristaux ioniques :</i></b>          Motif : ions modélisés à des sphères de rayons égaux aux rayons ioniques.          Liaison : de type coulombienne entre les ions.          Exemple : NaCl.</p>	
<p><b><i>Cristaux covalents :</i></b>          Motif : atome non métallique modélisé par une sphère de rayon égal au rayon atomique.          Liaison : covalente (liaison forte chimique).          Exemple : C diamant, Silicium.</p>	

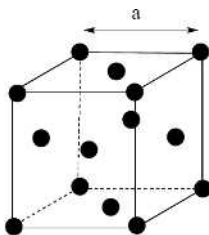
## 2. Description du cristal parfait

### 2.1 Population de la maille

*La population, ou la multiplicité, de la maille correspond au nombre de motifs appartenant à la maille.*

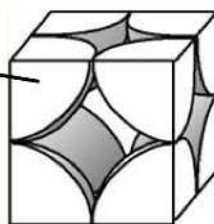
- Comment calculer la population  $Z$  ?

Supposons une maille cubique faces centrées (cfc) où la maille est un cube d'arête  $a$  (nommé paramètre de maille). Une entité chimique se trouve à chaque sommet du cube et à une à chaque centre de faces. L'entité chimique est assimilée à une sphère.

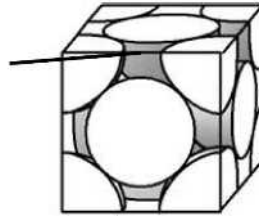


- Il faut tenir compte qu'un motif (au sommet ou au centre de faces) appartient à plusieurs mailles et sa contribution à la maille étudiée n'est donc pas forcément de une.

Si le motif se trouve au sommet de la maille, il n'y a qu' $1/8$  de la sphère qui appartient réellement à la maille  $\rightarrow$  **contribution de  $1/8$  à la maille**



Si le motif se trouve au centre d'une face, il n'y a qu' $1/2$  de la sphère qui appartient réellement à la maille  $\rightarrow$  contribution de  $1/2$  à la maille



Un motif aura une contribution de :

- 1 si le motif est à l'intérieur de la maille,
- $\frac{1}{2}$  si le motif est situé due une face,
- $\frac{1}{4}$  si le motif est sur une des arêtes de la maille,
- $\frac{1}{8}$  si le motif est sur un sommet de la maille.

Ex : pour la maille cfc

8 motifs à chaque sommet avec une contribution de  $\frac{1}{8}$

6 motifs à chaque centre de faces avec une contribution de  $\frac{1}{2}$

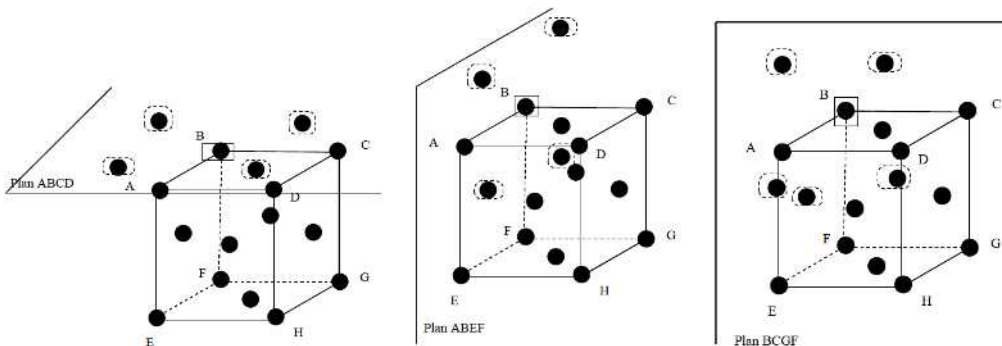
$$\text{donc } Z = \frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4.$$

## 2.2 Coordinence

La coordinence d'un motif correspond à son nombre de plus proches voisins, il s'agit donc du nombre de sphères en contact avec une sphère donnée.

Ex : calcul de la coordinence dans une maille cfc

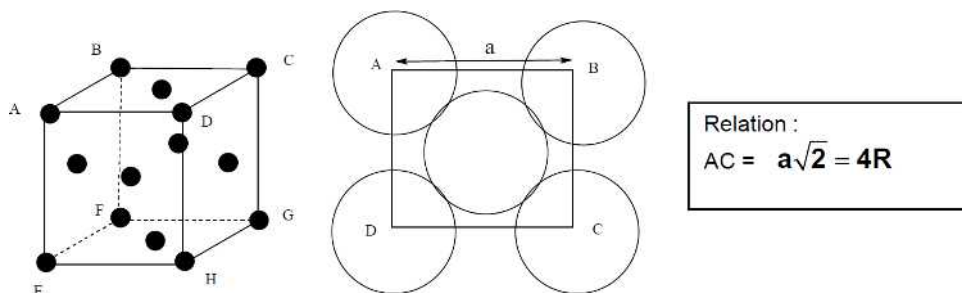
1 motif au sommet est voisin des motifs au centre de chaque face.



Le motif en B a quatre voisins dans le plan ABCD, quatre voisins dans le plan ABEF et quatre autres dans le plan BCGF. Sa coordinence vaut 12.

## 2.3 Relation entre les paramètres de maille et le rayon du motif

Relation entre  $a$  et  $R$  : un motif au sommet et au centre d'une face sont en contact.



Suivant la nature du cristal,  $R$  correspond aux rayon métallique, ionique, covalent ou moléculaire.

## 2.4 Compacité

La maille est composée des motifs et de vide (espace entre les motifs). Pour évaluer le taux d'occupation de la maille, on définit la compacité.

*La compacité est le rapport entre le volume occupé par les motifs et le volume de la maille. Il s'agit d'un nombre réel compris entre 0 et 1.*

Ex : calcul de la compacité dans une maille cfc.

Les motifs sont assimilés à des sphères de rayon  $R$ .

Volume des motifs de rayon  $R$  :  $V_{\text{motifs}} = 4 \times \frac{4}{3} \pi R^3$

Volume de la maille :  $V_{\text{maille}} = a^3$ .

d'où :  $C = \frac{V_{\text{motifs}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4 \times \frac{4}{3} \pi R^3}{a^3} = \frac{\pi \sqrt{2}}{6} \approx 0,74$ .

## 2.5 Masse volumique

Il s'agit du rapport de la masse de la maille sur son volume.

$$\mu = \frac{\text{masse de la maille}}{\text{volume de la maille}} = \frac{Z \left( \frac{M}{N} \right)}{a^3} = \frac{4M}{N_A a^3} \quad \text{pour le cfc : } \mu = \frac{ZM}{N_A a^3}$$

avec  $M$  : masse molaire ( $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) et  $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  (constante d'Avogadro) et  $a$  en  $\text{m}^3$ .

## 3. Limites du modèle du cristal parfait

Le cristal parfait n'existe pas, il s'agit d'un modèle limite. Le cristal réel comporte des défauts tels :

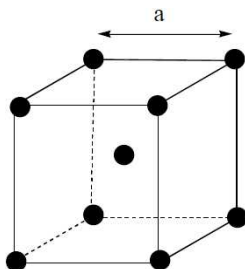
- le motif occupant une position différente de celle qu'il doit occuper dans un cristal parfait,
- la présence d'impuretés,
- des sites normalement occupés et vides,
- la non stoechiométrie des éléments.

Ces défauts modifient les propriétés des cristaux (masse volumique, propriétés électriques, mécaniques, ...).



## Sauriez-vous répondre ?

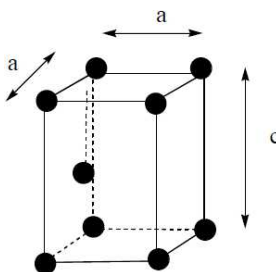
**Exercice 1 :** Le thorium cristallise dans une structure cubique centrée dessinée ci-dessous :



Déterminez la population, la coordonnée, la compacité et la masse volumique du thorium.

Données :  $M(\text{Th}) = 232 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ,  $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

**Exercice 2 :** Le titane  $\alpha$  cristallise suivant un empilement hexagonal compact. La maille conventionnelle est représentée ci-dessous.



On donne :  $a = 295 \text{ pm}$ . Calculez la masse volumique du cristal.

Donnée :  $M(\text{Ti}) = 47,9 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ,  $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

Pour les cristaux métalliques, l'entité est un atome métallique (élément à gauche dans la classification périodique).

## 1. Deux empilements compacts

### 1.1 Modèle de sphères dures

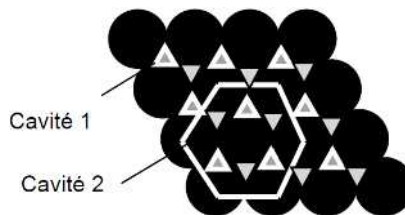
Les atomes métalliques sont assimilables à des sphères dures de rayon  $R$ .

Un empilement compact est un empilement où les sphères s'assemblent de manière à occuper un volume minimal, c'est-à-dire à réaliser un maximum de contact.

Deux structures compactes sont possibles : la structure cubique faces centrées (cfc) et l'hexagonal compact (hc).

Pour construire ces structures, on réalise des couches en minimisant l'espace.

### 1.2 Première couche (nommée A)

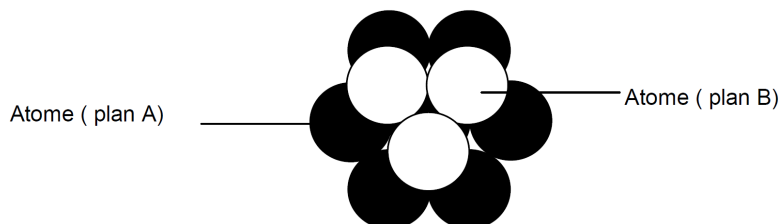


Chaque atome est au centre d'un hexagone et en contact avec 6 voisins. 2 types de cavités apparaissent dans le plan A :

- Triangle pointe vers le haut (cavité 1),
- Triangle pointe vers le bas (cavité 2).

### 1.3 Deuxième couche (nommée B)

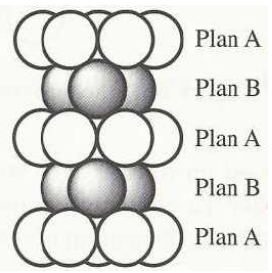
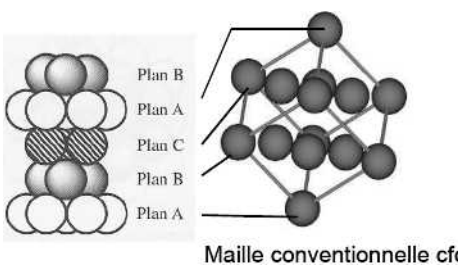
Pour occuper un minimum d'espace, les atomes de la seconde couche se placent au dessus des cavités laissées par les atomes de la première couche, réalisant ainsi un second pavage décalé par rapport au premier.



### 1.4 Troisième couche (nommée C)

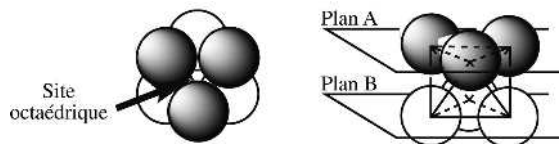
Les atomes de la troisième couche s'insèrent une nouvelle fois dans les cavités laissées par ceux de la seconde couche B. Deux possibilités sont envisageables. La troisième couche est identique à la couche A ou est décalée par rapport à B et A formant une couche C.

On obtient soit un empilement AB/AB qui correspond au système hexagonal compact, soit un empilement ABC/ABC qui décrit le système cubique faces centrées.

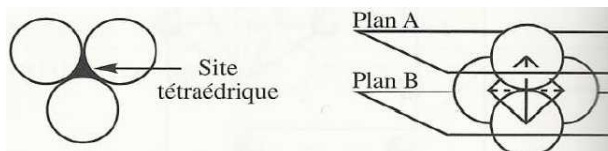
Empilement AB/AB, système hexagonal compact	Empilement ABC/ABC, système cubique faces centrées
	

## 2. Localisation de sites cristallographiques

- Entre les atomes, certains interstices existent et correspondent à du vide, on parle de site cristallographique.
- Un site octaédrique est un volume libre encadré de 6 atomes. Dans les plans d'empilement, un site octaédrique se localise entre 3 atomes appartenant à deux plans différents :

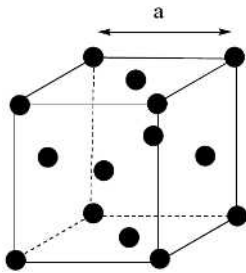


- Un site tétraédrique est un volume libre encadré de 4 atomes. Dans les plans d'empilement, un site tétraédrique se localise entre 3 atomes d'un plan et 1 atome d'un autre plan :



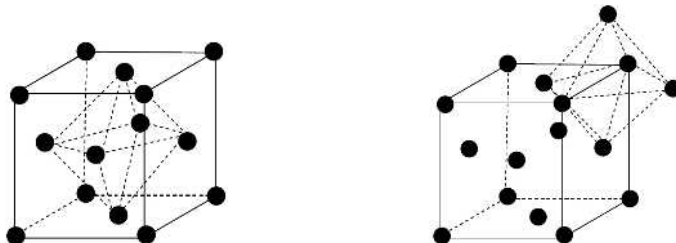
### 3. Maille conventionnelle du système cubique faces centrées (cfc)

#### 3.1 Description conventionnelle de la maille

 <p>Maille cubique d'arête <math>a</math> Un motif à chaque sommet du cube et un à chaque centre de face.</p>	<p>Population : <math>Z = \frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4</math></p> <p>Volume : <math>a^3</math></p> <p>Contact entre un atome au sommet et un atome au centre d'une face :</p> $a\sqrt{2} = 4R.$ <p>Compacité : le cfc est un système compact, il s'agit donc de la compacité maximale pour un métal pur :</p> $C = \frac{4 \times \frac{4}{3} \pi R^3}{a^3} = \frac{\pi \sqrt{2}}{6} \approx 0,74$ <p>Masse volumique : <math>\rho = \frac{4M}{N_A a^3}</math></p> <p>Coordinance : 12</p>
--	---

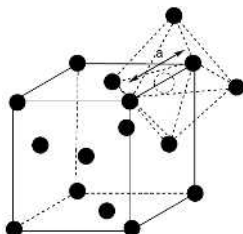
#### 3.2 Sites octaédriques

- **Localisation** : les sites octaédriques se localisent au milieu de chaque arête et au centre du cube.



- **Nombre de sites octaédriques** :  $Z_{\text{oct}} = \frac{12}{4} + \frac{1}{1} = 4$

- **Habitabilité** : Si un atome s'insère dans une cavité octaédrique, il ne doit pas déformer le réseau cfc. Le rayon maximal de l'atome inséré correspond au rayon d'habitabilité  $r_{\text{oct}}$ . Pour ce rayon, il y a contact entre l'atome inséré et les 6 atomes du réseau hôte délimitant la cavité octaédrique.

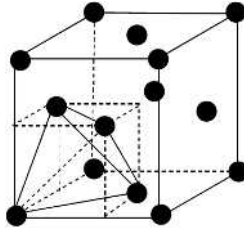


$$a = 2(R + r_{\text{oct}}) \Rightarrow r_{\text{oct}} = \frac{a}{2} - R$$

De plus,  $a\sqrt{2} = 4R \Rightarrow r_{\text{oct}} = (\sqrt{2} - 1)R.$

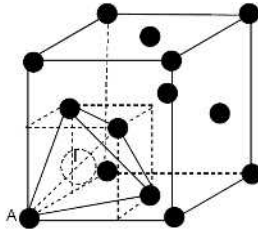
### 3.3 Sites tétraédriques

- **Localisation** : les sites tétraédriques se localisent au centre des 8 cubes d'arête  $\frac{a}{2}$ .



- **Nombre de sites octaédriques** :  $Z_{\text{oct}} = \frac{8}{1} = 8.$

- **Habitabilité** : Le rayon maximal de l'atome inséré correspond au rayon d'habitabilité  $r_{\text{tet}}$  de la cavité tétraédrique.




$$\frac{a\sqrt{3}}{4} = R + r_{\text{tet}} \Rightarrow r_{\text{tet}} = \frac{a\sqrt{3}}{4} - R$$

De plus,  $a\sqrt{2} = 4R \Rightarrow r_{\text{tet}} = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1 \right) R.$

## 4. Liaison métallique et propriétés des métaux

### 4.1 Nature de la liaison métallique

Pour décrire la liaison métallique, on considère que chaque atome métallique perd au moins un électron formant ainsi un cation et un nuage d'électrons libres.

 La liaison métallique est considérée comme l'interaction coulombienne entre les cations de charge positive et les électrons de charge négative.

L'énergie de la liaison métallique est :  $E_{\text{liaison métallique}} \approx 500 \text{ kJ.mol}^{-1}.$

## 4.2 Propriétés physiques

- Les électrons libérés sont libres de mouvement dans les trois directions de l'espace. Les métaux sont de bons conducteurs électriques sans direction privilégiée.
- Les métaux ont de bonnes propriétés mécaniques (dureté, résistance à la traction, malléabilité, ductilité).

## 5. Alliages

### 5.1 Intérêt

Un alliage est la combinaison d'un métal avec un autre métal ou d'autres espèces chimiques. L'intérêt est d'augmenter les propriétés mécaniques, de limiter la corrosion du métal ou enfin de faire fondre le métal à une température plus basse.

### 5.2 Deux types d'alliages

On distingue deux types d'alliages : les alliages d'insertion et les alliages de substitution.

Dans les **alliages de substitution**, les atomes incorporés se substituent aux atomes en place. Les deux atomes doivent avoir des rayons atomiques similaires.

Dans les **alliages d'insertion**, les atomes incorporés s'insèrent dans les espaces libres (sites interstitiels) du cristal. L'atome inséré doit donc admettre un rayon inférieur ou égal au rayon d'habitabilité de la cavité.

### 5.3 Exemples d'alliages

#### • Acier

Élément métallique	Ajout d'élément	Propriétés
Fer	Carbone (2 % en masse)	On augmente la dureté du fer

#### • Acier inoxydable

Fer	Carbone (2% en masse) + Chrome + Nickel	On augmente les propriétés de corrosion.
-----	---	--

#### • Alliage d'aluminium

Aluminium	Cobalt + Nickel + Tantale	Ces alliages sont utilisés dans l'aérospatiale. On augmente la température de fusion pour faciliter la pénétration dans l'atmosphère.
-----------	---------------------------	---

#### • Bronze

Cuivre ( $\geq 60$ %)	Étain	Faible coefficient de frottement et usure plus faible que le cuivre.
-----------------------	-------	--

#### • Laiton

Cuivre ( $\geq 60\%$ )	Zinc	Plus dur que le cuivre et facile à usiner.
------------------------	------	--

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1** : L'or cristallise dans le réseau compact cubique à faces centrées. Calculez :

- le rayon métallique de l'atome d'or ;
- la compacité du réseau ;
- la distance entre deux plans réticulaires ;
- la masse volumique.

Repérez puis dénombrez les sites octaédrique et tétraédrique dans cette structure.

Évaluez le rayon maximal d'un atome étranger pouvant occuper de tels sites.

L'or des bijoutiers est un alliage composé d'or et de cuivre. S'agit-il d'un alliage d'insertion ou de substitution ? Justifiez votre réponse.

Données :  $a = 0,408 \text{ nm}$  ;  $M(\text{Au}) = 197,0 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  $R(\text{Cu}) = 128 \text{ pm}$ ,

$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

# 10 Solides macrocovalents et moléculaires

## 1. Solides macrocovalents

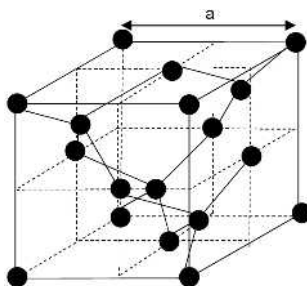
### 1.1 Qu'est qu'un cristal covalent ?

*Un cristal covalent est un cristal où les motifs sont des atomes qui sont liés entre eux par des liaisons covalentes (liaison forte, énergie de l'ordre de la centaine de  $\text{kJ.mol}^{-1}$ ).*

Les cristaux covalents sont constitués des macromolécules de taille infinie. On parle de solides macrocovalents. Ainsi le carbone diamant est une macromolécule géante tridimensionnelle, tandis que le carbone graphite est constitué de macromolécules de carbone qui s'étendent sur des plans parallèles formant des feuillets.

### 1.2 Une structure tridimensionnelle, le carbone diamant

- Maille conventionnelle



Position des atomes :

- atomes de carbone décrivant un réseau cfc (mais un réseau cfc non compact),
- et moitié des sites tétraédriques.

- Atomes en contact

- Distance entre atomes au sommet :  $a$ .
- Distance entre atome au sommet et atome au centre d'une face :  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .
- Distance entre atome au sommet et atome dans une cavité tétraédrique :  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ .

Le contact se fait entre un atome au sommet et un atome dans une cavité tétraédrique. Ces atomes sont liés par une liaison de covalence forte.

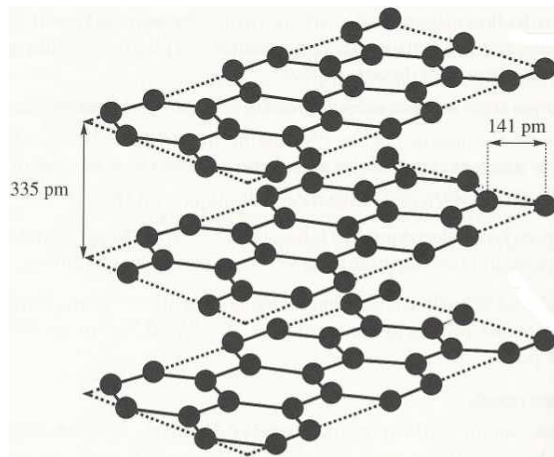


• **Caractéristiques**

Population	$Z_C = \frac{8}{8} + \frac{6}{2} + \frac{4}{1} = 8$
Coordinnence	Un atome de carbone dans une lacune tétraédrique est relié à 4 atomes de carbone, la coordinnence C/C est donc de 4.
Contact	Contact entre atome au sommet et atome au centre de la cavité tétraédrique : $\frac{a\sqrt{3}}{4} = 2R_C$
Compacité	$C = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi R_C^3}{a^3} = \frac{\pi \sqrt{3}}{16}$
Masse volumique	$\mu = \frac{8M_C}{N_A a^3}$

### 1.3 Une structure en feuillet, le carbone graphite

• **Structure en feuillet**



– *Dans un feuillet :*

Dans chaque plan, la molécule est de taille infinie d'où le terme de macromolécule.

Les carbones se répartissent suivant une structure hexagonale (pas d'atome de C au centre de l'hexagone).

Chaque carbone n'est lié que trois fois par des liaisons covalentes  $\Rightarrow$  C de type  $AX_3$ .

$$d_{C=C} = 134 \text{ pm} < d(C-C)_{\text{grap}} = 141 \text{ pm} < d_{C-C} = 154 \text{ pm}$$

$\Rightarrow$  Liaison C-C intermédiaire entre une double liaison et une simple liaison.

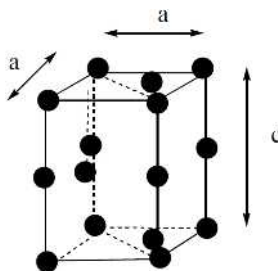
– *Distance entre deux feuillets = 335 pm*

$\Rightarrow$  Les C ne peuvent être reliés par des liaisons de covalence car la distance est trop importante.

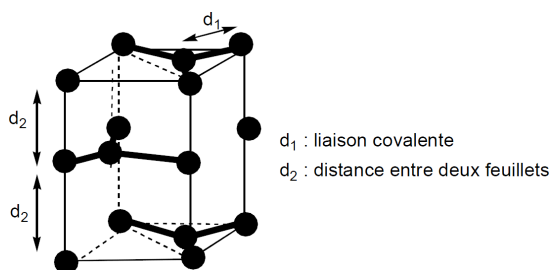
$\Rightarrow$  Liaisons de Van der Waals entre les feuillets.

⇒ Liaisons faibles entre les feuillets.

