الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Zabana de Relizane
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques

جامعة أحمد زبانة - غليزان
Ahmed Zabana University-Relizane

MEMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de MASTER en :

Géométrie différentielle

Intitulé

Géométrie de la métrique Mus-gradient généralisée sur une variété Riemannienne

Présenté par :

Mme : BELALIA Ikram

Devant les membres de jury :

Président : Mme KHERBOUCHE Nawal — Maître de conférence (B)A (U. Relizane)

Encadreur : Mr ZAGANE Abderrahim — Maître de conférence (A) A (U. Relizane)

Examinateur : Mlle CHAOUI Saadia — Maître assistant (B) A (U. Relizane)

Année universitaire : 2024/2025

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

Mes trés chers parents qui ont toujours cru en moi et soutenu mon parcours avec amour et patience .

Mon encadrant « Zagane abderrahim » et mes professeurs pour leur précieuse guidance .

Mes amis qui ont partagé avec moi cette belle aventure académique .

Remerciement

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de mémoire, Monsieur Zagane Abderrahim, pour son accompagnement attentif, ses conseils précieux et sa disponibilité constante tout au long de ce travail.

Je remercie également Madame KHERBOUCHE Nawal et Madame Chaoui Saadia pour avoir accepté de faire partie du jury de soutenance. Leurs remarques pertinentes et leur regard critique ont contribué à enrichir la qualité de ce mémoire.

Enfin, je remercie chaleureusement ma famille pour son soutien moral indéfectible tout au long de mon parcours universitaire.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES

INTRODUCTION

Le thème de recherche abordé dans cette thèse se situe dans le cadre de l'étude de la métrique Mus-gradient généralisée, sur une variété riemannienne. Qui est définie par une déformation non conforme de la métrique riemannienne de cette variété riemannienne.

La déformation des métriques riemanniennes consiste à modifier la métrique riemannienne de telle manière que les variétés riemanniennes aient de meilleures propriétés. Il existe deux types de déformation : soit la déformation conforme, soit la déformation non conforme. Les deux types de déformations sont fondamentaux pour comprendre comment la géométrie d'une variété peut être modifiée tout en préservant ou en changeant certaines propriétés, ce qui est important dans de nombreux domaines de la géométrie et de la physique.

Une déformation conforme d'une métrique riemannienne g sur une variété M s'exprime sous la forme :

$$\widetilde{g}(X,Y) = fg(X,Y),$$

où $f : M \longrightarrow (0,+\infty)$ est une fonction lisse strictement positive.

Une déformation non conforme prend plusieurs formes, par exemple sous la forme

$$\widetilde{g}(X,Y) = g(X,Y) + h(X,Y),$$

où h est un champ de tenseurs symétrique de type $(0,2)$ qui n'est pas proportionnel à g (i.e., $h \neq fg$ pour une fonction f).

En revanche, Benkartab et Mohammed Cherif dans [2] ont introduit la métrique Mus-gradient généralisée, sur une variété riemannienne M, g par une déformation non conforme suivante :

$$\widetilde{g}(X,Y) = \alpha g(X,Y) + (1-\alpha)X(f)Y(f),$$

où f est une fonction lisse sur M et α est une constante réelle telle que $\alpha \in (0,1)$.

Il y a d'autres œuvres sur la déformation des métriques, voir par exemple ([1, 7, 8, 13–15]).

La thèse se compose de trois chapitres :

Premier chapitre : contient des rappels fondamentaux de la géométrie différentielle incluant diverses définitions des concepts suivants : atlas différentiable, variété différentiable, sous-variété, espace tangent, champ de vecteurs, crochet de Lie, tenseurs, Ces notions ont été étayées par des exemples.

Deuxième chapitre : est consacré à l'étude de la géométrie riemannienne : métrique riemannienne, connexion linéaire, connexion de Levi-Civita, tenseur de torsion, tenseur de courbure, courbure sectionnelle, courbure de Ricci et courbure scalaire. Nous étudions également certaines opérateurs sur une variété riemannienne. À la fin du chapitre, nous donnons quelques exemples bien détaillés.

Troisième chapitre, qui est la partie essentielle de ce travail, est consacré à l'étude de la géométrie de la métrique Mus-gradient généralisée : la connexion de Levi-Civita, les différentes courbures, notamment tenseur de courbure, courbure sectionnelle, courbure de Ricci et courbure scalaire. À la fin du chapitre, nous introduisons quelques exemples bien détaillés.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Sommaire

1.1 Variétés différentiables

Définition 1.1. (Carte) :

Soit M un espace topologique séparé[a]*. Une carte de dimension m dans M est un couple (U, φ) tel que les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *U (resp.$\varphi(U)$) est un ouvert de M (resp. $\mathbb{R}^m$).*
2. *$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ est un homéomorphisme.*

---

a. Un espace topologique M est dit séparé si deux points distincts de M possèdent des voisinages disjoints.

Définition 1.2. (Atlas) :

Soit M un espace topologique séparé. Une famille de cartes $\mathcal{U} = \left\{(U_i, \varphi_i)\right\}_{i \in I}$ est dite atlas différentiable de classe C^p $(p \geq 1)$ et de dimension m si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $M = \bigcup\limits_{i \in I} U_i.$
2. *Pour tout $i \in I$, (U_i, φ_i) est une carte de dimension m.*

3. *Pour tous* $i, j \in I$, (U_i, φ_i) *et* (U_j, φ_j) *sont compatibles, i.e.*

$$U_i \cap U_j = \emptyset$$

ou

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

est un difféomorphisme de classe C^p.