- Maille conventionnelle



- Atomes en contact



- Caractéristiques

Population	$Z(C) = \frac{8}{8} + \frac{2}{2} + \frac{1}{1} + \frac{4}{4} = 4$
Coordinance	Dans un feuillet, un atome de carbone n'est lié qu'à trois atomes de carbone, la coordinaire C/C est donc de 3.
Relation entre rayon du carbone $R_C$ et $d_1$	$d_1 = 2R_C$
Volume	$V = 3\sqrt{3}d_1^2 d_2$ (cf. exercice 1)
Compacité	$C = \frac{4 \times \frac{4}{3} \pi R^3}{3\sqrt{3}d_1^2 d_2} = \frac{4 \times \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^3}{3\sqrt{3}d_1^2 d_2} = \frac{2\pi d_1}{3^2 d_1^2 d_2} = 0,17$
Masse volumique	$\mu = \frac{4\left(\frac{M_C}{N}\right)}{3\sqrt{3}d_1^2 d_2} = \frac{4M_C}{N_A 3\sqrt{3}d_1^2 d_2} = 2270 \text{ kg.m}^{-3}$

## 1.4 Comparaison des propriétés physiques du diamant et du graphite

	C diamant	C graphite
Structure microscopique : nature des liaisons	Présence de liaisons simples C-C dans la structure tridimensionnelle	Dans un feuillet, présence de liaisons intermédiaires à une simple et une double. Entre les feuillets, liaisons de Van der Waals (liaisons faibles) $\Rightarrow$ anisotropie des liaisons.
Propriétés macroscopiques : propriétés mécaniques	Grande dureté due à la difficulté de rompre les liaisons C-C	Aptitude des feuillets à glisser les uns des autres (caractère lubrifiant du graphite)
Propriétés macroscopiques : propriétés de conduction électrique	C de type $AX_4$ , les électrons sont localisés dans la liaison C-C. Pas de possibilité de conduction électrique $\Rightarrow$ pouvoir isolant du carbone diamant.	C de type $AX_3$ , Sur chaque carbone, un $e^-$ est libre et se délocalise. Anisotropie de la conduction électrique : conduction forte parallèlement aux feuillets, et conduction faible perpendiculairement.

## 2. Solides moléculaires

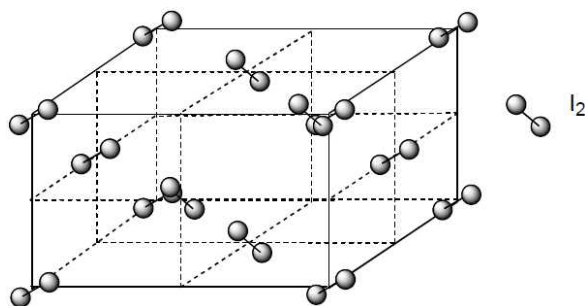
### 2.1 Qu'est qu'un cristal moléculaire ?

Dans un cristal moléculaire, le motif est une molécule. La cohésion des cristaux moléculaires est assurée par des liaisons faibles : liaisons de van der Waals ou liaisons hydrogène.

### 2.2 Exemples de cristaux moléculaires

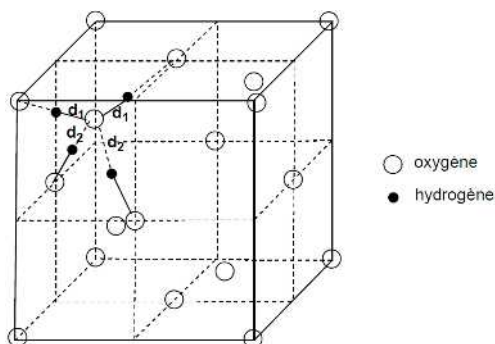
- **Cristaux moléculaires avec une cohésion de type liaisons de van der Waals** (quelques  $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ ) Ex : diiode  $\text{I}_2$

Maille conventionnelle :



- **Cristaux moléculaires avec une cohésion de type liaisons hydrogène** (quelques dizaines de  $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ ) Ex : glace  $\text{H}_2\text{O}$  (type diamant)

Maille conventionnelle (représentation uniquement des atomes d'oxygène et des atomes H entourant un O) :



Entre deux atomes d'oxygène, il y a un atome d'hydrogène. Un oxygène est lié à deux atomes d'hydrogène par liaison covalente (distance  $d_1$ ) et à deux autres atomes d'hydrogène par liaison hydrogène (distance  $d_2$ ).

## 2.3 Propriétés des cristaux moléculaires

La cohésion dans les cristaux moléculaires est donc due à des liaisons faibles. Ces cristaux ont des températures de changement d'état faibles (sous  $P = 1$  bar, la glace fond à  $0^\circ\text{C}$  et le diiode de sublime à  $60^\circ\text{C}$ ).

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** En reprenant la maille du carbone graphite, déterminez le volume de la maille en fonction des distances  $d_1$ , longueur de la liaison covalente et  $d_2$ , distance entre deux feuillets.

**Exercice 2 :** En reprenant la maille de la glace de type diamant, calculez la distance  $D$  entre deux atomes d'oxygène voisins.


Donnée : masse volumique de l'eau =  $920 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $M(\text{O}) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$ ,

$M(\text{H}) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

# 11 Solides ioniques

## 1. Qu'est qu'un cristal ionique ?


Un cristal ionique est composé d'ions de charges de signe contraire : anions et cations.

 Dans un cristal ionique, la cohésion des anions et cations est assurée par des interactions fortes de type coulombienne.

Étant donnée la cohésion forte, les cristaux ioniques se caractérisent par des températures de fusion élevées (ex : NaCl,  $T_{\text{fusion}} \approx 800^\circ\text{C}$ ).

Plusieurs règles doivent être respectées :

- ❶ Le cristal doit être électriquement **neutre** (autant de charges négatives que de charges positives).
- ❷ Pour des raisons d'interactions coulombiennes, seuls les contacts entre ions de charge opposée sont possibles.
- ❸ Lors de la construction du cristal ionique, les cations de rayon ionique plus faible sont insérés dans les sites interstitiels du réseau d'anions.

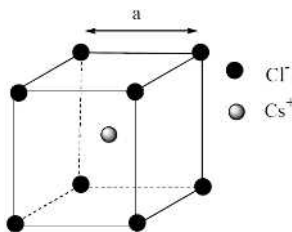
 Le cation inséré doit être suffisamment volumineux pour déformer le réseau d'anions et éviter le contact entre anions. Le réseau d'anions n'est donc pas un réseau compact.

- ❹ Pour avoir une interaction coulombienne importante, chaque ion s'entoure du maximum d'ions de charge opposée.

## 2. Exemples de cristaux ioniques de type AB (stoechiométrie entre anion et cation)

### 2.1 Structure CsCl (chlorure de césium)

- Maille conventionnelle

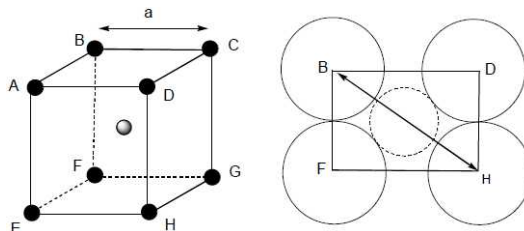


- **Description** : Réseau cubique d'ion chlorure  $\text{Cl}^-$ , cation  $\text{Cs}^+$  dans une cavité cubique.
- **Valeur des rayons** :  $R(\text{Cl}^-) = R^- = 181 \text{ pm}$  ;  $r(\text{Cs}^+) = r^+ = 169 \text{ pm}$
- **Population** :  $Z(\text{Cl}) = \frac{8}{8} = 1$  et  $Z(\text{Cs}) = 1 \Rightarrow 1$  motif de CsCl par maille.
- **Contact entre anion/cation** :  $\frac{a\sqrt{3}}{2} = R^- + r^+ \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}(R^- + r^+) = 404 \text{ pm}$ .

• **Distance entre deux anions** :  $d_1 = a = 404 \text{ pm} > 2R^- = 362 \text{ pm} \Rightarrow$  pas de tangence entre les anions.

• **Condition d'insertion d'un cation dans une cavité cubique** : Le cation doit déformer le réseau d'anions pour éviter la tangence entre anions. Pour s'insérer dans une cavité cubique, le rayon du cation doit être supérieur à un rayon minimal :  $r^+ > r_{\min}$ .

Au cas limite de tangence entre anions :



$$BH = a\sqrt{3} = 2(R^- + r_{\min}) \text{ et } a = 2R^- \Rightarrow r_{\min} = (\sqrt{3} - 1)R^-$$

*Si  $r^+ > (\sqrt{3} - 1)R^-$ , le cation se place dans une cavité cubique.*

### • Propriétés :

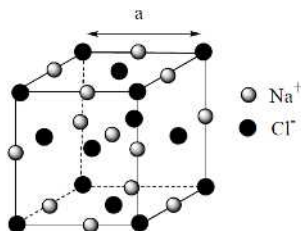
Coordinance : 1 ion entouré de 8 ions  $\text{Cl}^-$ , 1 ion  $\text{Cl}^-$  entouré de 8 ions  $\text{Cs}^+$ .

$$C = \frac{\frac{4}{3}\pi((R^-)^3 + (r^+)^3)}{a^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \times \frac{(R^-)^3 + (r^+)^3}{(R^- + r^+)^3} = 0,68$$

$$\mu = \frac{\text{masse de la maille}}{\text{volume de la maille}} = \frac{2m_{\text{CsCl}}}{a^3} = \frac{2M_{\text{CsCl}}}{N_A a^3}$$

## 2.2 Structure NaCl (chlorure de sodium)

### • Maille conventionnelle



• **Description** : Réseau cubique faces centrées d'ion chlorure  $\text{Cl}^-$   
Cation  $\text{Na}^+$  dans les cavités octaédriques

• **Valeur des rayons** :  $R(\text{Cl}^-) = R^- = 181 \text{ pm}$  ;  $r(\text{Cs}^+) = r^+ = 95 \text{ pm}$

• **Population** :  $Z(\text{Cl}) = \frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$  et  $Z(\text{Na}) = \frac{12}{4} = 4 \Rightarrow 4$  motifs de NaCl par maille.

• **Contact entre anion/cation** :  $\frac{a}{2} = R^- + r^+ \Rightarrow a = 2(R^- + r^+) = 552 \text{ ppm}$ .

• **Distance entre deux anions** :  $d_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 390 \text{ pm} > 2R^- = 362 \text{ pm}$   
 $\Rightarrow$  pas de tangence entre les anions.

- **Condition d'insertion d'un cation dans une cavité octaédrique** : Au cas limite de tangence entre anions :  $a = 2(R^- + r_{lim}^-)$  et  $a\sqrt{2} = 4R^-$   
 $\Rightarrow r_{lim}^- = (\sqrt{2} - 1)R^-$ .

Pour avoir une coordinence maximale si  $r^+ > (\sqrt{3} - 1)R^-$ , le cation se placera préférentiellement dans une cavité cubique.

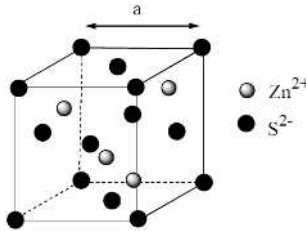
Si  $(\sqrt{2} - 1)R^- < r^+ < (\sqrt{3} - 1)R^-$ , le cation se place dans une cavité octaédrique.

- **Coordinence** :

1 ion  $\text{Na}^+$  entouré de 6 ions  $\text{Cl}^-$ , 1 ion  $\text{Cl}^-$  entouré de 6 ions  $\text{Na}^+$ .

## 2.3 Structure ZnS (sulfure de zinc)

- **Maille conventionnelle**



- **Description** : Réseau cubique faces centrées d'ion sulfure  $\text{S}^{2-}$ , cation  $\text{Zn}^{2+}$  dans la moitié des cavités tétraédriques.

- **Valeur des rayons** :  $R(\text{S}^{2-}) = R^- = 184 \text{ pm}$  ;  $r(\text{Zn}^{2+}) = r^+ = 74 \text{ pm}$

- **Population** :  $Z(\text{S}) = \frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$  et  $Z(\text{Zn}) = 4 \Rightarrow 4$  motifs de ZnS par maille.

- **Contact entre anion/cation** :  $\frac{a\sqrt{3}}{4} = R^- + r^+ \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}}(R^- + r^+) = 596 \text{ pm}$ .

- **Distance entre deux anions** :  $d_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 390 \text{ pm} > 2R^- = 368 \text{ pm} \Rightarrow$  pas de tangence entre les anions.

- **Condition d'insertion d'un cation dans une cavité cubique** :

Au cas limite de tangence entre anions :  $\frac{a\sqrt{3}}{2} = R^- + r_{lim}^-$  et  $\frac{a\sqrt{2}}{2} = 2R^- \Rightarrow r_{lim}^- = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1\right)R^- \Rightarrow r^+ > (\sqrt{2} - 1)R^-$ .

Pour avoir une coordinence maximale, si  $r^+ > (\sqrt{2} - 1)R^-$ , le cation se placera préférentiellement dans une cavité octaédrique.

Si  $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1\right)R^- < r^+ < (\sqrt{2} - 1)R^-$ , le cation se place dans une cavité tétraédrique.

**Sauriez-vous répondre ?**

**Exercice 1 :** On s'intéresse à la structure cristalline de l'iodure d'argent AgI de maille cubique. Le paramètre de maille est noté  $a$ . Les ions iodure occupent les nœuds d'un réseau cubique à faces centrées et les ions  $\text{Ag}^+$  occupent la moitié des sites tétraédriques.

1. Représentez la maille.
2. La masse volumique de la structure cubique de AgI vaut  $\rho = 5710 \text{ kg.m}^{-3}$ . Calculez le paramètre de maille.
3. Déduisez-en la distance entre un anion et un cation plus proches voisins. Comparez la à la somme des rayons ioniques et à la somme des rayons covalents. Concluez quant à la nature de la liaison.

Donnée :  $M(\text{Ag}) = 107,8 \text{ g.mol}^{-1}$  ;  $M(\text{I}) = 126,9 \text{ g.mol}^{-1}$  ;  $R(\text{Ag}^+) = 126 \text{ pm}$  ;  
 $R(\text{I}^-) = 216 \text{ pm}$  ;  $r(\text{Ag}) = 134 \text{ pm}$  ;  $r(\text{I}) = 133 \text{ pm}$ .

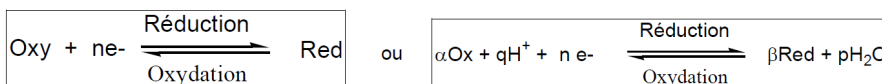


# 12

## Les réactions d'oxydo-réduction

### 1. Notion de couple oxydant/réducteur

- Un **oxydant** est une espèce capable de **capter** un ou plusieurs  $e^-$ . Un **réducteur** est une espèce capable de **céder** un ou plusieurs  $e^-$ .
- À chaque oxydant, on associe un réducteur. On définit alors un couple Oxy/Red auquel on associe une demi-équation d'oxydoréduction :



- Une réaction de **réduction** correspond à un gain d' $e^-$ . Une réaction d'**oxydation** correspond à une perte d' $e^-$ .

### 2. Nombres d'oxydation

*Un élément chimique peut se trouver dans différents états d'oxydation. Le nombre d'oxydation (noté n.o.) caractérise ces états. Plus le n.o. est élevé, plus l'élément est oxydé.*

Remarque : le n.o. se note en chiffre romain.

#### 2.1 Comment calculer le nombre d'oxydation d'un élément ?

- Atome**

n.o.(atome) = 0      Ex : n.o.(Fe) = 0

- Ion monoatomique**

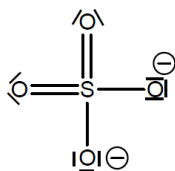
n.o.(élément) = charge q      Ex : n.o.(Fe<sup>2+</sup>) = + II

- Molécule ou ion polyatomique** Ex : SO<sub>4</sub><sup>2-</sup> :

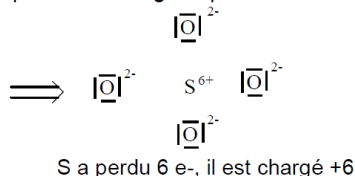
*Première méthode*

- On écrit la représentation de Lewis de la molécule ou de l'ion polyatomique.
- Le doublet liant d'une liaison est attribué à l'atome le plus électronégatif.
- La charge nette portée par l'atome correspond à son n.o.

❶



❷ O est plus électronégatif que S



❸ n.o.(O) = - II, n.o.(S) = +VI

*Deuxième méthode*

Pour une entité polyatomique, **la somme des n.o. des éléments est égale à la charge globale de l'entité**. De plus :

**n.o.(O) = - II** pour la plupart des espèces stables, sauf pour  $O_2$  où  $n.o.(O) = 0$  et  $H_2O_2$  où  $n.o.(O) = I$  ;

**n.o.(H) = + I** pour la plupart des espèces stables, sauf pour  $H_2$  où  $n.o.(H) = 0$ .

Ex : Pour  $SO_4^{2-}$ , on a :

$$n.o.(S) + 4 \times n.o.(O) = -2 \implies n.o.(S) = -2 - 4 \times n.o.(O) = + VI.$$

## 2.2 Exemples d'ions

### • Thiosulfate $S_2O_3^{2-}$

Représentation de Lewis	Nombre d'oxydation	Exemple de couple oxydant / réducteur
	$n.o.(O) = - II$ $n.o.(S_1) = + VI$ $n.o.(S_2) = 0$	$S_4O_6^{2-} / S_2O_3^{2-}$ $S_4O_6^{2-} + 2e^- = 2S_2O_3^{2-}$

### • Permanganate $MnO_4^-$

Permanganate	$MnO_4^-$		$n.o.(O) = - II$ $n.o.(Mn) = + VII$	$MnO_4^- / Mn^{2+}$ $MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- = Mn^{2+} + 4H_2O$
--------------	-----------	--	--	--

### • Dichromate $Cr_2O_7^{2-}$

	$n.o.(O) = - II$ $n.o.(Cr) = + VI$	$Cr_2O_7^{2-} / Cr^{3+}$ $Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e^- = 2Cr^{3+} + 7H_2O$
--	---------------------------------------	--

### • Hypochlorite $ClO^-$

Hypochlorite	$ClO^-$		$n.o.(O) = - II$ $n.o.(Cl) = + I$	$ClO^- / Cl_2$ $2ClO^- + 4H^+ + 2e^- = Cl_2 + 2H_2O$
--------------	---------	--	--------------------------------------	---

### • Peroxyde d'hydrogène $H_2O_2$

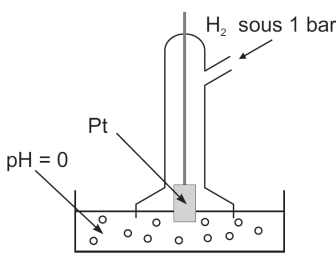
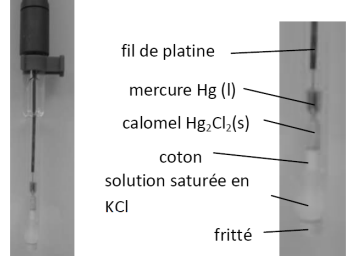
	$n.o.(O) = - I$ $n.o.(H) = + I$	$O_2 / H_2O_2$ $O_2 + 2H^+ + 2e^- = H_2O_2$
--	------------------------------------	--

## 2.3 Comment prévoir le nombre d'oxydation extrême d'un élément ?

En règle générale (pour les non-métaux à l'exception du fluor) :

- Pour connaître le nombre d'oxydation maximal d'un élément (forme la plus oxydée), il s'agit d'identifier le nombre d'électrons que peut perdre l'élément sans vider une couche électronique pleine.
- Pour connaître le nombre d'oxydation minimal (forme la plus réduite), on identifie le nombre d'électrons que peut gagner l'élément sans remplir de nouvelle couche électronique.



Électrode standard à hydrogène (ESH)	Électrode au calomel saturé
	
Description : – Lame de platine – Couple $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2(\text{g})$ $\text{pH} = 0$ et $p_{\text{H}_2} = 1 \text{ bar}$	Description : Couple $\text{Hg}_2\text{Cl}_2(\text{s})/\text{Hg}(\text{l})$ Solution de KCl saturée
$E_{\text{ref}} = 0 \text{ V}$ à toute température	À $25^\circ\text{C}$ , $E_{\text{ref}} = 0,245 \text{ V}$

- Notation d'une demi-pile : métal|oxy, red ou red|oxy

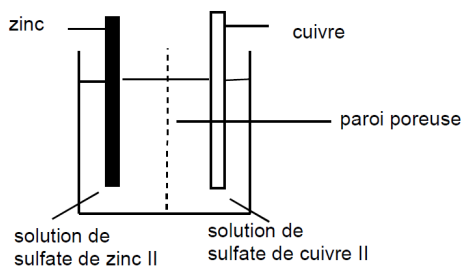
Remarque : | représente un changement de phase au sein d'une demi-pile

Ex :  $\text{Pt}|\text{Fe}^{3+}, \text{Fe}^{2+}$ .

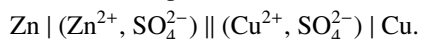
### 3.2 Pile

Une pile se compose de :

- deux demi-piles,
- d'une jonction électrolytique (paroi poreuse ou pont salin) reliant les deux demi-piles. La jonction permet de fermer le circuit électrique par une circulation d'ions. Ex : Pile Daniell



Notation de la pile :

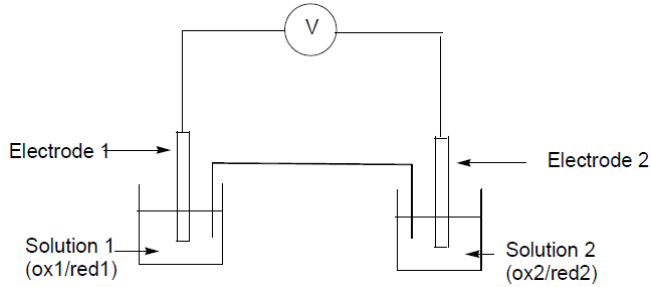


Le symbole  $||$  représente la jonction électrolytique.

### 3.3 Force électromotrice d'une pile

- La différence de potentiel à vide entre les deux électrodes d'une pile est appelée **force électromotrice** de la pile et notée  $f_{em}$ . On la mesure à l'aide d'un voltmètre :  $f_{em} = V_2 - V_1$ .

- Par convention, on définit la  $f_{em}$  comme une grandeur positive :  $V_2 > V_1$ . L'électrode 2 (à droite) est l'électrode positive et l'électrode 1 (à gauche) est l'électrode négative.



soit : électrode 1 | Ox1, red1 || Ox2, red2 | électrode 2

### 3.4 Capacité d'une pile

- La quantité  $Q$  de charge électrique débitée par une pile à  $I = \text{const}$  pendant  $\Delta t$  est :

$$Q = I \times \Delta t = n_e \cdot F$$

avec  $n_e$  : quantité de matière d'électrons échangés durant  $\Delta t$  ;

$F$  : constante de Faraday ( $F = 96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ ).

- La capacité  $Q_m$  d'une pile est la quantité maximale de charges électriques qu'elle peut fournir au cours de sa décharge pendant sa durée de vie  $\Delta t_{\text{vie}}$  :

$$Q_m = I \times \Delta t_{\text{vie}} = n_{e,\text{max}} F$$

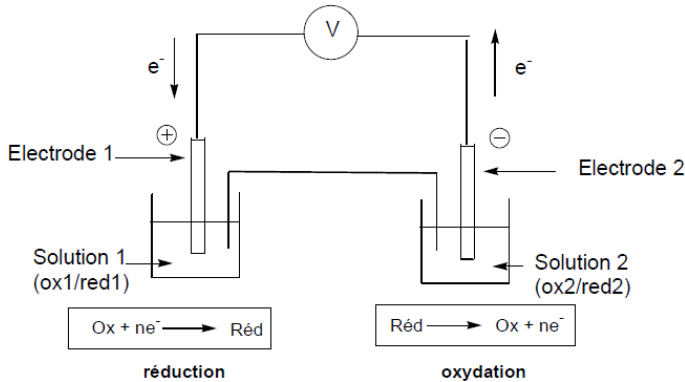
avec  $n_{e,\text{max}}$  = quantité de matière maximale d'électrons échangés.

$Q_m$  s'exprime en coulomb (C) ou en ampère-heure (A.h) avec  $1 \text{ A.h} = 3600 \text{ C}$ .

### 3.5 Prédiction du fonctionnement d'une pile

La mesure de la fem (ou la détermination de la polarité de la pile) permet de décrire le fonctionnement de la pile. À l'extérieur de la pile, les électrons sortent de la borne négative et arrive à la borne positive :

- L'électrode négative est donc le siège de l'oxydation (elle joue le rôle d'anode).
- L'électrode positive est donc le siège de la réduction (elle joue le rôle de cathode).



### 3.6 Potentiel d'électrode

- L'existence d'une f.e.m est due aux discontinuités entre :
  - les conducteurs et la solution électrolytique,

– les deux solutions électrolytiques, soit :

$$\text{fem} = V_2 - V_1 = (V_2 - V_{\text{sol}, 2}) + (V_{\text{sol}, 2} - V_{\text{sol}, 1}) - (V_1 - V_{\text{sol}, 1}).$$

• On pose :

$$E_1 = V_1 - V_{\text{sol}, 1} : \text{potentiel d'électrode du couple } \text{Ox}_1/\text{Red}_1$$

$$E_2 = V_2 - V_{\text{sol}, 2} : \text{potentiel d'électrode du couple } \text{Ox}_2/\text{Red}_2$$

$$V_{\text{jonction}} = V_{\text{sol}, 2} - V_{\text{sol}, 1} : \text{tension de jonction.}$$

On fera l'hypothèse que :  $V_{\text{jonction}} = V_{\text{sol}, 2} - V_{\text{sol}, 1} \approx 0$ , ainsi la fem d'une pile peut s'exprimer par :

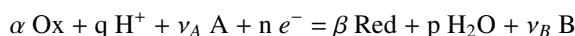
$$\text{fem} = E_2 - E_1.$$

*Le potentiel d'électrode d'un couple Ox/Red est la f.e.m. d'une pile dans laquelle la demi-pile de gauche est l'E.S.H. (électrode standard à hydrogène), et la demi-pile de droite est constituée du couple Ox/Red.*

## 4. Relation de Nernst

Le potentiel d'électrode peut être exprimé grâce à la relation de Nernst.

• On considère un couple Ox/Red d'équation de réaction :



On introduit :

– l'activité  $a_i$  de l'espèce  $i$  définie par :

nature de l'espèce	activité $a_i$
Soluté $A_i$ en solution	$a_i = \frac{C_i}{C^0}$ avec $C_i$ = concentration de $A_i$ et $C^0 = 1 \text{ mol.l}^{-1}$
Solide $A_i$ pur	$a_i = 1$
Liquide $A_i$ pur	$a_i = 1$
Gaz $A_i$ pur	$a_i = \frac{P_i}{P^0}$ avec $P_i$ = pression partielle de $A_i$ et $P^0 = 1 \text{ bar}$

–  $n$  le nombre d'électrons échangés dans la demi-équation d'oxydoréduction ;

–  $E_{\text{Ox/Red}}^\circ$  le potentiel standard d'oxydoréduction du couple Ox/Red. Cette grandeur caractéristique au couple ne dépend que de la température  $T$ .

–  $R$  la constante des gaz parfaits ( $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ ) ;

–  $F$  la constante de Faraday ( $F = 96\,500 \text{ C.mol}^{-1}$ )

–  $T$  la température exprimée en Kelvin (K).

On a :  $\frac{RT}{F} \ln(x) = \frac{RT}{F \ln(10)} \log(x)$  avec  $\frac{RT}{F \ln(10)} = 0,059 \text{ V à } 298 \text{ K.}$

• **Relation de Nernst**

$$E_{\text{Ox/Red}} = E_{\text{Ox/Red}}^\circ + \frac{RT}{nF} \ln \left( \frac{(a_{\text{Ox}})^\alpha (a_{\text{H}^+})^q (a_A)^{\nu_A}}{(a_{\text{Red}})^\beta (a_{\text{H}_2\text{O}})^p (a_b)^{\nu_b}} \right) \text{ (en Volt).}$$

- A 298 K, cette relation devient :

$$E_{\text{Ox/Red}} = E_{\text{Ox/Red}}^{\circ} + \frac{0,06}{n} \log \left( \frac{(a_{\text{Ox}})^{\alpha} (a_{\text{H}^+})^q (a_{\text{A}})^{\nu_{\text{A}}}}{(a_{\text{Red}})^{\beta} (a_{\text{H}_2\text{O}})^p (a_{\text{B}})^{\nu_{\text{B}}}} \right) \text{ (en Volt)}.$$

### • Exemples

Couple	demi-équation électronique	Activité $a_i$
$\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$	$\text{Fe}^{3+} + 1e^- = \text{Fe}^{2+}$	$E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}} = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^{\circ} + \frac{0,06}{1} \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]}\right)$
$\text{Fe}^{2+}/\text{Fe(s)}$	$\text{Fe}^{2+} + 2e^- = \text{Fe(s)}$	$E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}} = E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^{\circ} + \frac{0,06}{1} \log \left( \frac{[\text{Fe}^{2+}]}{C^0}\right)$
$\text{Cl}_2(\text{g})/\text{Cl}^-$	$\text{Cl}_2(\text{g}) + 2e^- = 2 \text{Cl}^-$	$E_{\text{Cl}(\text{g})/\text{Cl}^-} = E_{\text{Cl}_2(\text{g})/\text{Cl}^-}^{\circ} + \frac{0,06}{2} \log \left( \frac{P_{\text{Cl}_2}}{P^0} \frac{(C^0)^2}{[\text{Cl}^-]^2}\right)$

## 5. Diagrammes de prédominance et d'existence redox

### 5.1 Définitions

- Un **diagramme de prédominance** délimite les domaines de prédominance d'espèces redox d'un élément donné. Dans un domaine de prédominance, une espèce redox admet une concentration au moins 10 fois supérieure aux concentrations des autres espèces. En dehors de ce domaine, l'espèce existe mais elle est minoritaire. Les espèces dissoutes présentent des domaines de prédominance.

Ex :  $\text{Fe}^{2+}$ ,  $\text{Fe}^{3+}$  admettent des domaines de prédominance.

- Les espèces insolubles présentent des domaines d'existence. En dehors de ces domaines, ils ne peuvent exister. Lorsqu'il y a présence d'une espèce insoluble, on définit donc un **diagramme d'existence**.

Ex :  $\text{Fe(s)}$  admet un domaine d'existence.

### 5.2 Nécessité d'une convention

Pour établir les diagrammes de prédominance et d'existence des espèces redox d'un même élément chimique, il convient de fixer une convention :

- **Pour une frontière entre deux espèces dissoutes :**

- la concentration totale atomique en solution de l'élément considéré est égale à  $C_{\text{tracé}}$ .
- les concentrations atomiques en élément considéré sont égales (équipartition de l'élément).

- **Pour une frontière entre une espèce dissoute et une phase solide :** à la limite d'existence de la phase solide, la concentration atomique en solution de l'élément considéré est égale à  $C_{\text{tracé}}$ .

### 5.3 Établir un diagramme de prédominance ou d'existence

#### Diagramme de prédominance de $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$

- Étude de la frontière

– Convention à la frontière :  $C_{\text{tracé}} = [\text{Fe}^{3+}] + [\text{Fe}^{2+}]$  et  $[\text{Fe}^{3+}] = [\text{Fe}^{2+}]$

$$\Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] = [\text{Fe}^{2+}] = \frac{C_{\text{tracé}}}{2}$$

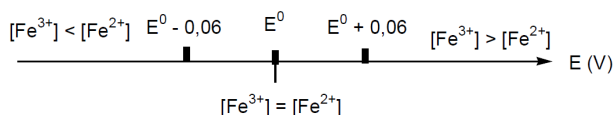
$$\Rightarrow E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}} = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^{\circ} + \frac{0,06}{1} \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^{\circ}$$

- Prédominance de  $\text{Fe}^{3+}$

$$[\text{Fe}^{3+}] \geq 10[\text{Fe}^{2+}] = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}} \geq E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^{\circ} + \frac{0,06}{1} \log(10) = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^{\circ} + 0,06$$

- Prédominance de  $\text{Fe}^{2+}$

$$[\text{Fe}^{2+}] \leq 10[\text{Fe}^{3+}] \Rightarrow E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}} \leq E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^{\circ} + \frac{0,06}{1} \log \left( \frac{1}{10} \right) = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^{\circ} - 0,06$$



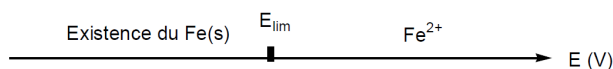
#### Diagramme d'existence de $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(s)$

- Étude de la frontière

– Convention à la frontière : à la limite d'existence de la phase solide, la concentration atomique en solution de l'élément considéré est égale à  $C_{\text{tracé}}$ .

$$\Rightarrow E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}} = E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^{\circ} + \frac{0,06}{2} \log \left( \frac{[\text{Fe}^{2+}]}{C^0} \right) = E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^{\circ} + 0,03 \log \left( \frac{C_{\text{tracé}}}{C^0} \right) = E_{\text{lim}}$$

- Pour  $C < C_{\text{tracé}}$ , l'élément n'est pas totalement dissous, le solide existe et  $E < E_{\text{lim}}$ .

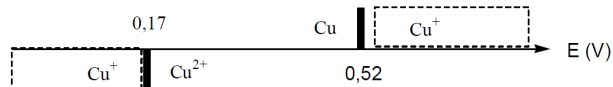


Dans les diagrammes de prédominance ou d'existence, l'oxydant prédomine (ou existe) à droite tandis que le réducteur prédomine (ou existe) à gauche.

### 5.4 Utiliser un diagramme de prédominance ou d'existence

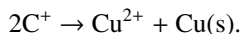
Si deux espèces présentent des domaines de prédominance ou d'existence disjoints (sans aucun potentiel commun) alors ses espèces sont incompatibles et réagissent entre elles.

Ex : domaines de prédominance de  $\text{Cu}^{2+}$ ,  $\text{Cu}^{+}$  et d'existence de Cu.



L'espèce  $\text{Cu}^{+}$  présente deux domaines disjoints (pas de partie commune). L'ion  $\text{Cu}^{+}$  est instable et réagit sur lui-même pour donner  $\text{Cu}^{2+}$  et Cu selon :






## 6. Réaction d'oxydo-réduction

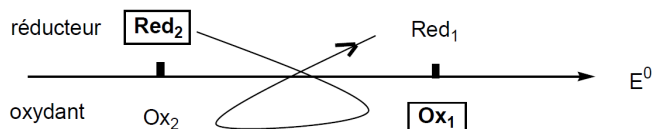
Les réactions d'oxydoréduction sont des équilibres qui peuvent être thermodynamiquement favorables ou défavorables. Comment peut-on le prévoir ?

### 6.1 Approche qualitative

 L'oxydant ( $\text{Ox}_1$ ) d'un couple de potentiel standard  $E_{\text{Ox}_1/\text{Red}_1}^0$  réagit de façon quantitative avec le réducteur ( $\text{Red}_2$ ) d'un autre couple de potentiel standard  $E_{\text{Ox}_2/\text{Red}_2}^0$  si  $E_{\text{Ox}_1}^0 > E_{\text{Red}_2}^0$ .

Pour se repérer, on peut tracer une échelle de potentiel standard. La réaction sera quantitative si un gamma à l'endroit peut être tracé. Dans le cas contraire la réaction d'oxydoréduction sera défavorable.

#### • Réaction quantitative :



Rq : Il suffit d'une différence de quelques dixièmes de volt (entre  $E_{\text{Ox}}^0$  et  $E_{\text{Red}}^0$ ) pour que la réaction soit quantitative.

#### • Réaction défavorable thermodynamiquement :



### 6.2 Approche quantitative, détermination de la constante d'équilibre

- Soit l'équilibre redox :  $n_2 \text{Ox}_1 + n_1 \text{Red}_2 = n_1 \text{Ox}_2 + n_2 \text{Red}_1$  avec  $n$  électrons échangés.

$$\log K^\circ(T) = \frac{n}{\ln(10)} \frac{F}{RT} (E_1^\circ - E_2^\circ)$$

$$\text{À } 298 \text{ K, } \log K^\circ(T) = \frac{n}{0,06} (E_1^\circ - E_2^\circ) = \frac{n}{0,06} (E_{\text{ox}_1}^\circ - E_{\text{red}_2}^\circ)$$

$$\text{soit } K^\circ = 10^{\frac{n}{0,06} (E_1^\circ - E_2^\circ)}$$

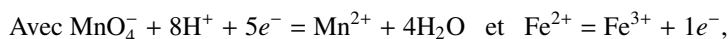
- Si  $K^0 > 10^3$ , la réaction est thermodynamiquement favorable.

Ex : Calcul de la constante d'équilibre entre les ions  $\text{Fe}^{2+}$  et les ions permanganate  $\text{MnO}_4^-$ .

Données :  $E_1^0 = E^0(\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}) = 1,51 \text{ V}$  et  $E_2^0 = E^0(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) = 0,77 \text{ V}$ .

#### Méthode :

- ❶ Écrire l'équation de la réaction d'oxydoréduction à partir des demi-équations électroniques



on obtient :  $\text{MnO}_4^- + 5\text{Fe}^{2+} + 8\text{H}^+ = \text{Mn}^{2+} + 5\text{Fe}^{3+} + 4\text{H}_2\text{O}$ .

② Exprimer la constante d'équilibre en fonction des activités des espèces chimiques

$$K^0 = \frac{[\text{Fe}^{3+}]^5 [\text{Mn}^{2+}]}{[\text{MnO}_4^-] [\text{Fe}^{2+}]^5 [\text{H}^+]^8}$$

③ Exprimer le potentiel d'électrode à l'aide des formules de Nernst

$$E_{\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}} = E_1^\circ + \frac{0,06}{5} \log \left( \frac{[\text{MnO}_4^-] [\text{H}^+]^8}{[\text{Mn}^{2+} (C^0)^8]} \right)$$

$$\text{et } E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}} = E_2^\circ + \frac{0,06}{1} \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right).$$

④ Uniformiser les deux coefficients devant le log en introduisant des exposants à l'intérieur du log

$$E_{\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}} = E_1^\circ + \frac{0,06}{5} \log \left( \frac{[\text{MnO}_4^-] [\text{H}_3\text{O}^+]^8}{[\text{Mn}^{2+}]} \right)$$

$$\text{et } E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}} = E_2^\circ + \frac{0,06}{5} \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]^5}{[\text{Fe}^{2+}]^5} \right).$$

⑤ À l'équilibre, il y a unicité du potentiel.

$$E_1^\circ + \frac{0,06}{5} \log \left( \frac{[\text{MnO}_4^-] [\text{H}^+]^8}{[\text{Mn}^{2+}]} \right) = E_2^\circ + \frac{0,06}{5} \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]^5}{[\text{Fe}^{2+}]^5} \right)$$

⑥ Exprimer la constante d'équilibre en regroupant les termes en log

$$\log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]^5 [\text{Mn}^{2+}]}{[\text{MnO}_4^-] [\text{Fe}^{2+}]^5 [\text{H}_3\text{O}^+]^8} \right) = \log(K^0) = \frac{5}{0,06} (E_1^\circ - E_2^\circ)$$

## 7. Réaction de dismutation, de médiamutation

• Si au cours d'une réaction d'oxydoréduction, une même espèce chimique, oxydant dans un couple et réducteur dans un autre, réagit sur elle-même, on dit que l'espèce se dismute et on parle de réaction de **dismutation**.

• Si au cours d'une réaction d'oxydoréduction, un oxydant  $\text{Ox}_1$  réagit avec un réducteur  $\text{Red}_2$  pour donner une seule espèce chimique, réducteur associé à  $\text{Ox}_1$  et oxydant associé à  $\text{Red}_2$ , alors on parle d'une réaction de **médiamutation** ou **rétrodismutation**.

Ex :  $\text{Cl}_2(\text{aq})/\text{Cl}^-(\text{aq})$  et  $\text{ClO}^-(\text{aq})/\text{Cl}_2(\text{aq})$

- $\text{Cl}_2 + 2\text{HO}^- \rightarrow \text{Cl}^- + \text{ClO}^- + \text{H}_2\text{O}$  est une réaction de dismutation,
- $\text{Cl}^- + \text{ClO}^- + 2\text{H}^+ \rightarrow \text{Cl}_2 + \text{H}_2\text{O}$  est une réaction de médiamutation.

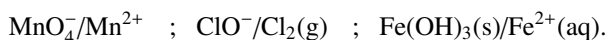
**Sauriez-vous répondre ?**

**Exercice 1 :** • Donnez les nombres d'oxydations des éléments chimiques présents dans les ions ou molécules suivants :  $\text{SO}_4^{2-}$ ,  $\text{H}_2\text{O}_2$ ,  $\text{CO}_3^{2-}$ ,  $\text{MnO}_4^-$ .

• Quels sont les nombres d'oxydation limite des éléments : manganèse, carbone, fluor et calcium ?

Données :  $Z(\text{Mn}) = 25$  ;  $Z(\text{C}) = 6$  ;  $Z(\text{F}) = 9$  ;  $Z(\text{Ca}) = 20$ .

**Exercice 2 :** Donnez l'expression des potentiels de Nernst des couples :



**Exercice 3 :** L'eau oxygénée intervient dans deux couples :

$\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  de potentiel standard  $E_1^0 = 1,77 \text{ V}$

et  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}_2$  de potentiel standard  $E_2^0 = 0,69 \text{ V}$ .

Écrivez l'équation de la réaction de dismutation de l'eau oxygénée.

Calculez la constante d'équilibre.

# 13 Les réactions acide-base

## 1. Acides et bases en solution aqueuse

### 1.1 Définitions

- Un **acide de Brönsted** est une espèce chimique susceptible de **céder** un ou plusieurs protons.

Un **monoacide** pourra céder un proton  $H^+$ . Un **polyacide** pourra céder plusieurs protons. L'ion  $H^+$  est en fait hydraté ; on peut donc utiliser comme notation soit  $H^+$ , soit  $H_3O^+$ .

Ex :

Acide	Réaction	
Acide nitrique, $HNO_3$	$HNO_3 \rightarrow H^+ + NO_3^-$	monoacide
Acide chlorhydrique, $HCl$	$HCl \rightarrow H^+ + Cl^-$	monoacide
Acide éthanöique, $CH_3COOH$	$CH_3COOH \rightarrow CH_3COO^- + H^+$	monoacide
Hydrogénocarbonate, $HCO_3^-$	$HCO_3^- \rightarrow CO_3^{2-} + H^+$	monoacide
Acide sulfurique, $H_2SO_4$	$H_2SO_4 \rightarrow SO_4^{2-} + 2H^+$	diacide
Acide phosphorique, $H_3PO_4$	$H_3PO_4 \rightarrow PO_4^{3-} + 3H^+$	triacide

- Une **base de Brönsted** est une espèce chimique susceptible de capter un ou plusieurs protons.

Une **monobase** pourra capter un proton  $H^+$ . Une **polybase** pourra capter plusieurs protons.

Ex :

Base	Réaction	
Soude, $NaOH$	$NaOH + H^+ \rightarrow Na^+ + H_2O$	monobase
Potasse, $KOH$	$KOH + H^+ \rightarrow K^+ + H_2O$	monobase
Hydrogénocarbonate, $HCO_3^-$	$HCO_3^- + H^+ \rightarrow CO_2 + H_2O$	monobase
Ammoniaque, $NH_3$	$NH_3 + H^+ = NH_4^+$	monobase

Une espèce, acide dans un couple et base dans un autre couple est un **ampholyte**, c'est une **espèce amphotère** (ex :  $HCO_3^-$ ).

### 1.2 Couple acide/base

Un couple acide/base est composé d'un acide  $AH$  et d'une base  $A^-$ . Il est associé à la demi-équation protonique :  $AH \rightarrow A^- + H^+$ .

Ex : couple  $CH_3COOH/CH_3COO^-$

demi-équation protonique :  $CH_3COOH \rightarrow CH_3COO^- + H^+$

Lors d'une réaction acido-basique, il y a échange de protons.

### 1.3 Couple acide/base de l'eau

L'eau est amphotère, elle participe à deux couples dans lesquels elle joue soit le rôle d'acide

soit le rôle de base :  $\text{H}_2\text{O}/\text{HO}^-$  et  $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$ .

Dans l'eau, il existe un équilibre appelé autoprotolyse de l'eau de constante d'équilibre  $K_e$ , soit :  $2\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_3\text{O}^+ + \text{HO}^-$  ;  $K = K_e = [\text{H}_3\text{O}^+].[\text{HO}^-] = 10^{-14}$  à  $25^\circ\text{C}$ .

## 1.4 Définition du pH

- On définit une grandeur thermodynamique appelée pH telle que :

$$\text{pH} = -\log \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C^0} \text{ avec } C^0 = 1 \text{ mol.}^{-1}.$$

- On définit également la grandeur pOH vérifiant :  $\text{pOH} = -\log \frac{[\text{HO}^-]}{C^0}$ .

- Relation entre pH et pOH :  $14 = \text{pH} + \text{pOH}$ .

En effet,  $K_e = 10^{-14} = [\text{H}_3\text{O}^+] \times [\text{HO}^-] \Rightarrow 14 = \text{pH} + \text{pOH}$ .

- Dans l'eau pure, l'autoprotolyse produit autant de  $\text{H}_3\text{O}^+$  que de  $\text{HO}^-$ , soit  $[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{HO}^-] = 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$ . La solution est dite **neutre**.

Si  $[\text{H}_3\text{O}^+] > 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$  et donc  $[\text{HO}^-] < 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$ , la solution est dite **acide**.

Si  $[\text{H}_3\text{O}^+] < 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$  et donc  $[\text{HO}^-] > 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$ , la solution est dite **basique**.

## 2. Nature des acides et des bases

### 2.1 Acide fort – Base forte

	Acide fort	Base forte
Définition	Un acide est fort si sa réaction avec l'eau est totale quelle que soit sa concentration.	Une base est forte si sa réaction avec l'eau est totale quelle que soit sa concentration.
Exemple	$\begin{array}{ccccccc} & \text{HCl} & + & \text{H}_2\text{O} & \rightarrow & \text{H}_3\text{O}^+ & + & \text{Cl}^- \\ t=0 & c_0 & & - & & 0 & & 0 \\ t & 0 & & - & & c_0 & & c_0 \end{array}$	$\text{NaOH} \xrightarrow{\text{eau}} \text{Na}^+ + \text{HO}^-$


### 2.2 Acide faible – Base faible

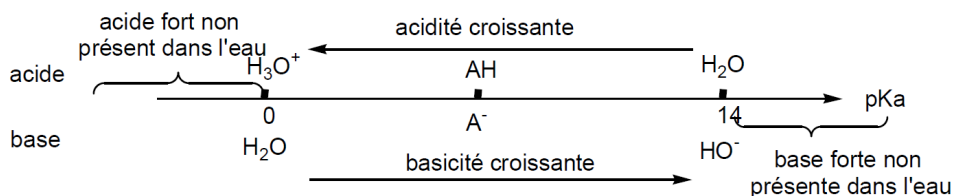
	Acide faible	Base faible
Définition	Un acide est faible si sa réaction avec l'eau n'est pas totale. Il s'agit d'un équilibre.	Une base est faible si sa réaction avec l'eau n'est pas totale. Il s'agit d'un équilibre.
Exemple	$\begin{array}{ccccccc} & \text{CH}_3\text{COOH} & + & \text{H}_2\text{O} & \rightarrow & \text{CH}_3\text{COO}^- & + & \text{H}_3\text{O}^+ \\ t=0 & C_0 & & - & & 0 & & 0 \\ t & C_0 - x & & - & & x & & x \end{array}$	$\begin{array}{ccccccc} & \text{NH}_3 & + & \text{H}_2\text{O} & \rightarrow & \text{CH}_3\text{COO}^- & + & \text{H}_3\text{O}^+ \\ t=0 & C_0 & & - & & 0 & & 0 \\ t & C_0 - x & & - & & x & & x \end{array}$


Définition de la constante d'équilibre	<p>Pour un couple conjugué d'acide et de base faibles <math>AH/A^-</math>, on définit une constante d'acidité <math>K_a</math>. Il s'agit la constante d'équilibre de la réaction de l'acide faible sur l'eau :</p> $AH + H_2O = A^- + H_3O^+$ $K_a = \frac{[A^-].[H_3O^+]}{[AH].C^0}$	<p>On définit également la constante de basicité <math>K_b</math> comme la constante d'équilibre de la réaction de la base sur l'eau :</p> $A^- + H_2O = AH + HO^-$ $K_b = \frac{[AH].[HO^-]}{[A^-].C^0}$
--	--	---

On a  $K_e = K_a \cdot K_b$ .

En posant  $pK_a = -\log K_a$  et  $pK_b = -\log K_b$ , on a aussi  $pK_e = pK_a + pK_b$ .

 Plus un acide (respectivement une base) a un  $K_a$  (respectivement  $K_b$ ) faible soit  $pK_a$  (respectivement  $pK_b$ ) élevé, plus cet acide ((respectivement base) est faible.



 On ne peut associer de constante d'acidité (ou de basicité) à des acides (ou à des bases) fort(e)s.

Exemples d'acide fort/faible et de base forte/faible :

Acide	Nature	Base	Nature
HNO <sub>3</sub>	acide fort	NaOH	base forte
HCl	acide fort	KOH	base forte
CH <sub>3</sub> COOH	acide faible	HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	base faible
HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	acide faible		
H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	première acidité forte, deuxième acidité faible		
H <sub>3</sub> PO <sub>4</sub>	trois acidités faibles		

### 3. Diagrammes

#### 3.1 Établissement d'un diagramme de prédominance

- Pour les couples acide/base, établir un diagramme de prédominance, c'est délimiter le domaine pour lequel l'acide (respectivement la base) prédomine devant la base (respectivement l'acide).

Une espèce prédomine si sa concentration est au moins 10 fois supérieure à celles des autres espèces.

En dehors de son domaine, l'espèce existe mais elle est minoritaire.

- Soit le couple  $AH/A^-$  :  $AH + H_2O \rightarrow A^- + H_3O^+$  ;  $K_a = \frac{[A^-] \cdot [H_3O^+]}{[AH] \cdot C^0}$

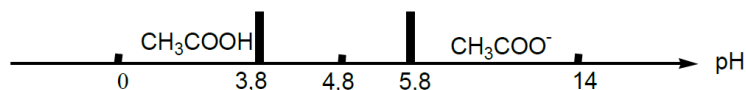
– Si  $[A^-] = [AH]$  alors  $K_a = \frac{[H_3O^+]}{C^0}$  et  $pH = pK_a$ .

– On considère que  $AH$  prédomine devant  $A^-$  si :  $[A^-] \times 10 \leq [AH]$  soit  $pH < pK_a - 1$  (à gauche du diagramme).

– On considère que  $A^-$  prédomine devant  $AH$  si  $[AH] \times 10 \leq [A^-]$  soit  $pH > pK_a + 1$  (à droite du diagramme) :



Ex :

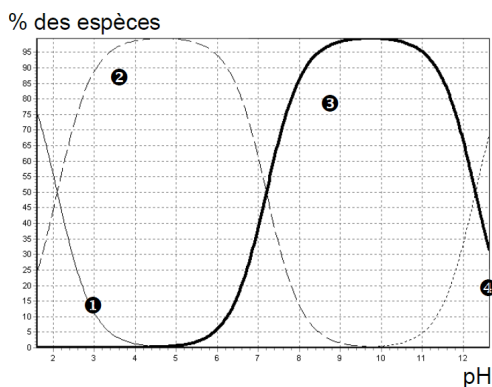


### 3.2 Courbes de distribution

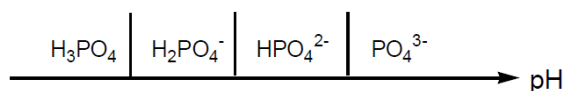
Les courbes de distributions représentent le pourcentage d'une espèce en fonction du pH.

- Dans un premier temps, il faut attribuer les différentes courbes de distribution aux espèces chimiques.
- Si deux espèces acide et base conjugués ont des pourcentages égaux alors le pH lu en abscisse est égal au  $pK_a$  du couple.

Ex : courbe de distribution de l'acide phosphorique  $H_3PO_4$



- Allure du diagramme de prédominance



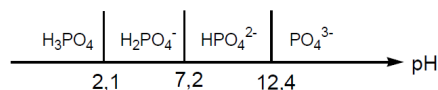
On peut alors attribuer les courbes : ① =  $H_3PO_4$ , ② =  $H_2PO_4^-$ , ③ =  $HPO_4^{2-}$ , ④ =  $PO_4^{3-}$

À l'intersection de ❶ et ❷ on a  $\text{pH} = 2,1 \Rightarrow \text{pK}_{a1} = 2,1$

À l'intersection de ❷ et ❸ on a  $\text{pH} = 7,2 \Rightarrow \text{pK}_{a2} = 7,2$

À l'intersection de ❸ et ❹ on a  $\text{pH} = 12,4 \Rightarrow \text{pK}_{a3} = 12,4$ .

Soit :



## 4. Composition chimique d'un système à l'état final

### 4.1 Transformation totale

Lorsque l'on dissout un acide fort ou une base forte dans l'eau, la transformation est totale. L'avancement volumique  $x$  est donc l'**avancement maximal**.

Pour connaître la composition du système à l'état final, il suffit de dresser un tableau d'avancement.

Ex :

	Acide fort HCl	Base forte NaOH
Dissolution	Dissolution d'acide chlorhydrique pour une concentration apportée à $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ .	Dissolution de soude pour une concentration apportée à $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ .
Exemple	$\begin{array}{ccccccc} & \text{HCl} & + & \text{H}_2\text{O} & \rightarrow & \text{H}_3\text{O}^+ & + & \text{Cl}^- \\ \text{t=0} & \text{C} & & - & & 0 & & 0 \\ \text{t_f} & 0 & & - & & \text{C} & & \text{C} \end{array}$	$\begin{array}{ccccccc} & \text{NaOH} & & \rightarrow & & \text{Na}^+ & + & \text{HO}^- \\ \text{t=0} & \text{C} & & & & 0 & & 0 \\ \text{t} & 0 & & & & \text{C} & & \text{C} \end{array}$
Détermination du pH ou pOH	$\text{pH} = -\log \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C^0} = -\log \frac{C}{C^0}$	$\text{pOH} = -\log \frac{[\text{HO}^-]}{C^0} = -\log \frac{C}{C^0}$

### 4.2 Équilibre chimique

Lorsque l'on dissout un acide faible ou une base faible dans l'eau, la transformation correspond à un équilibre chimique. Grâce à la constante d'équilibre de la réaction, on peut déterminer l'avancement à l'équilibre  $x_e$ .

Ex :

	Acide faible CH <sub>3</sub> COOH (pK <sub>a</sub> = 4, 8)	Base faible NH <sub>3</sub> (pK <sub>a</sub> = 9, 2 $\implies$ pK <sub>b</sub> = 4, 8)																				
Dissolution	Dissolution d'acide éthanóïque pour une concentration apportée C = 10 <sup>-2</sup> mol.L <sup>-1</sup>	Dissolution d'ammoniaque pour une concentration apportée C = 10 <sup>-2</sup> mol.L <sup>-1</sup>																				
Exemple	<div>CH<sub>3</sub>COOH + H<sub>2</sub>O <math>\rightarrow</math> H<sub>3</sub>O<sup>+</sup> + CH<sub>3</sub>COO<sup>-</sup></div> <table><tr><td>t=0</td><td>C</td><td>-</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>t<sub>f</sub></td><td>C - x<sub>e</sub></td><td>-</td><td>x<sub>e</sub></td><td>x<sub>e</sub></td></tr></table>	t=0	C	-	0	0	t <sub>f</sub>	C - x <sub>e</sub>	-	x <sub>e</sub>	x <sub>e</sub>	<div>NH<sub>3</sub> + H<sub>2</sub>O <math>\rightarrow</math> HO<sup>-</sup> + NH<sub>4</sub><sup>+</sup></div> <table><tr><td>t=0</td><td>C</td><td>-</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>t<sub>f</sub></td><td>C - x<sub>e</sub></td><td>-</td><td>x<sub>e</sub></td><td>x<sub>e</sub></td></tr></table>	t=0	C	-	0	0	t <sub>f</sub>	C - x <sub>e</sub>	-	x <sub>e</sub>	x <sub>e</sub>
t=0	C	-	0	0																		
t <sub>f</sub>	C - x <sub>e</sub>	-	x <sub>e</sub>	x <sub>e</sub>																		
t=0	C	-	0	0																		
t <sub>f</sub>	C - x <sub>e</sub>	-	x <sub>e</sub>	x <sub>e</sub>																		



Expression de la constante d'équilibre	$K_a = \frac{[A^-].[H_3O^+]}{[AH].C^0}$ $= \frac{x_e^2}{(C - x_e)C^0} = 10^{-4,8}$	$K_b = \frac{[AH].[HO^-]}{[A^-].C^0}$ $= \frac{x_e^2}{(C - x_e)C^0} = 10^{-4,8}$
Hypothèses	<p>On peut résoudre l'équation du second degré et trouver <math>x_e</math></p> <p>On peut faire l'hypothèse que la réaction est défavorisée :</p> $C - x_e \approx C \Rightarrow K_a \approx \frac{x_e^2}{C C^0}$ $\Rightarrow x_e = \sqrt{K_a C C^0}$	<p>On peut résoudre l'équation du second degré et trouver <math>x_e</math></p> <p>On peut faire l'hypothèse que la réaction est défavorisée :</p> $C - x_e \approx C \Rightarrow K_b \approx \frac{x_e^2}{C C^0}$ $\Rightarrow x_e = \sqrt{K_b C C^0}$
Détermination du pH ou pOH	$pH = -\log \frac{[H_3O^+]}{C^0} = -\log \frac{x_e}{C^0}$ $= \frac{1}{2} \left( pK_a - \log \frac{C}{C^0} \right)$	$pOH = -\log \frac{[HO^-]}{C^0} = -\log \frac{x_e}{C^0}$ $= \frac{1}{2} \left( pK_b - \log \frac{C}{C^0} \right)$
Vérification de l'hypothèse	<p>On calcule <math>\alpha</math>, le coefficient de dissociation de l'acide faible :</p> $\alpha = \frac{x_e}{C} = \frac{[H_3O^+]}{C} = \frac{10^{-pH}}{C}$ <p>Si <math>\alpha &lt; 10\%</math>, l'hypothèse est vérifiée.</p>	<p>On calcule <math>\beta</math>, le coefficient de dissociation de la base faible :</p> $\beta = \frac{x_e}{C} = \frac{[HO^-]}{C} = \frac{10^{-pOH}}{C}$ <p>Si <math>\beta &lt; 10\%</math>, l'hypothèse est vérifiée.</p>

## 5. Solution tampon

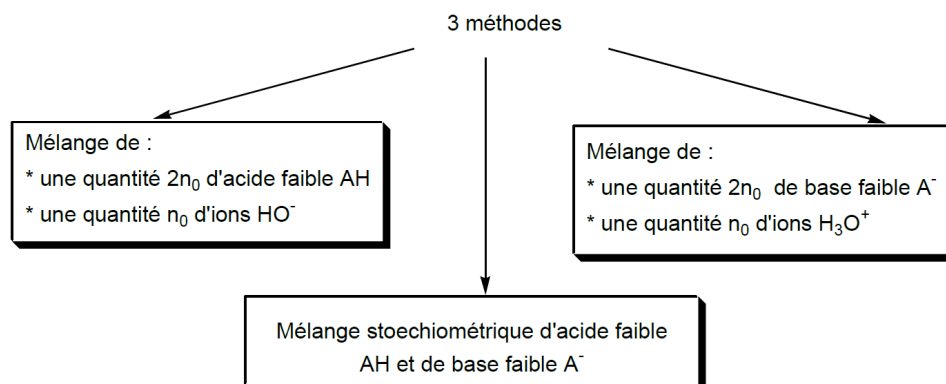
### 5.1 Qu'est-ce qu'une solution tampon ?

*Une solution tampon est une solution dont le pH varie peu par ajout modéré d'une base forte, d'un acide fort ou par dilution modérée.*

Une solution tampon est constituée d'un mélange d'acide faible et de sa base conjuguée dans des proportions voisines.

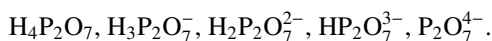
La solution tampon la plus efficace correspond à celle où l'acide et la base conjuguée sont en proportions égales ( $pH = pK_a$ ). Plus la solution tampon est concentrée, meilleure est son efficacité.

## 5.2 Comment fabriquer une solution tampon de $\text{pH} = \text{pK}_a$ ?

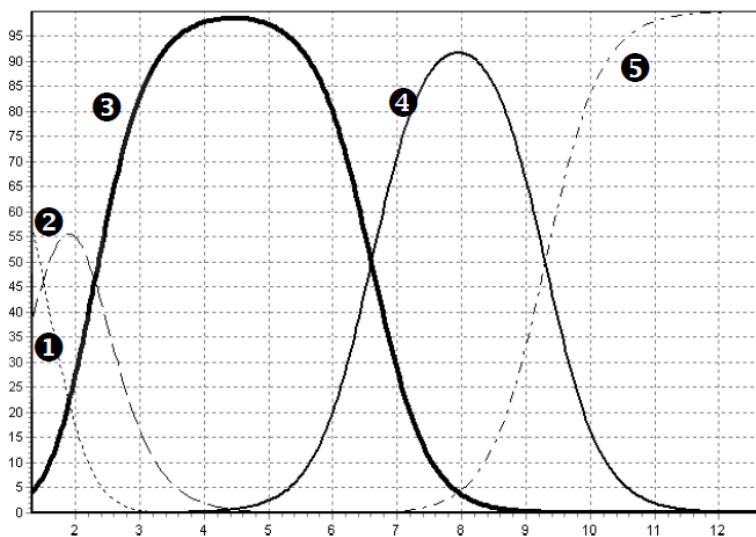


### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** On donne les courbes de distribution des espèces :



Attribuez les courbes et déterminez les  $\text{pK}_a$ . Déduisez le diagramme de prédominance.



**Exercice 2 :** On dispose d'une solution d'acide éthanóïque ( $\text{pK}_a = 4,8$ ) à  $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ .

Déterminez la composition finale du système. Déduisez-en le  $\text{pH}$  de la solution.

**Exercice 3 :** Comment préparer 1 L d'une solution tampon  $\text{pH} = 9,2$

à  $C = 1,0 \times 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$  à partir de cristaux de soude et une solution d'ion ammonium  $\text{NH}_4^+$  à  $1,0 \text{ mol.L}^{-1}$  ?

Données :  $\text{pK}_a(\text{NH}_4^+/\text{NH}_3) = 9,2$  ;  $M(\text{soude}) = 40,0 \text{ g.mol}^{-1}$ .

## 1. Qu'est-ce qu'un complexe ?

- Les complexes sont des édifices polyatomiques dans lesquels un atome métallique possédant au moins une lacune électronique est lié à des molécules, des anions possédant des doublets non liants appelés ligands.
- Les complexes peuvent être neutres, chargés positivement ou négativement.
- Les complexes sont solubles en solution aqueuse.

Ex :  $[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4]^{2+}$  : tétraammine cuivre (II).

## 2. Réaction de formation et dissociation des complexes

### 2.1 Réaction de formation, dissociation des complexes

Il convient de distinguer les réactions de **formation** et de **dissociation** des complexes  $\text{ML}_n$  (M : atome métallique, L : ligand).

On distingue les réactions de formation **globale** où plusieurs équivalents de ligands interviennent, des réactions de formation **successives** où un seul ligand est mis en jeu. Cette distinction peut se faire également pour les réactions de dissociation des complexes.

#### Réaction de formation du complexe $\text{M}_n$

Équation de réaction de formation successive (échange d'un équivalent de ligand)	(1) : $M + L \rightarrow ML$	$K_{f1} = \frac{[ML]}{[M].[L]}$
	(2) : $ML + L \rightarrow ML_2$	$K_{f2} = \frac{[ML_2]}{[ML].[L]}$
	⋮	
	(n) : $ML_{n-1} + L \rightarrow ML_n$	$K_{fn} = \frac{[ML_n]}{[M_{n-1}].[L]}$
Équation de réaction de formation globale	(GF) : $M + nL \rightarrow ML_n$	$\beta_n = \frac{[ML_n]}{[M].[L]^n}$

#### Réaction de dissociation du complexe $\text{M}_n$

Équation de réaction de dissociation successive (échange d'un équivalent de ligand)	(n') : $ML_n \rightarrow ML_{n-1} + L$	$K_{dn} = \frac{[ML_{n-1}].[L]}{[ML_n]}$
	(n' - 1) : $ML_{n-1} \rightarrow ML_{n-2} + L$	$K_{dn-1} = \frac{[ML_{n-1}].[L]}{[ML_{n-1}]}$
	⋮	
	(2') : $ML_2 \rightarrow ML + L$	$K_{d2} = \frac{[ML].[L]}{[ML_2]}$
	(1') : $ML \rightarrow M + L$	$K_{d1} = \frac{[M].[L]}{[ML]}$
Équation de réaction de dissociation globale	(GD) : $ML_n \rightarrow M + nL$	$K_D = \frac{[M].[L]^n}{[ML_n]}$

## 2.2 Relation entre les constantes d'équilibre

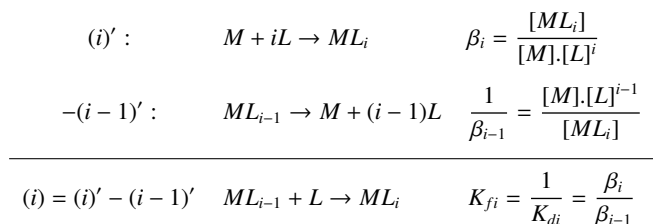
Si une équation de réaction (c) est une combinaison linéaire des équations de réaction (a) et (b) par  $(c) = \alpha(a) + \beta(b)$  alors on peut exprimer la constante d'équilibre de la réaction (c) par :  $K_c = K_a^\alpha \times K_b^\beta$  où  $K_a$  et  $K_b$  sont les constantes d'équilibre des réactions (a) et (b).

- (GF) est la somme des n équations de formation successive donc :  $\beta_n = \prod_{i=1}^n K_{fi}$

- (GD) est la somme des n équations de dissociation successive donc :  $K_D = \prod_i^n K_{di}$

- On a :  $\beta_1 = K_{f1} = \frac{1}{K_{d1}}$  et  $K_{fi} = \frac{1}{K_{di}}$

- Pour  $i > 1$  :



- On définit également  $pKd_n$  comme :  $pKd_n = -\log K_{dn}$ .

- Bilan

$$\beta_1 = K_{f1} = \frac{1}{K_{d1}} \quad ; \quad \beta_n = \prod_{i=1}^n K_{fi} \quad ; \quad K_D = \prod_i^n K_{di} \quad ; \quad K_{fi} = \frac{1}{K_{di}}$$

$$pKd_n = -\log K_{dn}$$

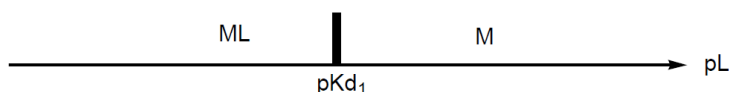
## 3. Diagramme de prédominance

### 3.1 Complexe monocoordiné ML



- Si  $[M] = [ML]$  alors  $K_{f1} = \frac{1}{K_{d1}} = \frac{1}{[L]} \Rightarrow pL = -\log[L] = pKd_1$
- Si  $[M] > [ML]$  alors  $\frac{K_{d1}}{[L]} > 1 \Rightarrow pL > pKd_1$  (M stable à droite du diagramme).
- Si  $[M] < [ML]$  alors  $\frac{K_{d1}}{[L]} < 1 \Rightarrow pL < pKd_1$  (ML stable à gauche du diagramme).

On obtient donc le diagramme de prédominance :



RQ : Si  $pL \rightarrow \infty$ ,  $[L] \rightarrow 0$ , s'il n'y a pas de ligand, M est prédominant.

### 3.2 Utilisation du diagramme de prédominance

*Si deux espèces présentent des domaines de prédominance dans des zones de pL disjointes alors ses espèces sont incompatibles et réagissent entre elles.*

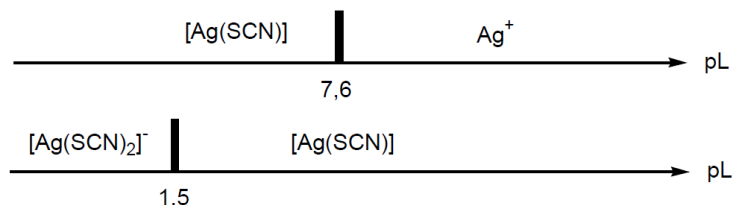
*Si deux espèces présentent des domaines de prédominance présentant des zones communes de pL alors ses espèces ne réagissent pas entre elles.*

#### • Complexes successifs stables

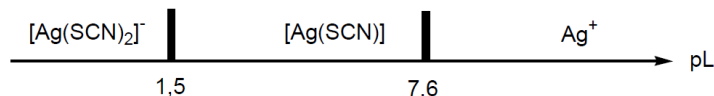
L'objectif est d'établir le diagramme de prédominance de  $Ag^+$ ,  $[Ag(SCN)]$  et  $[Ag(SCN)]^{2-}$

Données :  $pKd_1 = 7,6$  et  $pKd_2 = 1,5$ .

On peut établir (cf. 3.1.) :



On en déduit que le complexe  $[Ag(SCN)]$  présente des domaines de prédominance à partie commune, ce complexe est stable. Le diagramme de prédominance est :

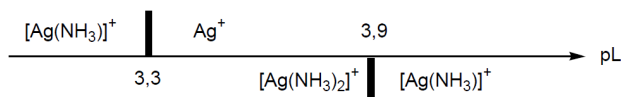


#### • Complexes successifs instables

L'objectif est d'établir le diagramme de prédominance de  $Ag^+$ ,  $[Ag(NH_3)]^+$  et  $[Ag(NH_3)_2]^+$

Données :  $pKd_1 = 3,3$  et  $pKd_2 = 3,9$

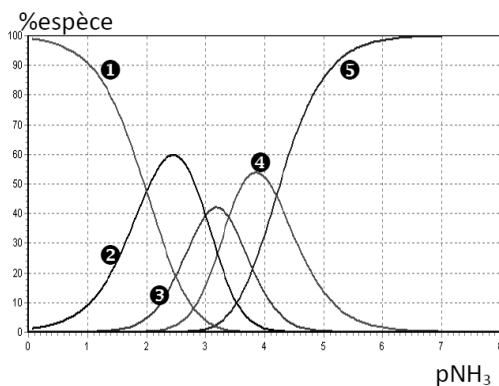
On peut obtenir :



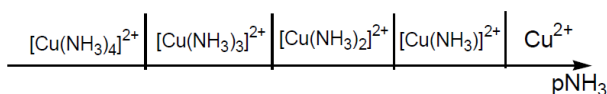
On en déduit que le complexe  $[Ag(NH_3)]^+$  présente des domaines de prédominance disjointes, il n'est donc pas stable. Seules les espèces  $Ag^+$  et  $[Ag(NH_3)_2]^+$  sont à considérer.

## 4. Courbes de distribution

Comme pour les réactions acido-basiques, on peut également définir les courbes de distribution représentant le pourcentage d'une espèce en fonction du pL. Ces courbes permettent également d'obtenir les pKd et d'accéder aux domaines de prédominance des espèces intervenant dans les réactions de complexation.



- Allure du diagramme de prédominance



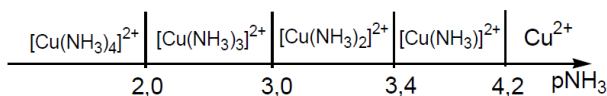
On peut alors attribuer les courbes : ❶ = %  $[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4]^{2+}$  ❷ = %  $[\text{Cu}(\text{NH}_3)_3]^{2+}$   
 ❸ = %  $[\text{Cu}(\text{NH}_3)_2]^{2+}$  ❹ = %  $[\text{Cu}^{2+}]$ .

À l'intersection de ❶ et ❷ on a  $\text{pL} = 2,0 \Rightarrow \text{pKd}_1 = 2,0$

À l'intersection de ❷ et ❸ on a  $\text{pL} = 3,0 \Rightarrow \text{pKd}_2 = 3,0$

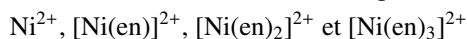
À l'intersection de ❸ et ❹ on a  $\text{pL} = 3,4 \Rightarrow \text{pKd}_3 = 3,4$ .

À l'intersection de ❹ et ❺ on a  $\text{pL} = 4,2 \Rightarrow \text{pKd}_4 = 4,2$ . Soit :



## Sauriez-vous répondre ?

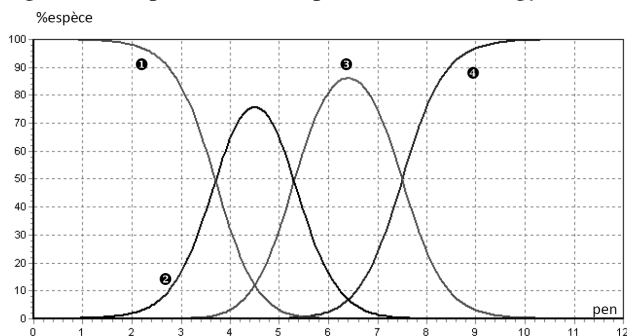
**Exercice 1 :** On donne les courbes de distribution des espèces :



où en représente le ligand éthylènediamine.

Attribuez les courbes et déterminez les  $\text{pKd}$  successifs.

Déduisez-en le diagramme de prédominance, puis la valeur de  $\log \beta_3$ .



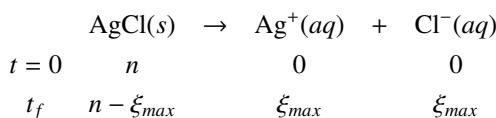
# 15 Les réactions de dissolution

## 1. Définition de la solubilité

À une température donnée, la solubilité  $s$  est la quantité maximale de solide qui se dissout dans 1 L d'eau pure :  $s = \frac{\xi_{\max}}{V}$  . Unité :  $\text{mol.L}^{-1}$

On peut également définir cette grandeur à partir d'une espèce gazeuse.

Ex : bilan matière en quantité de matière de la réaction de dissolution du solide (appelé précipité)



$$\Rightarrow s = \frac{\xi_{\max}}{V} = [\text{Ag}^+] = [\text{Cl}^-].$$

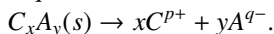
## 2. Produit de solubilité

Le produit de solubilité, noté  $K_s$ , est la constante d'équilibre à la température  $T$  de la réaction de dissolution de l'espèce solide.

- Si le solide est un cristal moléculaire  $A : A(s) \rightarrow A(aq)$ , on a  $K_s = \frac{[A]_e}{C^0}$  avec  $C^0 = 1 \text{ mol.L}^{-1}$  et  $[A]_e$  la concentration de  $A$  à l'équilibre de dissolution.
- Si le solide est un cristal ionique  $C_xA_y : C_xA_y(s) = xC^{p+}(aq) + yA^{q-}(aq)$ , on a  $K_s = \frac{[C^{p+}]_e^x [A^{q-}]_e^y}{(C^0)^{x+y}}$  avec  $[C^{p+}]_e^x$  et  $[A^{q-}]_e^y$  les concentrations de  $C$  et  $A$  à l'équilibre de dissolution.
- On définit le  $pK_s$  comme :  $pK_s = -\log K_s$ .
- $K_s$  se rapporte à la réaction de dissolution du précipité.

## 3. Conditions de précipitation

Soit un cristal ionique  $C_xA_y(s)$ . L'équation de la réaction de dissolution est :



- Si les trois espèces :  $C_xA_y(s)$ ,  $C^{p+}$  et  $A^{q-}$  sont en équilibre, alors

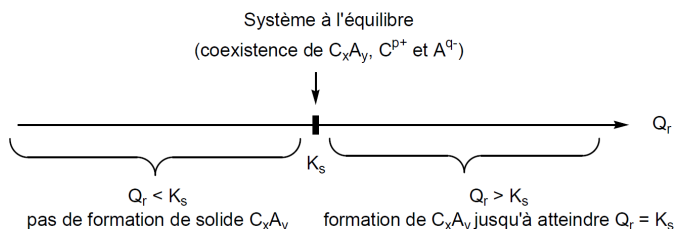
$$K_s = \frac{[C^{p+}]_e^x [A^{q-}]_e^y}{(C^0)^{x+y}}$$

- Supposons le système hors équilibre avec une solution non saturée (absence de solide). L'étude du quotient réactionnel permet de décrire l'évolution du système :

$$Q_r = \frac{[C^{p+}]_{he}^x [A^{q-}]_{he}^y}{(C^0)^{x+y}} \text{ avec } [C^{p+}]_{he} \text{ et } [A^{q-}]_{he} \text{ les concentrations de } C \text{ et } A \text{ hors équilibre.}$$

Si  $Q_r < K_s$ , il ne se formera pas de solide et l'état d'équilibre ne peut pas être atteint.

Si  $Q_r > K_s$ , le quotient de réaction évolue en diminuant jusqu'à atteindre  $K_s$ , on atteindra au final un état d'équilibre.



*Ces conditions sont identiques si on s'intéresse à la solubilité d'une espèce gazeuse.*

## 4. Diagramme d'existence d'un précipité

Étude sur un exemple, le chlorure d'argent  $\text{AgCl(s)} : \text{AgCl(s)} \rightarrow \text{Ag}^+ + \text{Cl}^-$

Solution d'ions chlorure à la concentration de $C_{\text{tracé}}$	Solution d'ions argent à la concentration de $C_{\text{tracé}}$
<p>Pour quelle valeur de <math>p_{\text{Ag}}</math> le précipité existe-t-il ?</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>Q_r \geq K_s</math>, le précipité se forme et on a : <math>p_{\text{Ag}} \leq pK_s + \log(C_{\text{tracé}})</math></li> <li>• Si <math>Q_r &lt; K_s</math>, le précipité ne se forme pas, seuls les ions sont présents.</li> </ul>	<p>Pour quelle valeur de <math>p_{\text{Cl}}</math> le précipité existe-t-il ?</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>Q_r \geq K_s</math>, le précipité se forme et on a : <math>p_{\text{Cl}} \leq pK_s + \log(C_{\text{tracé}})</math></li> <li>• Si <math>Q_r &lt; K_s</math>, le précipité ne se forme pas, seuls les ions sont présents.</li> </ul>
<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: space-between;"> <div style="text-align: center;"> <p>Existence de <math>\text{AgCl(s)}</math></p> <p><math>pK_s + \log c_{\text{tracé}}</math></p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Absence de <math>\text{AgCl(s)}</math> Présence d'ions <math>\text{Ag}^+</math>, <math>\text{Cl}^-</math></p> <p><math>p_{\text{Ag}}</math></p> </div> </div>	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: space-between;"> <div style="text-align: center;"> <p>Existence de <math>\text{AgCl(s)}</math></p> <p><math>pK_s + \log c_{\text{tracé}}</math></p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Absence de <math>\text{AgCl(s)}</math> Présence d'ions <math>\text{Ag}^+</math>, <math>\text{Cl}^-</math></p> <p><math>p_{\text{Cl}}</math></p> </div> </div>

## 5. Calcul de solubilité dans l'eau pure

❶ On exprime les concentrations des ions à l'équilibre en fonction de la solubilité.

❷ En reportant dans l'expression du  $K_s$ , on calcule la solubilité.

Ex :  $K_s(\text{AgCl}) = 2 \times 10^{-10}$  ;  $K'_s(\text{Ag}_2\text{CrO}_4) = 10^{-12}$



AgCl				Ag <sub>2</sub> CrO <sub>4</sub>			
$\text{AgCl}(s) \rightarrow \text{Ag}^+ + \text{Cl}^-$				$\text{Ag}_2\text{CrO}_4(s) \rightarrow \text{Ag}^+ + 2\text{CrO}_4^{2-}$			
$t = 0$	$n$	0	0	$t = 0$	$n$	0	0
$t_f$	$n - \xi_e$	$\xi_e$	$\xi_e$	$t_f$	$n - \xi_e$	$\xi_e$	$2\xi_e$
$s = \frac{\xi_e}{V} = [\text{Ag}^+]_e = [\text{Cl}^-]_e$				$s = \frac{\xi_e}{V} = [\text{Ag}^+]_e = \frac{1}{2}[\text{CrO}_4^{2-}]_e$			
$K_s = \frac{[\text{Ag}^+]_e [\text{Cl}^-]_e}{(C^0)^2} = \frac{s^2}{(C^0)^2}$				$K'_s = \frac{[\text{Ag}^+]_e [\text{CrO}_4^{2-}]_e^2}{(C^0)^3} = \frac{4s^3}{(C^0)^3}$			
$\Rightarrow s = C^0 \sqrt{K_s} \Rightarrow$				$\Rightarrow s = C^0 \sqrt[3]{\frac{K'_s}{4}} \Rightarrow$			
$s(\text{AgCl, eau pure}) = 1,41 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$				$s(\text{Ag}_2\text{CrO}_4, \text{eau pure}) = 6,30 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$			

## 6. Facteurs influençant la solubilité

### 6.1 Influence de la température

La solubilité d'un solide augmente généralement avec la température.

La solubilité d'une espèce gazeuse diminue généralement avec la température.

### 6.2 Effet d'ions communs

- Il y a effet d'ions communs :

– si on dissout  $C_xA_y(s)$  dans une solution d'ions  $C^{p+}$  ou  $A^{q-}$  ;

– si on ajoute des ions  $C^{p+}$  ou  $A^{q-}$  à une solution obtenue par dissolution de  $C_xA_y(s)$ .

- Exemple : étude chlorure d'argent  $\text{AgCl}(s) \rightarrow \text{Ag}^+ + \text{Cl}^-$

Si l'on ajoute au système initialement à l'équilibre ( $[\text{Ag}^+]_e$  et  $[\text{Cl}^-]_e$ ) des ions  $\text{Cl}^-$ .

La concentration des ions chlorure augmente :  $[\text{Cl}^-]_{he} > [\text{Cl}^-]_e$

$$\Rightarrow Q_r = \frac{[\text{Ag}^+]_e [\text{Cl}^-]_{he}}{(C^0)^2} > \frac{[\text{Ag}^+]_e [\text{Cl}^-]_e}{(C^0)^2} = K_s$$

Le système évolue de façon à diminuer  $Q_r$  et à produire du  $\text{AgCl}(s)$ . Il y a donc une plus quantité de  $\text{AgCl}(s)$  qui s'est dissous, la solubilité a diminué.

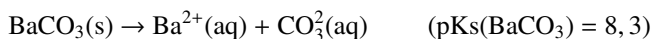


*Par effet d'ions communs, la solubilité d'un solide diminue.*

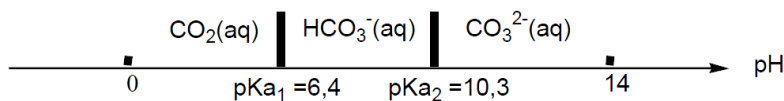
### 6.3 Influence du pH sur la solubilité

*Si une espèce chimique issue de la dissolution d'un solide présente des propriétés acido-basiques alors le pH a une influence sur la solubilité de ce solide.*

- Étude du carbonate de baryum  $\text{BaCO}_3(s)$



Les ions carbonates ont des propriétés basiques. On peut tracer le diagramme de prédominance des espèces carbonatées :



Comment évolue la solubilité si le pH diminue ?

- **Approche qualitative**

Si le pH diminue, les ions carbonate  $\text{CO}_3^{2-}$  réagissent pour donner les ions hydrogénocarbonate  $\text{HCO}_3^-$  ou le dioxyde de carbone  $\text{CO}_2$  entraînant la diminution du quotient réactionnel  $Q_r$ .

$Q_r$  est alors inférieur à  $K_s$ . Il y a donc évolution vers la dissolution du solide et donc augmentation de la solubilité.

- **Approche quantitative et expression de la solubilité en fonction du pH**

La solubilité s'exprime par :  $s = [\text{Ba}^{2+}] = [\text{CO}_3^{2-}] + [\text{HCO}_3^-] + [\text{CO}_2]$

**Pour pH > 10,3**

On suppose que  $\text{CO}_3^{2-}$  est l'espèce prédominante, donc

$$s = [\text{Ba}^{2+}] \approx [\text{CO}_3^{2-}] \Rightarrow K_s = \frac{[\text{Ba}^{2+}]_e [\text{CO}_3^{2-}]_e}{(C^0)^2} = \frac{s^2}{(C^0)^2} \Rightarrow s = C^0 \sqrt{K_s}$$

**Pour 6,4 < pH < 10,3**

L'espèce dominante est  $\text{HCO}_3^-$ , donc  $s = [\text{Ba}^{2+}] \approx [\text{HCO}_3^-]$

$$K_{a2} = \frac{[\text{CO}_3^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HCO}_3^-] C^0} \Rightarrow [\text{CO}_3^{2-}] = \frac{K_{a2} \cdot [\text{HCO}_3^-] C^0}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_{a2} \cdot s \cdot C^0}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$$

$$\text{soit } K_s = \frac{[\text{Ba}^{2+}]_e \cdot [\text{CO}_3^{2-}]_e}{(C^0)^2} = \frac{s^2 \cdot K_{a2}}{[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot C^0} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{K_s \cdot [\text{H}_3\text{O}^+] \cdot C^0}{K_{a2}}}$$

**Pour pH < 6,4**

L'espèce dominante est  $\text{CO}_2$ , donc  $s = [\text{Ba}^{2+}] \approx [\text{CO}_2]$

$$K_{a1} \cdot K_{a2} = \frac{[\text{HCO}_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CO}_2] C^0} \times \frac{[\text{CO}_3^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HCO}_3^-] C^0} = \frac{[\text{CO}_3^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]^2}{[\text{CO}_2] (C^0)^2}$$

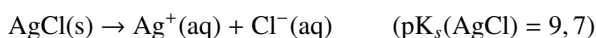
$$\text{soit } K_s = \frac{[\text{Ba}^{2+}]_e \cdot [\text{CO}_3^{2-}]_e}{(C^0)^2} = \frac{s^2 \cdot K_{a1} \cdot K_{a2}}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{K_s \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]^2}{K_{a1} K_{a2}}}$$

## 6.4 Influence de la complexation sur la solubilité

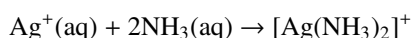


*Si une espèce chimique issue de la dissolution d'un solide peut intervenir dans un équilibre de complexation alors la réaction de complexation influence la solubilité de ce solide.*

- **Étude du chlorure d'argent  $\text{AgCl(s)}$**



Les ions argent peuvent subir la réaction de complexation avec l'ammoniaque :



• **Approche qualitative**

En présence d'ammoniaque, les ions argent  $\text{Ag}^+$  réagissent entraînant la diminution du quotient réactionnel  $Q_r$ .

$Q_r$  est alors inférieur à  $K_s$ . Il y a donc évolution vers la dissolution du solide et donc augmentation de la solubilité.



*La participation d'une espèce issue de la dissolution du solide à une réaction de complexation augmente la solubilité du solide.*

## Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** Calculez la solubilité dans l'eau pure du phosphate d'argent  $\text{Ag}_3\text{PO}_4$ .

Comment évolue cette solubilité si le solide est dissous dans 1 L d'une solution d'ions argent  $\text{Ag}^+$  à  $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$  ?

Calculez la solubilité de  $\text{Ag}_3\text{PO}_4$  dans cette solution.

Donnée :  $\text{pKs}(\text{Ag}_3\text{PO}_4) = 19,9$


**Exercice 2 :** On ajoute à 1 L d'eau, n moles de cristal d' $\text{AgCl}$ . A-t-on une solution saturée si : **a)**  $n = 10^{-4} \text{ mol}$  ; **b)**  $n = 10^{-6} \text{ mole}$

Donnée :  $\text{Ks}(\text{AgCl}) = 2 \times 10^{-10}$

Les diagrammes E-pH ou E-pL permettent de prévoir et d'interpréter des transformations chimiques ayant lieu en phase aqueuse.

## 1. Qu'est-ce qu'un diagramme E-pH ?

Suivant les conditions (ex pH), les éléments chimiques peuvent exister sous divers nombre d'oxydation.

 Le diagramme potentiel pH d'un élément chimique, noté E-pH, est un graphe à deux dimensions représentant le potentiel en fonction du pH ( $E = f(\text{pH})$ ) et illustrant les domaines de prédominance des espèces solubles ou d'existence des espèces insolubles aux différents degrés d'oxydation de l'élément considéré.

## 2. Comment déterminer les équations des frontières d'un diagramme E-pH ?

### 2.1 Nécessité d'une convention

Afin de déterminer les frontières d'un diagramme E-pH, il convient de respecter des conventions. Différentes conventions sont possibles. Il faut respecter la convention indiquée en cours.

*Convention utilisée généralement*

- **Pour une frontière entre deux espèces dissoutes**

- la concentration totale atomique en solution de l'élément considéré est égale à  $C_{\text{tracé}}$ ,
- les concentrations atomiques en élément considéré sont égales (équipartition de l'élément).

- **Pour une frontière entre une espèce dissoute et une phase solide**

À la limite d'existence de la phase solide, la concentration atomique en solution de l'élément considéré est égale à  $C_{\text{tracé}}$ .

- **Pour une frontière entre une espèce dissoute et une phase gazeuse**

La concentration atomique en solution de l'élément considéré en solution est égale à  $C_{\text{tracé}}$  et la pression de l'espèce gazeuse est égale à une pression fixée conventionnellement, notée  $P_{\text{tracé}}$  (souvent fixée à  $P^0 = 1 \text{ bar}$ ).

*Exemple*

- Frontière entre une espèce soluble et une espèce gazeuse :  $\text{NO}_2^-(\text{aq})/\text{NO}(\text{g})$  :

$[\text{NO}_2] = C_{\text{tracé}}$  et  $P_{\text{NO}} = P_{\text{tracé}}$ .

- Frontière entre deux espèces solubles  $\text{I}_2(\text{aq})$  et  $\text{I}^-(\text{aq})$

- concentration totale atomique :  $C_{\text{tracé}} = 2[\text{I}_2] + [\text{I}^-]$
- égalité des concentrations atomiques :  $[\text{n.o}(\text{O})] = [\text{n.o.}(-\text{I})]$ .

Or  $[\text{n.o.}(-\text{I})] = [\text{I}]$  et  $[\text{n.o}(\text{O})] = 2[\text{I}_2] \Rightarrow 2[\text{I}_2] = [\text{I}^-]$

$$\Rightarrow [\text{I}_2] = \frac{1}{4}C_{\text{tracé}} \quad \text{et} \quad [\text{I}^-] = \frac{1}{2}C_{\text{tracé}}.$$

## 2.2 Construire un diagramme E-pH simplifié

Avant de faire l'étude d'un diagramme E-pH, il convient de construire un diagramme E-pH simplifié de l'élément étudié. Il permet de repérer les domaines de stabilité des espèces chimiques.

Étude sur un exemple : **le diagramme E-pH du fer**

Données : les espèces à considérer sont Fe(s), Fe<sup>2+</sup>, Fe<sup>3+</sup>, Fe(OH)<sub>2</sub>(s) et Fe(OH)<sub>3</sub>(s).

Données à 25°C :

Fe<sup>3+</sup>/Fe<sup>2+</sup> :  $E_1^0 = 0,77 \text{ V}$  ; Fe<sup>2+</sup>/Fe :  $E_2^0 = -0,44 \text{ V}$

Fe(OH)<sub>3</sub>(s) : pK<sub>s1</sub> = 38,0 ; Fe(OH)<sub>2</sub>(s) : pK<sub>s2</sub> = 15,1

Conventions de tracé :  $C_{\text{tracé}} = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$

Méthode	Exemple
❶ Déterminer les n.o. de l'élément dans chaque espèce chimique présente dans le diagramme.	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">Fe n.o. 0</div> <div style="text-align: center;">Fe<sup>2+</sup> + II</div> <div style="text-align: center;">Fe<sup>3+</sup> + III</div> <div style="text-align: center;">Fe(OH)<sub>2</sub> + II</div> <div style="text-align: center;">Fe(OH)<sub>3</sub> + III</div> </div>
❷ Classer verticalement les nombres d'oxydation par ordre croissant. Ce classement permet en général de classer les domaines de stabilité des espèces chimiques par potentiel croissant.	
❸ Deux espèces ayant le même nombre d'oxydation appartiennent à un couple acide/base : l'espèce la plus basique est à droite, la plus acide à gauche. Il n'y a pas d'échange d'électrons entre ces espèces, leur frontière est verticale.	

## 2.3 Attribuer les domaines

À l'aide du diagramme simplifié, on peut identifier facilement les domaines.

### Méthode

❶ On commence par identifier les domaines aux n.o. les plus élevés et les plus faibles en plaçant les acides à gauche et les bases à droite du diagramme.

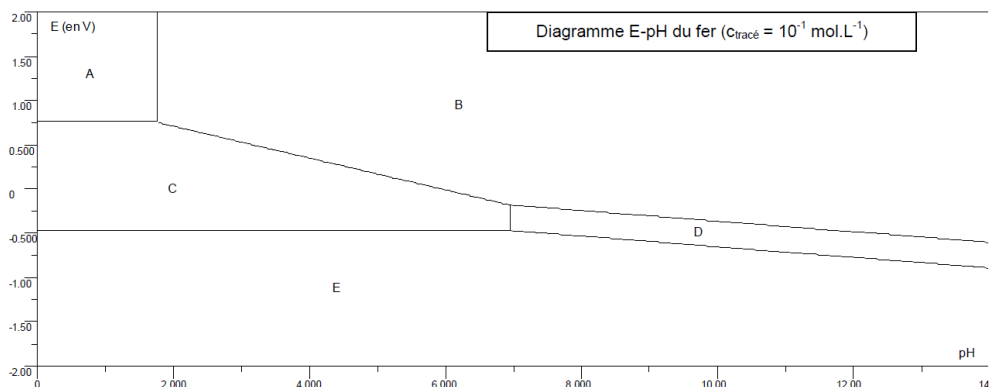
n.o. = 0  $\Rightarrow$  E = Fe


n.o. = + III  $\Rightarrow$  A = Fe<sup>3+</sup> ; B = Fe(OH)<sub>3</sub>

❷ Identifier les éléments aux n.o. intermédiaires en suivant l'ordre établi dans le diagramme simplifié et en respectant les propriétés acido-basiques.

n.o. = + II  $\Rightarrow$  C = Fe<sup>2+</sup> ; D = Fe(OH)<sub>2</sub>

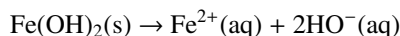
## 2.4 Déterminer l'équation d'une frontière verticale



 Une frontière verticale sépare deux espèces chimiques au même n.o.. Il n'y a donc pas d'échange électronique entre ces espèces. Une réaction acido-basique ou de solubilisation lie les deux espèces.

Ex : Détermination de la **frontière  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{OH})_2$**

❶ Écrire la réaction associée à la frontière dont on connaît la constante d'équilibre



❷ Déterminer les activités des espèces à l'aide des conventions

$$\Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] = C_{\text{tracé}} \quad \text{et} \quad a(\text{Fe}(\text{OH})_2) = 1$$

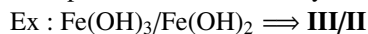
❸ Exprimer la constante d'équilibre de la réaction et déterminer le pH de la frontière.

$$K_{s2} = \frac{[\text{Fe}^{2+}][\text{HO}^{-}]^2}{(C^0)^3} \Rightarrow [\text{HO}^{-}]^2 = \frac{K_{s2}(C^0)^3}{[\text{Fe}^{2+}]} \Rightarrow \text{pOH} = 7,05 \Rightarrow \text{pH} = 6,95.$$

## 2.5 Déterminer l'équation d'une frontière dite « horizontale »

• Ex 1 : détermination de la **frontière entre  $\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}(\text{OH})_2$**

❶ Repérer les nombres d'oxydation intervenant dans les espèces présentes à la frontière.



❷ Repérer dans les données le potentiel standard du couple où interviennent ces nombres d'oxydation. Comme il y a unicité du potentiel, écrire l'égalité des différentes expressions du potentiel.



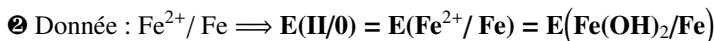
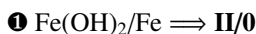
❸ Exprimer le potentiel dont on connaît le potentiel standard. Ensuite, exprimer l'activité des espèces en fonction des activités des espèces chimiques intervenant à la frontière. En déduire l'équation de la frontière.

$$E = E_1^0 + \frac{0,06}{1} \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right)$$

$$K_{s2} = \frac{[\text{Fe}^{2+}][\text{HO}^{-}]^2}{(C^0)^3} \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_{s2}(C^0)^3}{[\text{HO}^{-}]^2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } K_{s1} &= \frac{[\text{Fe}^{3+}][\text{HO}^-]^3}{(\text{C}^0)^4} \Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] = \frac{K_{s1} (\text{C}^0)^4}{[\text{HO}^-]^3} \\
 \Rightarrow E &= E_1^0 + \frac{0,06}{1} \log \left( \frac{K_{s1} (\text{C}^0)^4}{[\text{HO}^-]^3} \frac{[\text{HO}^-]^2}{K_{s2} (\text{C}^0)^3} \right) = E_1^0 + \frac{0,06}{1} \log \left( \frac{K_{s1} (\text{C}^0)}{K_{s2} [\text{HO}^-]} \right) \\
 \Rightarrow E &= E_1^0 + 0,06(pK_{s2} - pK_{s1} + pK_e) - 0,06 \text{ pH} = 0,236 - 0,06 \text{ pH}.
 \end{aligned}$$

- Ex 2 : détermination de la **frontière entre Fe(OH)<sub>2</sub>/Fe**



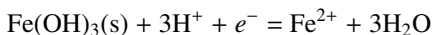
❸  $E = E_2^0 + \frac{0,06}{1} \log \left( \frac{[\text{Fe}^{2+}]}{\text{C}^0} \right)$

$$\begin{aligned}
 K_{s2} &= \frac{[\text{Fe}^{2+}][\text{HO}^-]^2}{(\text{C}^0)^3} \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_{s2} (\text{C}^0)^3}{[\text{HO}^-]^2} \Rightarrow E = E_1^0 + 0,03 \log \left( \frac{K_{s2} (\text{C}^0)^3}{[\text{HO}^-]^2} \right) \\
 \Rightarrow E &= E_1^0 + 0,03(-pK_{s2} + 2pK_e) - 0,06 \text{ pH} = -0,053 - 0,06 \text{ pH}.
 \end{aligned}$$

## 2.6 Déterminer la pente d'une frontière dite « horizontale »

Méthode : ex sur Fe(OH)<sub>3</sub>/Fe<sup>2+</sup>

- ❶ Écrire la demi-équation électronique du couple intervenant sur la frontière



- ❷ Exprimer E sous la forme E = const + f(pH). Pratiquement, on n'intéressera qu'au terme H<sub>3</sub>O<sup>+</sup> ou H<sup>+</sup>

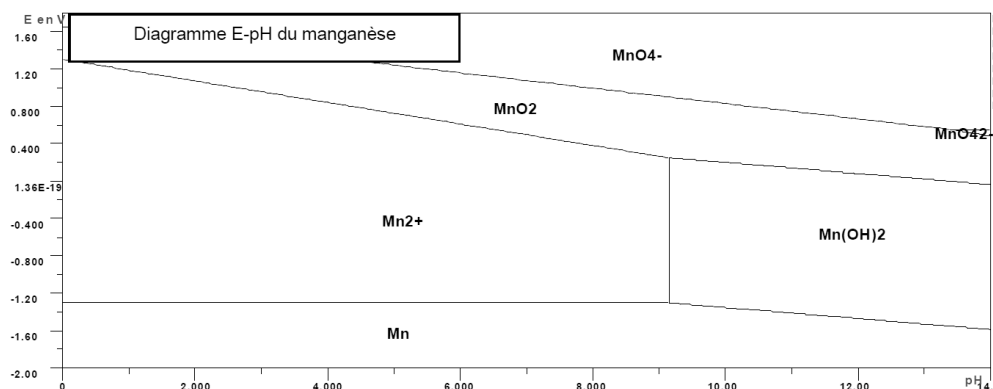
$$E = \text{const} + \frac{0,06}{1} \log ([\text{H}^+]^3) = \text{const} - 0,18 \text{ pH} \Rightarrow \text{pente} = -0,18 \text{ V/unité de pH}.$$

## 3. Utilisation d'un diagramme E-pH


### 3.1 Prévoir le caractère favorisé ou non d'une transformation chimique

À un pH donné, si deux espèces chimiques ont des domaines de stabilité (existence ou prédominance) disjoints, alors il est impossible de trouver un potentiel commun pour lequel les deux espèces coexistent, la transformation chimique entre les deux espèces chimiques est alors favorisée. Si leurs domaines présentent des parties communes, alors les deux espèces coexistent et ne réagissent pas ensemble.

Ex : Les ions permanganate MnO<sub>4</sub><sup>-</sup> réagissent de façon quantitative avec les ions Mn<sup>2+</sup> car ils présentent des domaines disjoints.



### 3.2 Prévoir la stabilité des espèces dans l'eau

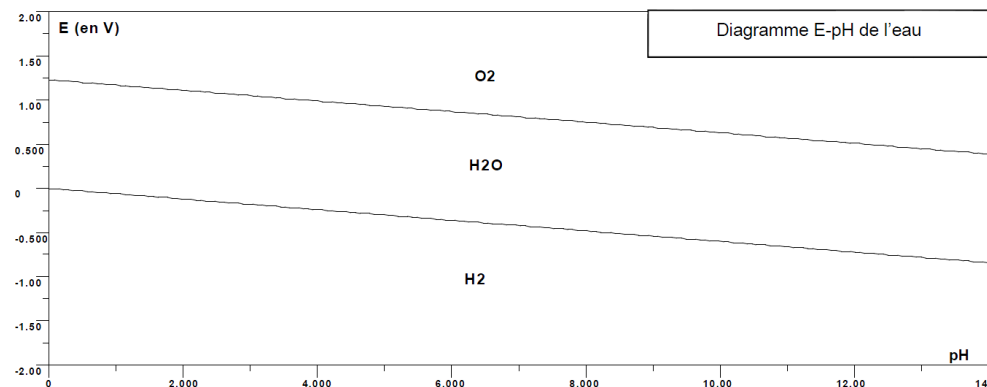
 Pour connaître la stabilité d'une espèce chimique dans l'eau, il convient de superposer le diagramme E-pH de l'eau avec celui de l'élément présent dans l'espèce chimique. Si le domaine de stabilité de l'espèce chimique présente des parties communes avec celui de l'eau, l'espèce est stable dans l'eau. Dans le cas contraire (domaines disjoints), l'espèce est alors instable dans l'eau.

#### • Construction du diagramme E-pH de l'eau

2 couples interviennent :  $O_2(g)/H_2O$  et  $H^+/H_2(g)$

$O_2/H_2O$  :  $E = 1,23 - 0,06pH$  (avec  $p(O_2) = p_{tracé} = 1 \text{ bar}$ )

$H^+/H_2$  :  $E = -0,06pH$  (avec  $p(H_2) = p_{tracé} = 1 \text{ bar}$ )



#### • Prédiction de la stabilité des espèces chimiques du diagramme E-pH du fer

– Le domaine de stabilité de l'eau ne présente pas de parties communes avec le fer.

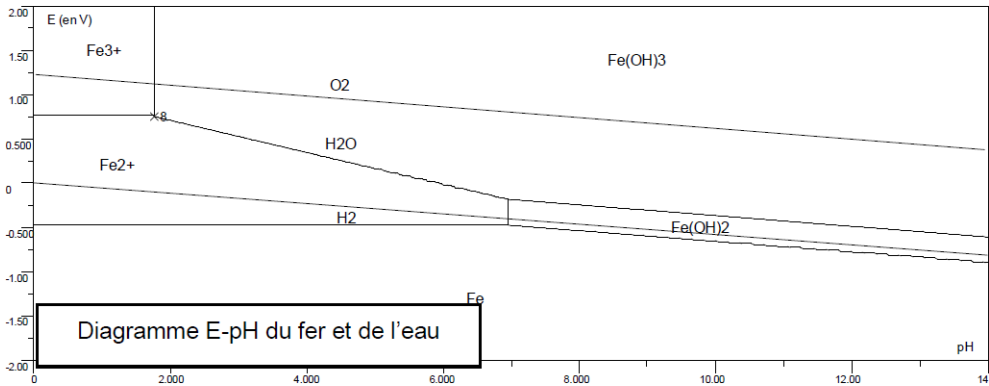
Le fer s'oxyde pour  $pH < 7$  en  $Fe^{2+}$  et pour  $pH > 7$  en  $Fe(OH)_2$ .

L'eau se réduit en dihydrogène  $H_2$ .

– Les autres espèces  $Fe^{2+}$ ,  $Fe^{3+}$ ,  $Fe(OH)_2$  et  $Fe(OH)_3$  sont stables dans l'eau désaérée.

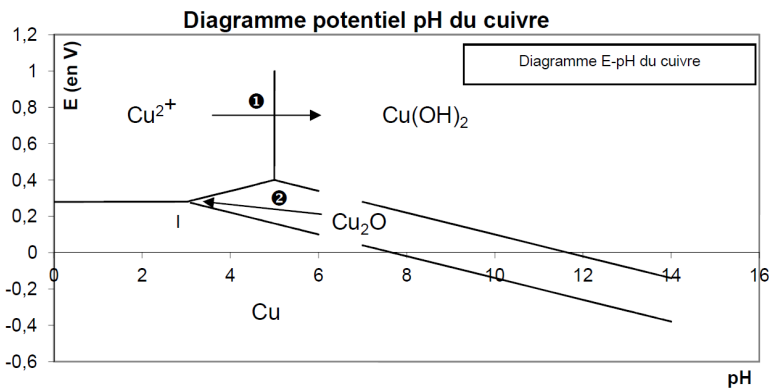
### 3.3 Quand prévoir une réaction de dismutation ?





Lorsque le pH est modifié, une espèce chimique peut devenir instable et se dismuter.

Lorsque l'on augmente (ou diminue) le pH d'une solution, on ne se déplace pas nécessairement horizontalement dans un diagramme E-pH. L'espèce chimique reste dans son domaine de stabilité jusqu'au pH limite.

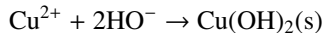


2 cas se présentent :

- une autre espèce chimique de même nombre d'oxydation existe. On a alors une réaction acido-basique.

Ex : augmentation du pH lors de la présence de  $\text{Cu}^{2+}$  :

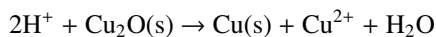
$\text{Cu}^{2+}$  est stable jusqu'à pH environ égal à 5, puis il forme  $\text{Cu}(\text{OH})_2(\text{s})$  de même nombre d'oxydation par réaction acide-base :



- il n'y a pas d'espèce au même nombre d'oxydation, l'espèce chimique se dismute.

Ex : diminution de pH lors de la présence de  $\text{Cu}_2\text{O}$  :

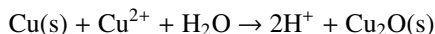
$\text{Cu}_2\text{O}$  reste stable jusqu'au point I, il n'y a pas d'espèces stables au degré d'oxydation +I, l'espèce  $\text{Cu}_2\text{O}$  se dismute en  $\text{Cu}^{2+}$  et Cu :



### 3.4 Quand y-a-t-il une réaction de médiamutation ?

Supposons un système composé de Cu et  $\text{Cu}^{2+}$  à  $\text{pH} = 2$ .

Si on augmente le pH jusqu'à  $\text{pH} = 4$ , les deux espèces restent stables mais elles ont alors des domaines disjoints et réagissent suivant une réaction de médiamutation.



### 3.5 Détermination d'une constante thermodynamique par lecture graphique

On peut par lecture graphique déterminer une constante de solubilité  $K_s$  d'une réaction de solubilisation ou d'une constante d'acidité d'un couple acide-base.

#### • Détermination d'une constante de solubilité $K_s$

Ex : détermination de la constante de solubilité de  $\text{Fe(OH)}_2(\text{s}) \rightarrow \text{Fe}^{2+} + 2\text{HO}^-$

Lecture du diagramme en 2.3 :

Sur la frontière entre  $\text{Fe(OH)}_2/\text{Fe}^{2+}$  :  $\text{pH} = 1,76$

$$\Rightarrow [\text{HO}^-] = 10^{1,8-14} = 10^{-12,2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{et } [\text{Fe}^{2+}] = C_{\text{tracé}} \Rightarrow K_s = \frac{[\text{Fe}^{2+}][\text{HO}^-]}{(C^0)^2} = 10^{-25,4}.$$

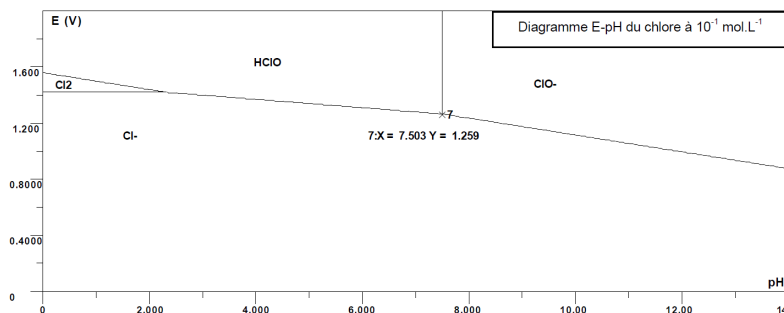
#### • Détermination d'une constante d'acidité $K_a$

Ex : détermination de la constante d'acidité  $K_a$  de  $\text{HClO}/\text{ClO}^-$  :

Sur la frontière entre  $\text{HClO}/\text{ClO}^-$  :  $\text{pH} = 7,5$

$$\Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-7,5} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{et } [\text{HClO}] = [\text{ClO}^-] = \frac{1}{2}C_{\text{tracé}} \Rightarrow K_a = \frac{[\text{ClO}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HClO}]C^0} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C^0} = 10^{-7,5}$$



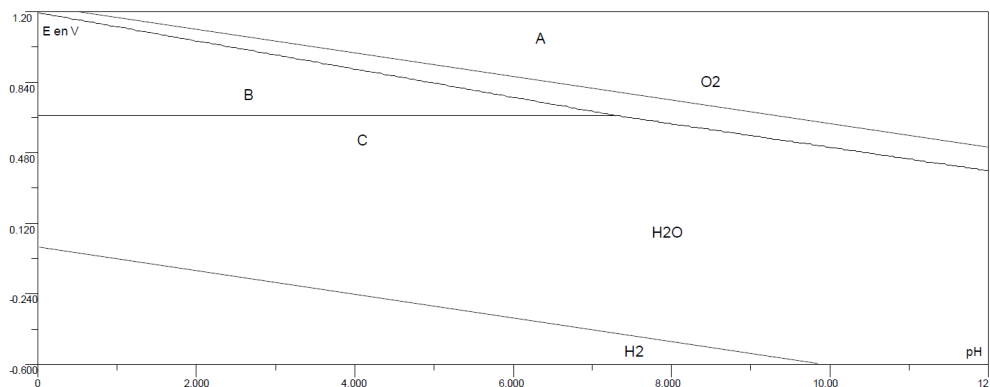
## 4. Limites des diagrammes E-pH

Les diagrammes E-pH permettent de prévoir si une transformation chimique va être favorable thermodynamiquement. Cependant, ces diagrammes ne donnent aucune information sur la cinétique des réactions (exemple de blocage cinétique).

### Sauriez-vous répondre ?

**Exercice 1 :** On donne ci-dessous le diagramme E-pH de l'iode ( $C_{\text{tracé}} = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ ) auquel on a superposé le diagramme E-pH de l'eau. Les espèces à considérer sont :  $\text{I}_2(\text{aq})$ ,  $\text{I}^-$  et  $\text{IO}_3^-$ .

1. Attribuez aux espèces de l'iode leur domaine de stabilité (existence ou prédominance).
2. On dispose une solution de diiode à  $\text{pH} = 3,0$ . La solution est-elle stable dans une solution



désaérée ?

**3.** On augmente le pH de la solution à  $\text{pH} = 9,0$ . Une réaction se produit. Laquelle ? Écrivez l'équation de la réaction.

**4.** Calculer la pente de la frontière entre A/B.

**5.** On souhaite réaliser le dosage de  $V_0 = 20,0$  mL d'une solution  $S_0$  d'ions iodate  $\text{IO}_3^-$ . On ajoute sans variation de volume de l'iodure de potassium (en large excès). À l'aide de l'acide sulfurique, on amène le pH de la solution à une valeur de 3,0. Une coloration brune apparaît. On dose la solution par une solution de thiosulfate de sodium ( $2\text{Na}^{2+} + \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ ) à  $C(\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ . La couleur brune disparaît pour  $V_E = 18,5$  mL.

**a)** À l'aide du diagramme E-pH, écrivez l'équation de la réaction qui a lieu lors de l'ajout de l'acide sulfurique.

**b)** Quel composé dose-t-on par le thiosulfate ?

**c)** Écrivez l'équation de la réaction de dosage.

**d)** Déduisez-en la concentration en iodate de la solution  $S_0$ .

Données :  $E_0(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 0,09 \text{ V}$  ;  $E_0(\text{I}_2/\text{I}^-) = 0,62 \text{ V}$

# Corrigés de la chimie

## 1. Systèmes physico-chimiques

### Exercice 1

- $\text{CO}_2(\text{g})$  : pression partielle de  $\text{CO}_2$  qui correspond ici à la pression totale,

$$P(\text{CO}_2) = \frac{n_{\text{CO}_2}RT}{V_g} \text{ où } V_g \text{ est le volume de phase gazeuse.}$$

- $\text{CO}_2(\text{aq})$  : concentration en  $\text{CO}_2$ ,  $C(\text{CO}_2) = \frac{n_{\text{CO}_2}}{V_{aq}}$  où  $V_{aq}$  est le volume de phase aqueuse.
- $\text{HCO}_3^-$  : concentration en  $\text{HCO}_3^-$ ,  $C(\text{HCO}_3^-) = \frac{n_{\text{HCO}_3^-}}{V_{aq}}$  où  $V_{aq}$  est le volume de phase aqueuse.

### Exercice 2

$$P(\text{CO}) = x_{\text{CO}} \cdot P = \frac{n_{\text{CO}}}{n_{\text{CO}} + n_{\text{H}_2} + n_{\text{CH}_3\text{OH}}} P = 41,75 \text{ bar}$$

$$P(\text{H}_2) = x_{\text{H}_2} \cdot P = \frac{n_{\text{H}_2}}{n_{\text{CO}} + n_{\text{H}_2} + n_{\text{CH}_3\text{OH}}} P = 83,5 \text{ bar}$$

$$P(\text{CH}_3\text{OH}) = x_{\text{CH}_3\text{OH}} \cdot P = \frac{n_{\text{CH}_3\text{OH}}}{n_{\text{CO}} + n_{\text{H}_2} + n_{\text{CH}_3\text{OH}}} P = 41,75 \text{ bar}$$

## 2. Transformation chimique

### Exercice 1

$$1. K = \frac{(P_{\text{CO}_2})_e}{P^0} \implies (P_{\text{CO}_2})_e = K \cdot P^0 = 1,17$$

$$\text{et } (n_{\text{CO}_2})_e = \frac{(P_{\text{CO}_2})_e V}{RT} = \frac{1,17 \times 10^5 \times 10 \times 10^{-3}}{8,314 \times 1100} = 0,128 \text{ mol.}$$

2. Si on maintient la pression du dioxyde de carbone à 1,0 bar, comme  $Q_r = 1,0 < K$ , l'équilibre se déplace dans le sens direct jusqu'à épuisement de  $\text{CaCO}_3(\text{s})$ .

3. Comme  $n(\text{CaCO}_3) < (n_{\text{CO}_2})_e$ , la transformation sera totale : on n'aura pas atteint l'état d'équilibre.

À la fin de la transformation :  $n(\text{CaCO}_3) = 0$   $n(\text{CO}_2) = 0,1 \text{ mol} = n(\text{CaO})$ .

4. Comme  $n(\text{CaCO}_3) > (n_{\text{CO}_2})_e$ , on va atteindre l'état d'équilibre. À l'équilibre,  $n(\text{CO}_2) = 0,128 \text{ mol} = n(\text{CaO})$  et  $n(\text{CaCO}_3) = 0,072 \text{ mol}$ .

## 3. Cinétique chimique

### Exercice 1

$v = k \cdot [\text{HO}^-]^\alpha \cdot [\text{CH}_3\text{COOEt}]^\beta$ . Dans les conditions stœchiométriques,  $[\text{HO}^-] = [\text{CH}_3\text{COOEt}]$  donc  $v = k \cdot [\text{HO}^-]^{\alpha+\beta} \implies$  l'expression de  $v$  ne dépend plus que d'une concentration.

- Si  $[\text{HO}^-]_0 = 0,100 \text{ mol.L}^{-1}$ , au temps de demi-réaction,  $[\text{HO}^-]_{t_{1/2}} = 0,0500 \text{ mol.L}^{-1} \implies t_{1/2}([\text{HO}^-]_0 = 0,100 \text{ mol.L}^{-1}) = 15,5 \text{ min}$ .
- Si  $[\text{HO}^-]_0 = 0,500 \text{ mol.L}^{-1}$ , au temps de demi-réaction,  $[\text{HO}^-]_{t_{1/2}} = 0,0250 \text{ mol.L}^{-1}$

$$\Rightarrow t_{1/2}([HO^-]_0 = 0,0500 \text{ mol.L}^{-1}) = 46,4 - -15,5 = 30,9 \text{ min.}$$

- Si  $[HO^-]_0 = 0,0250 \text{ mol.L}^{-1}$ , au temps de demi-réaction,  $[HO^-]_{t_{1/2}} = 0,00625 \text{ mol.L}^{-1}$   
 $\Rightarrow t_{1/2}([HO^-]_0 = 0,0250 \text{ mol.L}^{-1}) = 108,2 - -46,4 = 61,8 \text{ min.}$

- Si  $[HO^-]_0 = 0,00625 \text{ mol.L}^{-1}$ , au temps de demi-réaction,  $[HO^-]_{t_{1/2}} = 0,003125 \text{ mol.L}^{-1}$   
 $\Rightarrow t_{1/2}([HO^-]_0 = 0,00625 \text{ mol.L}^{-1}) = 479,1 - -231,8 = 247,3 \text{ min.}$

Ceci entraîne que  $t_{1/2}$  est directement proportionnel à  $[ROH]_0$ , donc que  $\alpha + \beta = 2$ .

$$v = k.[HO^-]^{\alpha+\beta} = -\frac{d[HO^-]}{dt} \Rightarrow \frac{1}{[HO^-]} = \frac{1}{[HO^-]_0} + kt.$$

Si l'on veut confirmer par la méthode intégrale, on trace  $\frac{1}{[HO^-]} = f(t)$ , on obtient une droite d'équation :  $\frac{1}{[HO^-]} = 0,647t + 9,98$  (fait à la calculatrice avec un coefficient de corrélation de 1,0).

L'ordre  $\alpha + \beta$  vaut 2 et  $k = 0,647 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{min}^{-1}$ .

## Exercice 2

Si la réaction vérifie la loi d'Arrhénius, alors  $k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \Rightarrow \ln k = \ln A - \frac{E_a}{RT}$

On trace  $\ln k = f(T)$  ; on obtient une droite de pente  $-\frac{E_a}{RT} = -10,7 \times 10^3$

$\Rightarrow E_a = 89,0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  (à la calculatrice, on obtient un coefficient de corrélation égal à 1).

## Exercice 3

- $v = \frac{d[ROEt]}{dt} = \frac{d[Cl^-]}{dt} = -\frac{d[RCl]}{dt} = -\frac{d[EtO^-]}{dt}$

- On calcule à chaque point de la courbe, la pente de la tangente. Cette pente est égale à la vitesse.

- $v = k[RCl]^\alpha [EtO^-]^\beta = k[RCl]^{\alpha+\beta} = k[RCl]^\gamma$  avec  $\gamma = \alpha + \beta$   
 $\Rightarrow \ln v = \ln k + \gamma \ln[RCl]$ .

On trace  $\ln v = f(\ln[RCl])$ . A la calculatrice, on obtient une droite d'équation :  $\ln v = 2,94 + 2 \ln[RCl]$  (avec un coefficient de corrélation égal à 1)

$\Rightarrow \gamma = 2$  et  $k = 18,9 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$ .

## 4. Configuration électronique d'un atome

### Exercice 1

1. Orbitale 3d :  $n = 3$ ,  $l = 2$

Orbitale 4s :  $n = 4$ ,  $l = 0$

Orbitale 2p :  $n = 2$ ,  $l = 0$

2. Électrons de cœur :  $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6$

Électrons de valence :  $(4s)^2(3d)^6$  soit 8 électrons de valence

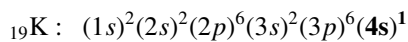
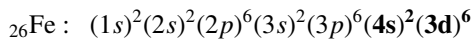
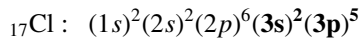
3.  $n = 3$ ,  $l = 2$  : orbitale 3d

$n = 4, l = 4$  : pas d'orbitale car  $l < n$

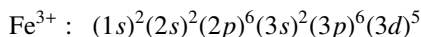
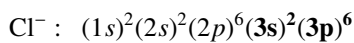
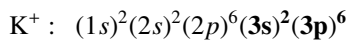
$n = 2, l = 0$  : orbitale  $2s$

## Exercice 2

### Atomes



### Ions



## Exercice 3

${}_{12}\text{Mg} : (1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2$  peut perdre  $2e^-$  de l'OA  $3s$  pour donner  $\text{Mg}^{2+}$ .

${}_{17}\text{Cl} : (1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^5$  peut gagner  $1e^-$  pour donner  $\text{Cl}^-$ .

# 5. Classification périodique des éléments

## Exercice 1

- $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^2(3d)^7 \Rightarrow 9$  électrons de valence.

L'élément appartient à la 4<sup>e</sup> période. C'est un élément du bloc  $d$ , il appartient à la colonne  $2 + 7 = 9^{\text{e}}$  colonne.

- $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^4 \Rightarrow 6$  électrons de valence.

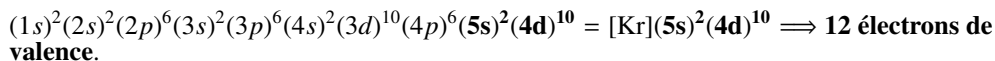
L'élément appartient à la 3<sup>e</sup> période. C'est un élément du bloc  $p$ , il appartient à la colonne  $2 + 10 + 4 = 16^{\text{e}}$  colonne.

- $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^2(3d)^{10}(4p)^6(5s)^1 \Rightarrow 1$  électron de valence.

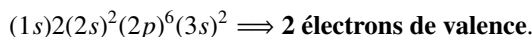
L'élément appartient à la 5<sup>e</sup> période. C'est un élément du bloc  $s$ , il appartient à la colonne 1<sup>re</sup> colonne.

## Exercice 2

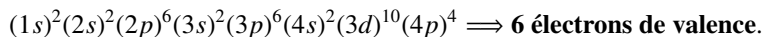
- 5<sup>e</sup> période et 12<sup>e</sup> colonne :



- 3<sup>e</sup> période et 2<sup>e</sup> colonne :



- 4<sup>e</sup> période et 16<sup>e</sup> colonne :

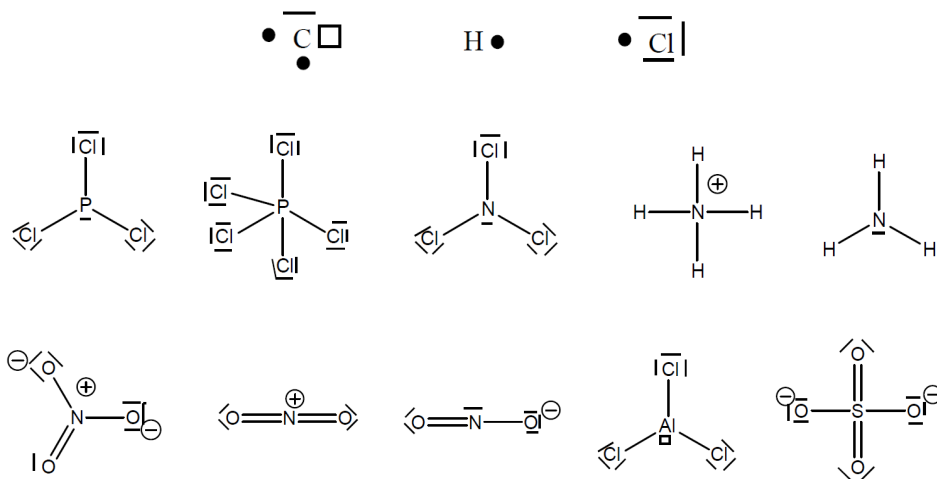


## Exercice 3

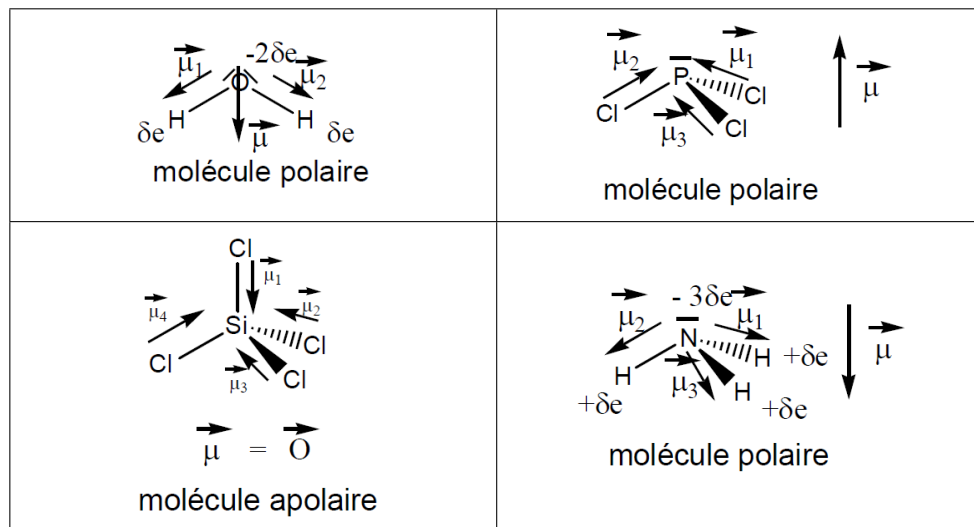
- Fluor, chlore, brome, iode appartiennent à la famille des halogènes. Dans une même famille, l'électronégativité diminue avec  $Z$  ce qui entraîne :  $\chi(\text{F}) > \chi(\text{Cl}) > \chi(\text{Br}) > \chi(\text{I})$ .
- Sodium, magnésium, aluminium, silicium appartiennent à la même période (3<sup>e</sup> période). Dans une même période, de la gauche vers la droite l'électronégativité augmente ce qui entraîne :  $\chi(\text{Na}) < \chi(\text{Mg}) < \chi(\text{Al}) < \chi(\text{Si})$ .

## 6. Comment décrire les entités chimiques moléculaires ?

### Exercice 1



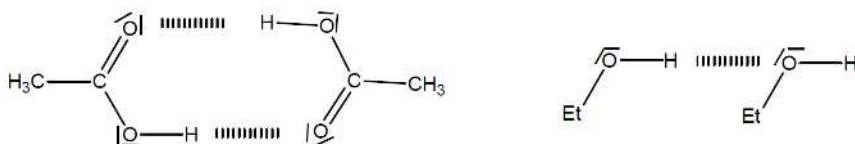
### Exercice 2



## 7. Les interactions intermoléculaires et les solvants moléculaires

## Exercice 1

- Si un composé est polaire, il peut engendrer des interactions de van der Waals de type Keesom, et London contrairement au composé apolaires qui n'engendrent que des interactions de type London. L'éthane a donc la température d'ébullition la plus faible soit  $-89^{\circ}\text{C}$ .
- Quand un composé polaire peut engager des liaisons hydrogène, sa température d'ébullition augmente. Une molécule d'éthanal ne peut engager avec une autre molécule d'éthanal une liaison hydrogène. L'éthanal a donc une température d'ébullition de  $20^{\circ}\text{C}$  sous  $P = 1$  bar.
- Entre deux molécules d'acide éthanoïque, deux liaisons hydrogènes peuvent se former contrairement à l'éthanol. L'éthanol a donc une température d'ébullition de  $78^{\circ}\text{C}$  sous  $P = 1$  bar et l'acide éthanoïque de  $118^{\circ}\text{C}$ .



## Exercice 2

Eau : polaire et protogène ; cyclohexane : apolaire et aprotogène.

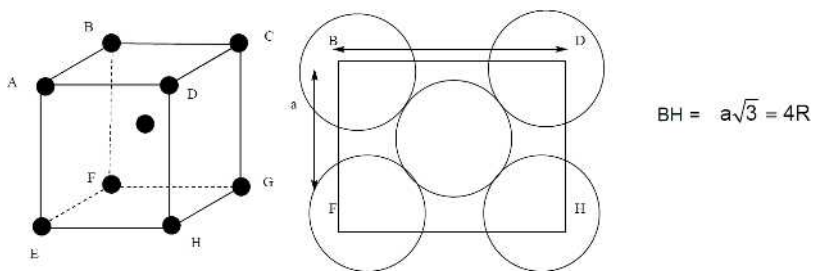
Le diiode est une molécule apolaire. Ses interactions avec le cyclohexane apolaire seront plus fortes qu'avec l'eau polaire. Le diiode se solubiliserait davantage dans le cyclohexane.

En revanche, l'espèce ionique  $\text{I}_3^-$  se solubiliserait dans un solvant polaire soit l'eau.

## 8. Le modèle du cristal parfait

### Exercice 1

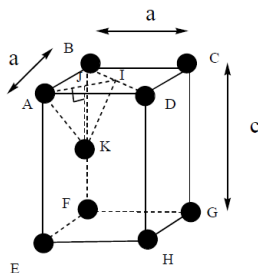
- $Z = \frac{8}{8} + 1 = 2$ .
- L'atome au centre a 8 voisins ; la coordinence vaut 8.
- Relation entre  $a$  et  $R$  :



- $C = \frac{V_{\text{motifs}}}{V_{\text{mailles}}} = \frac{2 \times \frac{4}{3} \times \pi \left( \frac{a\sqrt{3}}{4} \right)^3}{a^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \approx 0,68$ .
- $\mu = \frac{\text{masse de la maille}}{\text{volume de la maille}} = \frac{2 m_{\text{atomes}}}{a^3} \times \frac{2M}{N_A a^3} = \frac{2 \times 0,232}{6,02 \times 10^{23} \times (411 \times 10^{-12})^3}$   
 $= 11,1 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .



## Exercice 2



- Relation entre  $a$  et  $R$  :  $a = 2R = AB = BD$

- Relation entre  $a$  et  $c$  :

– Triangle  $AID$  rectangle en  $I$  :  $AI^2 + ID^2 = AD^2 \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

–  $J$  centre de gravité du triangle équilatéral  $AIK$  :  $AJ = \frac{2}{3}AI = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow AJ = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

– Triangle  $AJK$  rectangle en  $J$  :  $AJ^2 + JK^2 = AK^2$

Contact entre  $A$  et  $K$  :  $AK = a$

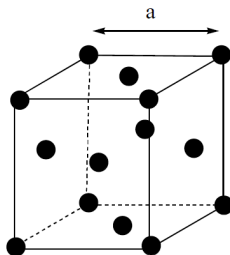
$$\Rightarrow AJ^2 + JK^2 = AK^2 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow \frac{a^2}{3} + \frac{c^2}{4} = a^2 \Rightarrow c^2 = \frac{8}{3}a^2$$

–  $S = \text{surface } ABCD = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{AI \cdot BD}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \Rightarrow \text{Volume : } V = S \cdot c = a^3 \sqrt{2}$

•  $\mu = \frac{2M_{Ti}}{N_A V} = \frac{2 \times 0,0479}{6,02 \times 10^{23} \times (295 \times 10^{-12})^3} = 6,20 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

## 9. Les cristaux métalliques

### Exercice 1



• Contact :  $R(\text{Au}) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$     AN :  $R(\text{Au}) = 144 \text{ pm}$      $Z = \frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$ .

• Compacité :  $C = \frac{4 \times \frac{4}{3}\pi R^3}{a^3} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} = 0,74$ .

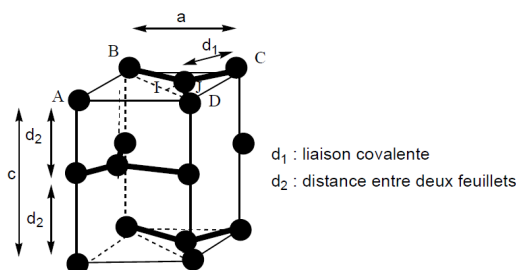
- La diagonale du cube correspond à 3 distances entre plans réticulaires

$$\Rightarrow 3d = a\sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 236 \text{ pm.}$$

- Masse volumique :  $\rho(\text{Au}) = \frac{4 \times M(\text{Cu})}{N_a \times a^3} = 19,6 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
  - Cavités octaédriques : centre du cube + milieu des arêtes,  
 $Z_{\text{oct}} = 4$ ,  
 Condition d'habitabilité du site :  $R(\text{Au}) + R_{\text{oct}} = \frac{a}{2}$     AN :  $R_{\text{oct}} = 60,0 \text{ pm}$
  - Cavités tétraédriques : centre des huit cubes d'arêtes  $\frac{a}{2}$   
 $Z_{\text{tet}} = 8$   
 Condition d'habitabilité du site :  $R(\text{Au}) + R_{\text{tet}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$     AN :  $R_{\text{tet}} = 32,7 \text{ pm}$
- $\Rightarrow R(\text{Cu}) > R_{\text{oct}} > R_{\text{tet}}$ . L'or des bijoutiers est donc un alliage de substitution.

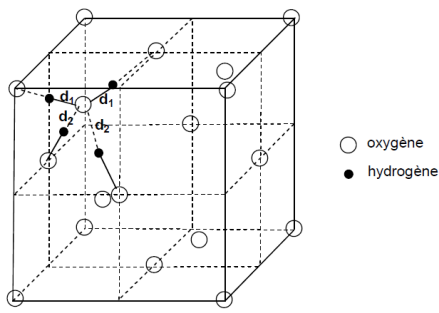
## 10. Solides macrocovalents et moléculaires

### Exercice 1



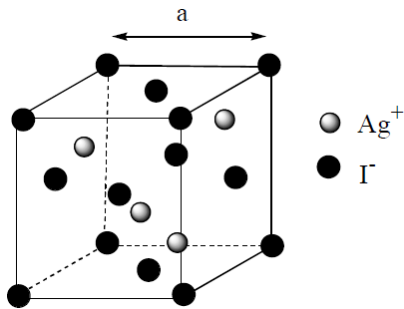
- $V = S_{ABCD} \cdot 2d_2$
- $S = \frac{1}{2} AC \times BD = CI \times a$  avec  $CI = \frac{3}{2} CJ = \frac{3}{2} d_1$ , d'où  $S = \frac{3}{2} d_1 \times a$
- Triangle  $CID$  rectangle en  $I$  :  $CD^2 = CI^2 + ID^2 \Rightarrow a^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{9}{4} d_1^2 \Rightarrow d_1^2 = \frac{a^2}{3}$
- $S = \frac{3}{2} d_1 \times d_1 \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} d_1^2 \Rightarrow V = 3 \sqrt{3} d_1^2 d_2$

## Exercice 2

	$Z = \frac{8}{8} + 1 = 2$ $\rho(\text{H}_2\text{O}) = \frac{4 \times M(\text{H}_2\text{O})}{N_A \times a^3}$ $\Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{4 \times M(\text{H}_2\text{O})}{\rho(\text{H}_2\text{O}) N_A}}$ $D = \frac{a \sqrt{3}}{4} = \sqrt[3]{\frac{4 \times M(\text{H}_2\text{O})}{\rho(\text{H}_2\text{O}) N_A}} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$ $= 220 \text{ pm}$
---	--

## 11. Solides ioniques

### Exercice 1

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>Z(\text{I}^-) = \frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4</math> et <math>Z(\text{Ag}^+) = 4</math>.</li> <li>• <math>\rho(\text{AgI}) = \frac{4 \times M(\text{AgI})}{N_a \times a^3}</math></li> <li><math>\Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{4 \times M(\text{AgI})}{\rho(\text{H}_2\text{O}) \cdot N_a}}</math></li> <li>• <math>D = \frac{a \sqrt{3}}{4} = 281 \text{ pm}</math></li> <li><math>R(\text{Ag}^+) + R(\text{I}^-) = 342 \text{ pm}</math> ;</li> <li><math>r(\text{Ag}) + r(\text{I}) = 267 \text{ pm}</math></li> <li><math>\Rightarrow</math> la liaison n'est ni covalente, ni ionique mais intermédiaire aux deux modèles.</li> </ul>
--	--

## 12. Les réactions d'oxydo-réduction

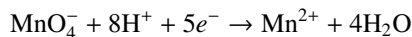
### Exercice 1 ?

- $\text{SO}_4^{2-}$  : n.o.(O) = - II  $\Rightarrow$  n.o.(S) + 4(-2) = -2  $\Rightarrow$  n.o.(S) = + VI.
- $\text{CO}_3^{2-}$  : n.o.(O) = - II  $\Rightarrow$  n.o.(C) + 3(-2) = -2  $\Rightarrow$  n.o.(C) = + IV.
- $\text{MnO}_4^-$  : n.o.(O) = - II  $\Rightarrow$  n.o.(M) + 4(-2) = -1  $\Rightarrow$  n.o.(Mn) = + VII.
- $\text{H}-\text{O}-\text{O}-\text{H} \Rightarrow$  n.o.(O) = - I ; n.o.(H) = + I.
- Manganèse : n.o.(max)(Mn) = 0 et n.o.(min)(Mn) = + VII
- Carbone : n.o.(max)(C) = + IV et n.o.(min)(C) = - IV
- Fluor : n.o.(max)(F) = 0 et n.o.(min)(F) = - I

- Calcium : n.o.(max)(Ca) = + II et n.o.(min)(Ca) = 0

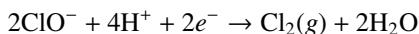
## Exercice 2

- $\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}$  :



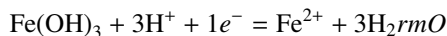
$$E_{\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}} = E_{\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}}^0 + \frac{0,06}{5} \log \left( \frac{[\text{MnO}_4^-] \cdot [\text{H}^+]^8}{[\text{Mn}^{2+}] \cdot (C^0)^6} \right)$$

- $\text{ClO}^-/\text{Cl}_2(\text{g})$  :



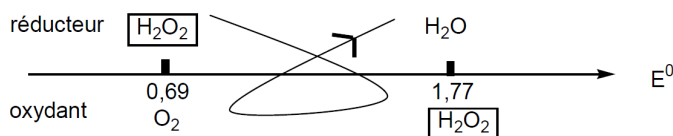
$$E_{\text{ClO}^-/\text{Cl}_2(\text{g})} = E_{\text{ClO}^-/\text{Cl}_2(\text{g})}^0 + \frac{0,06}{2} \log \left( \frac{[\text{ClO}^-]^2 \cdot [\text{H}^+]^4}{(C^0)^8} \cdot \frac{P^0}{P(\text{Cl}_2)} \right)$$

- $\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})/\text{Fe}^{2+}(\text{aq})$  :



$$E_{\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})/\text{Fe}^{2+}(\text{aq})} = E_{\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})/\text{Fe}^{2+}(\text{aq})}^0 + \frac{0,06}{1} \log \left( \frac{[\text{H}^+]^3}{[\text{Fe}^{2+}] (C^0)^2} \right)$$

## Exercice 3



Réaction de dismutation :

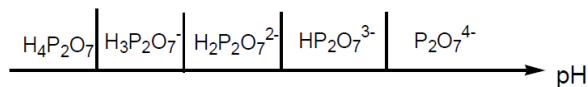
De  $\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2e^- = 2\text{H}_2\text{O}$  et  $\text{H}_2\text{O}_2 = \text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2e^-$  on tire :

$$2\text{H}_2\text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O} + \text{O}_2 \quad ; \quad \log K = \frac{2}{0,06} (E_{\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}}^0 - E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}_2}^0) = 36 \Rightarrow K = 10^{36}$$

## 13. Les réactions acide-base

### Exercice 1

Allure du diagramme de prédominance :



On en déduit : ❶ = % de  $\text{H}_4\text{P}_2\text{O}_7$  ; ❷ = % de  $\text{H}_3\text{P}_2\text{O}_7^-$  ; ❸ = % de  $\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7^{2-}$  ;  
❹ = % de  $\text{HP}_2\text{O}_7^{3-}$  ; ❺ = % de  $\text{P}_2\text{O}_7^{4-}$ .

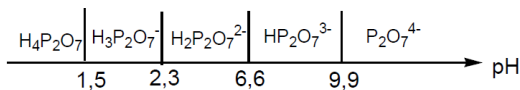
À l'intersection de ❶ et ❷ on a  $\text{pH} = 1,5 \Rightarrow \text{pK}_{a1} = 1,5$

À l'intersection de ❷ et ❸ on a  $\text{pH} = 2,3 \Rightarrow \text{pK}_{a2} = 2,3$

À l'intersection de ❸ et ❹ on a  $\text{pH} = 6,6 \Rightarrow \text{pK}_{a3} = 6,6$ .

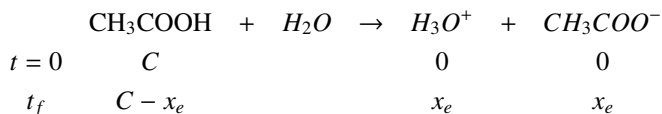
À l'intersection de ❹ et ❺ on a  $\text{pH} = 9,3 \Rightarrow \text{pK}_{a4} = 9,3$ .

Soit :



## Exercice 2

On dispose d'une solution d'acide éthanóïque ( $\text{pK}_a = 4,8$  à  $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ ). On veut déterminer la composition finale du système puis le pH de la solution.



$$K_a = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}][\text{C}^0]} = \frac{x_e^2}{(C - x_e)C^0} = 10^{-4,8}$$

On peut faire l'hypothèse que la réaction est défavorisée, soit  $C - x_e \approx C$ ,

$$\text{alors : } K_a = \frac{x_e^2}{C C^0} \Rightarrow x_e = \sqrt{K_a C C^0} = 10^{-3,4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{et } \text{pH} = \frac{1}{2} \left( \text{pK}_a - \log \left( \frac{C}{C^0} \right) \right) = 3,4.$$

Vérification des hypothèses :  $\alpha = \frac{x_e}{C} = \frac{10^{-3,4}}{10^{-2}} = 10^{-1,4} < 0,1 \Rightarrow$  la réaction était défavorable (hypothèse vérifiée).

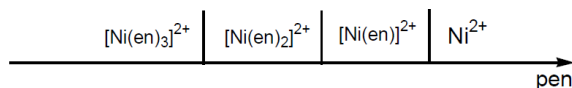
## Exercice 3

Dans une fiole jaugée de 1 L, on ajoute  $2n_0 = 2,0 \times 10^{-1} \text{ mol}$  d'ions ammonium soit 200 mL de solution d'ammonium et  $n_0 = 1,0 \times 10^{-1} \text{ mol}$  de soude (soit  $m_{\text{NaOH}} = 4 \text{ g}$ ). On complète après homogénéisation la fiole avec de l'eau distillée.

# 14. Les réactions de complexation

## Exercice 1

- Allure du diagramme de prédominance :



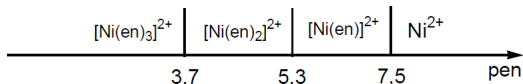
On peut attribuer les courbes : ❶ = % de  $[\text{Ni}(\text{en})_3]^{2+}$  ; ❷ = % de  $[\text{Ni}(\text{en})_2]^{2+}$  ;  
 ❸ = % de  $[\text{Ni}(\text{en})]^{2+}$  ; ❹ = % de  $\text{Ni}^{2+}$  ;

À l'intersection de ❶ et ❷ on a  $\text{pL} = 7,5 \Rightarrow \text{pKd}_1 = 7,5$

À l'intersection de ❷ et ❸ on a  $\text{pL} = 3,5 \Rightarrow \text{pKd}_2 = 5,3$

À l'intersection de ❸ et ❹ on a  $\text{pL} = 2,9 \Rightarrow \text{pKd}_3 = 3,7$ .

Soit :

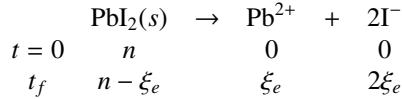


Réaction globale de formation de  $[\text{Ni}(\text{en})_3]^{2+}$  :  $\text{Ni}^{2+} + 3\text{en} \rightarrow [\text{Ni}(\text{en})_3]^{2+}$

$$\beta_3 = K_{f1} \cdot K_{f2} \cdot K_{f3} = \frac{1}{K_{d1} \cdot K_{d2} \cdot K_{d3}} \Rightarrow \log \beta_3 = \text{pKd}_1 + \text{pKd}_2 + \text{pKd}_3 = 16,5.$$

## 15. Les réactions de dissolution

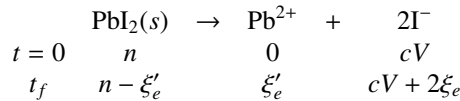
### Exercice 1



$$s = \frac{\xi_e}{V} = [\text{Pb}^{2+}]_e = \frac{[\text{I}^-]_e}{2} \Rightarrow K_s = \frac{[\text{Pb}^{2+}]_e [\text{I}^-]_e^2}{(C^0)^3} = \frac{4s^3}{(C^0)^3} \Rightarrow s = C^0 \sqrt[3]{\frac{K_s}{4}}$$

$$\Rightarrow s(\text{PbI}_2, \text{eupure}) = 6,30 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

En présence d'ions  $\text{I}^-$ , il y a effet d'ions communs, donc la solubilité diminue.



$$s = \frac{\xi'_e}{V} = [\text{Pb}^{2+}]_e \text{ et } [\text{I}^-]_e = 2\frac{\xi'_e}{V} + C = 2s' + C \approx C \text{ car } s' \ll C.$$

$$\Rightarrow K_s = \frac{[\text{Pb}^{2+}]_e [\text{I}^-]_e^2}{(C^0)^3} = \frac{s' C^2}{(C^0)^3} \Rightarrow s' = \frac{(C^0)^3}{C^2} K_s$$

$$\Rightarrow s'(\text{PbI}_2) = 1,0 \times 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}.$$

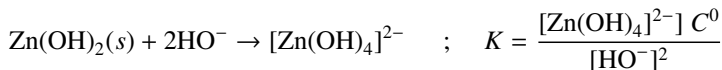
### Exercice 2

- Au début de la précipitation,  $[\text{Zn}^{2+}] = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$  :

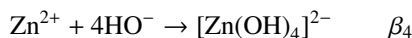
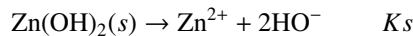
$$K_s = \frac{[\text{Zn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2}{(C^0)^3} \Rightarrow [\text{HO}^-] = \sqrt{\frac{K_s (C^0)^3}{[\text{Zn}^{2+}]}} = 10^{-6,7} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{pOH} = 6,7 \text{ et } \text{pH} = 7,3.$$

- Lors de la dissolution du précipité, l'équation de la réaction est :



La réaction est la somme de deux équations :



$$\Rightarrow K = K_s \beta_4 = 10^{-1}$$

- Lors de la dissolution du précipité,  $[[\text{Zn(OH)}_4]^{2-}] = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

$$\Rightarrow [\text{HO}^-] = \sqrt{\frac{[[\text{Zn(OH)}_4]^{2-}] C^0}{K}} \text{ soit } [\text{HO}^\bullet] = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{pOH} = 1,0 \text{ et } \text{pH} = 13,0.$$

## 16. Les diagrammes E-pH

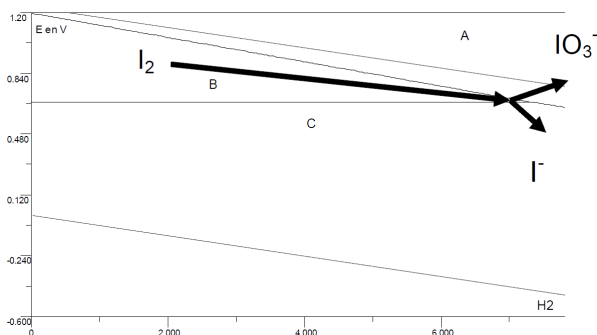
### Exercice 1

1.

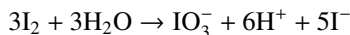
$I^-$	$I_2(aq)$	$IO_3^-$
- I C	0 B	+ V A
prédominance	prédominance	prédominance

2. Le diiode  $I_2$  et l'eau présentent des parties communes donc le diiode est stable dans une eau désaérée.

3. Lors de l'ajout d'acide, le diiode se dismute en  $IO_3^-$  et  $I^-$ .



De  $I_2 + 6H_2O = 2IO_3^- + 12H^+ + 10e^-$  et  $I_2 + 2e^- = 2I^-$  on déduit :

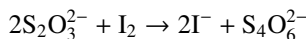


4. A/B :  $IO_3^-/I_2$ .

$10e^- + 2IO_3^- + 12H^+ = I_2 + 6H_2O \Rightarrow E = cte + \frac{0,06}{10} \log[H^+]^{12} = const - 0,072pH \Rightarrow$   
 pente =  $-0,072$  V/unité de pH.

5. a) En acidifiant les ions  $IO_3^-$  et  $I^-$  réagissent suivant une réaction de médiamutation (en milieu acide, les domaines sont disjoints) :  $IO_3^- + 6H^+ + 5I^- \rightarrow 3I_2 + 3H_2O$

b) et c) Les ions thiosulfate  $S_2O_3^{2-}$  réagissent avec le diiode :



d) • À l'équivalence du dosage :  $(n_{I_2})_{dosé} = \frac{n_{S_2O_3^{2-}}}{2} = \frac{C_{S_2O_3^{2-}} \cdot V_E}{2}$

• Détermination de  $n_{IO_3^-}$  :

$$n_{IO_3^-} = \frac{(n_{I_2})_{dosé}}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{C_{S_2O_3^{2-}} \cdot V_E}{2} = \frac{1}{6} C_{S_2O_3^{2-}} \cdot V_E \Rightarrow C_{IO_3^-} = \frac{C_{S_2O_3^{2-}} \cdot V_E}{6V_0}$$

AN :  $C(IO_3^-) = 1,54 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ .

## Index des mathématiques

- absurde, 57
- accroissements finis
  - égalité, 23
  - inégalité, 23
- analyse-synthèse, 57
- anneau, 80
- application linéaire, 97
- argument, 69
- arrangement, 128
- automorphisme, 97
- base, 92
  - orthonormale, 121
- Bayes, 133
- Bessel, 122
- Bézout, 75, 86
- Bienaymé-Tchebychev, 141
- bijection, 61
- Bolzano-Weierstrass, 32
- borne
  - inférieure, 12
  - supérieure, 12
- borne inférieure, 15
- borne supérieure, 15, 32
- cardinal fini, 127
- Cauchy Schwartz, 120
- Chasles, 37
- cofacteur, 117
- combinaison, 128
- combinaison linéaire, 91
- complémentaire, 58
- composition, 16
- congruence, 63, 75
- conjonction, 55
- conjugué, 68
- continuité uniforme, 20
- corps, 81
- Cramer, 114
- cycle, 78
- d'Alembert-Gauss, 84
- de Morgan, 58
- déduction, 56
- degré, 82
- dense (partie), 32
- déterminant, 116
- développement limité, 45
- diagonale principale, 104
- différence ensembliste, 58
- différence symétrique, 58
- dimension, 94
- disjonction, 55
- distance, 122
- diviseur, 83
- divisibilité, 74
- division euclidienne, 74, 83
- écart type, 141
- encadrement, 18, 32
- endomorphisme, 97
- équation différentielle
  - du premier ordre, 49
  - du second ordre, 50
- équivalence, 55
- espace
  - euclidien, 120
  - préhilbertien, 120
- espace affine, 102
- espace vectoriel, 90
- espérance, 141
- Euclide, 74
- Euclide (algorithme d'), 86
- Euler, 71
- événement, 130
- expérience aléatoire, 130
- exponentielle complexe, 70
- facteur intégrant, 49
- factorielle, 128
- famille
  - génératrice, 91
  - libre, 92
  - liée, 92
- Fermat, 75
- fonction
  - arc cosinus, 28
  - arc sinus, 28
  - arc tangente, 29
  - continue, 19
  - dérivable, 21
  - dominée, 43
  - en escalier, 36
  - exponentielle, 25
  - hyperbolique, 30
  - indicatrice d'une partie, 60
  - lipschitzienne, 23
  - logarithme, 25
  - prépondérante, 43
  - puissance, 26
- fonctions
  - équivalentes, 43
- forme
  - alternée, 116
  - linéaire, 99
  - multilinéaire, 116



- formule du binôme, 66, 105
- fraction rationnelle, 88
- Gauss, 75
- Gauss (lemme de), 87
- Gauss (pivot de), 67, 114
- Gauss-Jordan, 114
- graphe d'une application, 60
- Grassmann (relation de), 95
- groupe, 77
- groupe linéaire, 97
- groupe orthogonal, 124
- groupe spécial orthogonal, 125
- groupe symétrique, 78
- Heine, 20
- homothétie, 100
- hyperplan, 99
- hyperplan affine, 123
- image
  - d'une application linéaire, 97
  - d'une matrice, 109
  - directe, 14
  - réciproque, 14
- image directe, 61
- image réciproque, 61
- implication, 55
- indépendance
  - (expériences), 134
  - (variables aléatoires), 137
  - (événements), 134
- injection, 61
- intégration
  - par changement de variable, 40
  - par parties, 40
- intersection, 58
- intervalle, 11
- isomorphisme, 97
- Kronecker (symbole de), 105
- Lagrange, 49, 85
- Leibniz, 83
- limite, 17
- limite monotone, 19, 33
- loi
  - binomiale, 139
  - de Bernoulli, 138
  - de probabilité, 136
  - uniforme, 138
- loi de composition, 77
- lois
  - conditionnelles, 137
  - marginales, 136
- majorant, 12, 15
- Markov, 141
- maths, 43
- matrice, 104
  - antisymétrique, 106
  - carrée, 104
  - colonne, 104
  - de dilatation, 113
  - de passage, 109
  - de transvection, 113
  - diagonale, 104
  - échelonnée, 113
  - inversible, 106
  - ligne, 104
  - orthogonale, 124
  - scalaire, 104
  - symétrique, 106
  - transposée, 106
  - triangulaire, 104
- matrices
  - équivalentes, 109
  - semblables, 109
- maximum, 15
- minimum, 15
- minorant, 15
- module, 69
- Moivre, 70
- multiple, 83
- négation, 55
- nombre premier, 74
- norme euclidienne, 120
- noyau
  - d'une application linéaire, 98
  - d'une matrice, 109
  - d'une restriction, 98
- opération élémentaire, 66, 113
- orientation, 117, 123
- orthogonalité, 121
- partie
  - entière, 88
  - fractionnaire, 88
  - polaire, 88
- partie entière, 11
- partition, 59
- permutation, 78, 128
- pgcd, 74, 86
- plus grand élément, 12
- polarisation, 120
- pôle, 88
- polynôme
  - dérivé, 83
  - irréductible, 84
  - scindé, 84
  - unitaire, 82
- ppcm, 75, 86

- primitive, 39
- probabilité, 131
  - conditionnelle, 133
- probabilités
  - composées, 133
  - totales, 133
- produit cartésien, 59
- produit mixte, 118
- produit scalaire, 120
- projecteur, 100
- projection, 100
- projection orthogonale, 122
- prolongement, 14, 60
- Pythagore, 121
- quantificateur, 56
- racine, 84
- rang
  - d'un système, 114
  - d'une application linéaire, 98
  - d'une famille de vecteurs, 96
  - d'une matrice, 109, 118
  - théorème du, 98
- recouvrement, 59
- réurrence, 57
- réflexion, 125
- relation
  - antisymétrique, 63
  - binaire, 63
  - d'équivalence, 63
  - d'ordre, 64
  - réflexive, 63
  - symétrique, 63
  - transitive, 63
- repère affine, 103
- restriction, 14, 60
- réunion, 58
- Riemann
  - série, 53
  - sommes, 38
- Rolle, 22
- rotation, 125
- scalaire, 90
- Schmidt, 121
- série
  - absolument convergente, 54
  - convergente, 52
  - géométrique, 52
- signature, 79
- similitude, 73
- somme directe, 92
- sous-anneau, 80
- sous-corps, 81
- sous-espace affine, 102
- sous-espace vectoriel, 91
- sous-groupe, 78
- Stirling, 42
- subdivision, 36
- substitution, 78
- suite
  - arithmétique, 33
  - bornée, 31
  - convergente, 31
  - dominée, 42
  - extraite, 32
  - géométrique, 33
  - monotone, 32
  - négligeable, 42
  - prépondérante, 42
  - récurrente, 34
- suites
  - équivalentes, 42
- suites adjacentes, 33
- supplémentaire orthogonal, 122
- supplémentaires, 92
- surjection, 61
- symétrie, 100
- système
  - homogène, 112
  - incompatible, 112
- système complet, 130
- système linéaire, 66
- systèmes équivalents, 112
- Taylor, 83
- Taylor (reste intégral), 45
- Taylor-Lagrange (inégalité), 45
- Taylor-Young, 45
- trace, 110
- transposition, 79
- valeur absolue, 16
- valeur approchée, 11
- valeurs intermédiaires, 19
- valuation p-adique, 76
- variable aléatoire, 136
- variance, 141
- variation de la constante, 49
- vecteur, 90
- voisinage, 11

## Index de la physique

- œil, 214
- accélération, 271
- admittance, 242
- admittance équivalente, 242
- ampère, 229
- amplitude, 189
- amplitude de probabilité, 223
- amplitude maximale, 195
- angle
  - d'incidence, 204
  - de réflexion, 204
  - de réfraction, 204
- armature, 239
- ARQS, 233
- association
  - parallèle, 242
  - série, 242
- bande coupée, 262
- bande passante, 256
- bande passante à -3 dB, 260, 262
- bobine, 240
- bobine d'auto-induction, 332
- bobine de Helmholtz, 299
- Bode (diagramme de), 259
- Bohr (relation de), 220
- branche, 230
- bras de levier, 304
- capacité, 239
- capacité thermique, 339
- Carnot (th.), 366
- célérité de propagation, 193
- centre d'inertie, 277
- centre de force, 312
- centripète, 274
- cercle oculaire, 216
- chaleur, 343
- champ
  - électrostatique uniforme, 297
- champ de force centrale, 312
- charge élémentaire, 228
- circuit électrique, 230
- circuit R-C série, 245
- circuit R-L série, 247
- Claudius, 364
- Clausius, 359, 360
- coefficient
  - compressibilité isotherme, 341
  - de dilatation isobare, 341
- composante
  - continue, 258
  - fondamentale, 258
- condensation, 352
- conductance, 238
- conducteur électrique, 228
- conduction, 343
- constante de Boltzmann, 338
- constante des aires, 313
- convection, 343
- convention
  - entrante, 233
  - sortante, 234
- cornée, 214
- corps vitré, 214
- couplage électromécanique, 328
- couple de forces, 305
- courant
  - alternatif, 229
  - bidirectionnel, 229
  - continu, 229
  - électrique, 228
  - unidirectionnel, 229
- courants de Foucault, 330
- courbe
  - d'ébullition, 355
  - de rosée, 355
  - de saturation, 355
- covolume molaire, 341
- cristallin, 214
- cycle de Carnot, 365
- de Broglie (relation de), 220
- densité de probabilité, 223
- déphasage, 195
- dérivateur, 263
- Descartes, 211
- diagramme
  - d'Amagat, 339
  - de Clapeyron, 339
- diagramme d'équilibre, 354
- diagramme des frigoristes, 369
- diaphragme, 208
- diélectrique, 239
- diffraction, 200
- dipôle, 236
  - actif, 236
  - linéaire, 237
  - passif, 236
  - symétrique, 237
- droite d'action, 304
- dynamique, 277
- échanges
  - thermiques, 343

- effet Joule, 238
- effet photo-électrique, 218
- électrolyte, 228
- émission
  - induite, 220
  - spontanée, 220
- énergie
  - cinétique, 190
  - électrique, 240
  - interne, 347
  - magnétique, 241
  - mécanique, 191
  - potentielle, 190
  - potentielle magnétique, 324
- énergie cinétique, 287
- énergie interne, 339
- énergie mécanique, 290
- énergie potentielle, 286
  - d'interaction, 312
  - effective, 314
- enthalpie, 349, 356
- entropie, 359
  - créée, 360
  - échangée, 360
- équation
  - d'état, 336
  - de van der Waals, 340
- équilibre
  - instable, 293
  - stable, 293
- état
  - de diffusion, 315
  - lié, 315
- état d'équilibre, 336
- état propre stationnaire, 226
- état stationnaire, 224
- étendue spectrale, 192
- f.é.m. induite, 326
- facteur de qualité, 250, 264
- Fermat, 207
- flux
  - du champ magnétique, 325
  - extérieur, 333
  - propre, 332
- fonction d'onde, 223
- fonction de transfert harmonique, 258
- force
  - conservative, 285
  - d'interaction gravitationnelle, 281
  - de frottement, 282
  - de Laplace, 322
  - électromagnétique, 282
  - électrostatique, 282
  - motrice, 284
  - résistante, 284
- force de Lorentz, 296
- fraction massique, 356
- freinage électromagnétique, 330
- fréquence, 229, 231, 258
  - de coupure à -3 dB, 260
  - de coupure à -3 dB, 262
  - de résonance, 266
  - fondamentale, 199
  - harmonique, 199
- fréquence propre, 189
- Fresnel, 197
- Fresnel (vecteur de), 256
- fusion, 352
- gain, 259
- Gauss, 207
- grandeur
  - extensive, 338
  - intensive, 338
- grandissement, 212
- grossissement, 216
- harmonique, 258
- haut-parleur électrodynamique, 330
- humour acqueuse, 214
- image
  - réelle, 207, 212
  - virtuelle, 207, 212
- impédance, 241
  - équivalente, 242
- indice optique, 203
- inductance, 240
  - mutuelle, 333
  - propre, 332
- infrason, 192
- intégrateur, 261
- intensité
  - efficace, 239
- intensité de courant électrique, 228
- interférences, 196
- isentropie, 360
- isotherme, 339
- Kelvin, 359
- liaison pivot, 305
- ligne de champ, 321
- liquéfaction, 352
- loi
  - de Faraday, 326
  - de Joule (première), 349
  - de Joule (seconde), 349
  - de Laplace, 346
  - de Lenz, 326
  - des mailles, 234
  - des nœuds, 233
- lois de Kepler, 317

- longueur d'onde, 195
- lunette astronomique, 215
- machine
  - frigorifique, 364, 366
  - thermique, 364
- maille, 230
- masse, 277
  - inerte, 277
  - pesante, 277
- Melde, 198
- miroir plan, 206
- mode propre, 199
- moment
  - cinétique, 302
  - d'inertie, 303
  - d'une force, 304
  - magnétique, 321
- monovariant, 355
- mouvement
  - circulaire non uniforme, 274
  - circulaire uniforme, 273
  - rectiligne uniforme, 272
  - uniformément accéléré, 272
- nœud, 198, 230
- nerf optique, 214
- Newton, 211
- Norton (modèle de), 243
- objectif, 215
- objet
  - réel, 207, 212
  - virtuel, 207, 212
- oculaire, 215
- onde
  - longitudinale, 193
  - progressive, 193
  - progressive sinusoïdale, 195
  - stationnaire, 198
  - transversale, 193
- oscillateur amorti, 250
- paroi
  - adiabatique, 343
  - diatherme, 343
- pendule pesant, 307
- période, 258
- période propre, 189
- période temporelle, 195
- perméabilité magnétique du vide, 333
- permittivité diélectrique du vide, 316
- phase
  - à l'origine, 189
  - instantanée, 189
- phase à l'origine, 229, 231
- phase d'un corps pur, 353
- phase instantanée, 195
- photon, 219
- plage d'accommodation, 215
- plan d'incidence, 204
- plan focal, 210
- Planck (constante de), 219
- Planck-Einstein (relation de), 219
- point
  - d'ébullition, 355
  - de rosée, 355
  - triple, 355
- point matériel, 270
- portrait de phase, 253, 309
- potentiel efficace, 314
- potentiel électrique, 231
- poussée d'Archimède, 282
- pression, 337
  - de saturation, 355
- pression interne, 341
- puissance, 284
  - instantanée, 237
  - moyenne, 237
- pulsation, 195, 229, 231
  - de résonance, 266
  - propre à -3 dB, 260, 262
  - réduite, 263
- pulsation cyclotron, 300
- pulsation propre, 189, 250
- punctum
  - proximum, 215
  - remotum, 214
- pupille, 214
- quanta, 219
- quantification de l'énergie, 225
- quantité de mouvement, 277
- rails de Laplace, 326
- Rayleigh, 200
- rayon
  - paraxial, 208
- rayon de giration, 300
- rayon lumineux, 202
- rayonnement, 343
- référentiel, 268
- référentiel
  - de Copernic, 281
  - géocentrique, 281
  - terrestre, 281
- réflexion, 203
- réfraction, 203, 204
- réfringent, 204
- règle des moments, 356
- relation de Varignon, 275
- rendement de Carnot, 366
- résistance, 238
  - interne, 243

- résistor ohmique, 238
- résonnance, 198
  - d'amplitude, 255
  - d'intensité, 256
  - de charge, 255
  - de vitesse, 256
- résultante
  - cinétique, 279
  - cinétique, 278
  - dynamique, 279
- retard temporel, 193
- rétime, 214
- Schrödinger (équation de), 223
- signal, 192
  - linéaire non dispersif, 193
  - périodique, 258
- Snell-Descartes, 204
- solénoïde, 332
- solidification, 352
- source
  - chaude, 364
  - de chaleur, 344
  - de travail, 344
  - froide, 364
- source idéale
  - de courant, 243
  - de tension, 242
- source lumineuse, 202
- source réelle, 243
- spectre, 192, 202
  - audible acoustique, 192
  - électromagnétique, 192
- spectrographe de masse, 300
- stigmatisme, 207
- sublimation, 352
- système
  - fermé, 335
  - isolé, 335
  - moteur, 345
  - ouvert, 335
  - résistant, 345
  - thermodynamique, 335
- système aplanétique, 208
- système conservatif, 191
- température de Mariotte, 340
- tension
  - alternative, 231
  - bidirectionnelle, 231
  - continue, 231
  - efficace, 239
  - unidirectionnelle, 231
- tension d'un ressort, 282
- tension électrique, 231
- thermostat, 344
- Thévenin (modèle de), 243
- tire-bouchon de Maxwell, 302
- transformation
  - adiabatique, 344
  - isobare, 344
  - isotherme, 344
  - monobare, 344
  - monotherme, 344
  - réversible, 344
- transition de phase, 353
- translation
  - circulaire, 275
  - rectiligne, 275
- travail, 284, 343
- trou, 228
- ultrason, 192
- valeur
  - efficace, 258
  - moyenne, 258
- vaporisation, 352
- variable d'état, 335
- vecteur d'onde, 195
- vecteur- rotation instantané, 275
- ventre, 198
- vitesse, 271
- vitesse angulaire, 274
- vitesse quadratique moyenne, 337
- vitesse cosmiques, 319
- watt, 237

## Index de la chimie

noyau, 411

acier, 446

acier inoxydable, 446

alliage, 446

alliage d'aluminium, 446

anion, 416

Arrhénius (loi d'), 409

avancement chimique, 401

avancement volumique, 405

bronze, 446

capacité d'une pile, 461

carbone

diamant, 448

graphite, 449

cation, 416

charge effective, 424

chlorure de césium, 453

chlorure de sodium, 454

cohésion, 437

compacité d'un cristal, 440

concentration molaire, 400

constante d'équilibre, 402

coordination, 439

couple Oxy/Red, 457

cristal

covalent, 438

ionique, 438

métallique, 437

moléculaire, 437

covalent, 448

ionique, 453

moléculaire, 451

parfait, 437

cubique faces centrées (cfc), 444

demi-pile, 459

diagramme E-pH, 484

diagramme isochore, 398

dichromate, 458

dismutation, 466

électrode

au calomel saturé, 459

standard à hydrogène, 459

électron

de cœur, 416

de valence, 416

électron, 411

électronégativité, 423

empilement compact, 442

entité chimique, 412

évolution, 403

facteur cinétique, 405

famille chimique, 420

fluide supercritique, 398

force électromotrice (fem), 460

fraction molaire, 399

gaz, 397

Hund, 415

hypochlorite, 458

interaction

de Debye, 431

de Keesom, 431

de London, 431

de van der Waals, 431

isotope, 412

Klechkowski, 414, 415

laiton, 446

Lewis (schéma), 426

liaison hydrogène, 433

liaison métallique, 445

liquide, 397

maille, 437

masse volumique d'un cristal, 440

médiamutation, 466

motif, 437

Nernst (relation de), 462

neutron, 411

nombre d'oxydation (n.o.), 457

nombre quantique, 413

nucléon, 411

orbitale atomique, 414

ordre d'une réaction, 406

oxydant, 457

oxydation, 457

Pauli, 414

permanganate, 458

Peroxyde d'hydrogène, 458

pile, 460

polarité, 429

potentiel d'électrode, 461

pression partielle, 400

proton, 411

quotient réactionnel, 403

rayon atomique, 424

réaction d'oxydo-réduction, 465

réducteur, 457

réduction, 457

règle de l'octet, 427

relation

    d'existence, 463

    de prédominance, 463

relation de Nernst, 462

rérodismutation, 466

site

    cristallographique, 443

    octaédrique, 443

    tétraédrique, 443

solide

    amorphe, 397

    cristallin, 397

    macrovalent, 448

    semi-cristallin, 397

solvant

    aprotogène, 435

    moléculaire, 434

    protogène, 435

sulfure de zinc, 455

thiosulfate, 458

transformation

    chimique, 397

    limitée, 404

    nucléaire, 397

    physique, 397

    totale, 404

variété allotropique, 397

vitesse

    de disparition, 406

    de formation, 406

    globale, 405