Les applications $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ *sont appelées applications de changements de cartes ou applications de transitions.*

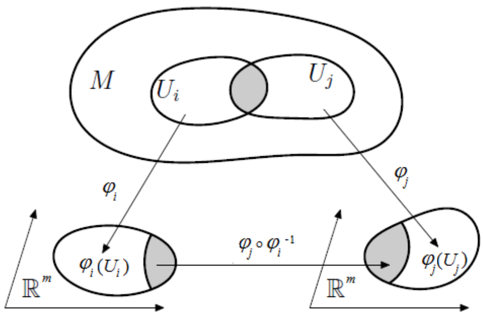

FIGURE 1.1 – Applications de changement de cartes.

Définition 1.3

Soit M *un espace topologique séparé. Une carte* (U, φ) *est dite compatible avec l'atlas* $\mathcal{U}$ *si elle est compatible avec toutes les cartes de l'atlas* $\mathcal{U}$.

Remarques 1.1

1. Si $\mathcal{U}$ est un atlas sur un espace topologique séparé M, alors il existe sur M un unique atlas maximale noté $atl(M)$ contenant $\mathcal{U}$ définit par :

$$atl(M) = \{(U, \varphi) \text{ carte sur } M \text{ compatible avec } \mathcal{U}\}.$$

2. Si (U, φ) une carte locale en $x \in M, \varphi(x) = (\varphi^1(x), \ldots, \varphi^m(x))$, on note alors $x^i = \varphi^i(x)$.
3. $(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ sont appelées coordonnées locales au voisinage de x.
4. La carte (U, φ) sera notée aussi $(U, x^i)_{i=\overline{1,m}}$ est appelée un système de coordonnées locales.

Définition 1.4

Une variété différentiable de dimension m *et de classe* C^p $(p \geq 1)$ *est un espace topologique séparé* M *muni d'un atlas différentiable* $\mathcal{U}$ *de dimension* m *et de classe* C^p. *Nous la noterons parfois par* M^m *ou* $(M^m, \mathcal{U})$ *et pour la dimension par* $\dim M = m$.

Exemple 1.1

$\mathbb{R}^m$ muni de l'atlas $\{(\mathbb{R}^m, Id_{\mathbb{R}})\}$ est une variété différentiable de dimension m et de classe C^∞.

Exemple 1.2 (Projection stéréographique de S^m)

La sphère $S^m = \{x = (x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}, \|x\| = 1\}$ munie de la topologie usuelle induite par celle de $\mathbb{R}^{m+1}$. La structure différentiable de S^m peut être définie par un atlas comportant deux cartes $\{(U_N, i_N), (U_S, i_S)\}$.

En effet, désignons par N et S les pôles Nord et Sud de S^m (c'est-à-dire $N = (1, 0, \dots, 0)$ et $S = (-1, 0, \dots, 0)$ et posons

$$U_N = S^m - \{N\} \;\; et \;\; U_S = S^m - \{S\}$$

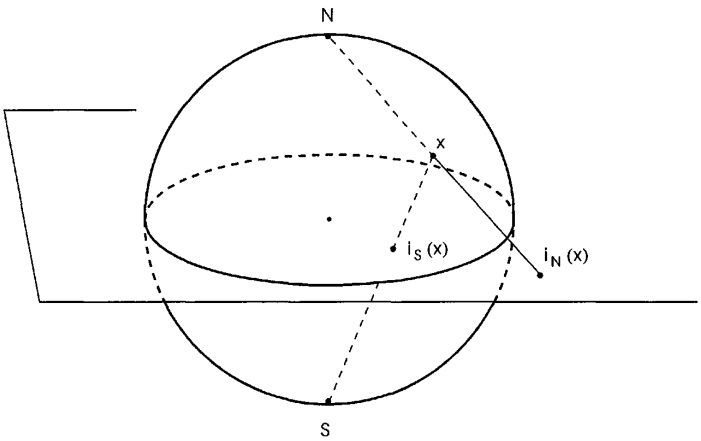

FIGURE 1.2 – Projection stéréographique de S^m

On obtient des homéomorphismes notes i_N et i_S, de U_N et U_S dans $\mathbb{R}^m$, les projections stéréographiques de pôle Nord et Sud, en associant à $x \in U_N$ ou $x \in U_S$ l'intersection avec l'hyperplan $x_0 = 0$ de la droite passant par x et N ou S. Explicitement,

$$i_N(x) = \frac{(x_1, \dots, x_m)}{1 - x_0} \;\; et \;\; i_S(x) = \frac{(x_1, \dots, x_m)}{1 + x_0}$$

et l'on vérifie directement que

$$i_N^{-1}(y) = \frac{(\|y\|^2 - 1, 2y_1, \dots, 2y_m)}{\|y\|^2 + 1} \;\; et \;\; i_S^{-1}(y) = \frac{(-\|y\|^2 + 1, 2y_1, \dots, 2y_m)}{\|y\|^2 + 1}$$

Alors $i_S \circ i_N^{-1}$ est le difféomorphisme de $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ sur lui-même donne par

$$i_S \circ i_N^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|^2}.$$

Exemple 1.3 (Variété produit)

Soient $(M^m, \mathcal{A})$ et $(N^n, \mathcal{B})$ deux variétés de dimensions m et n respectivement. L'espace topologique produit $M \times N$ est une variété de dimension $m \times n$ munie de l'atlas produit suivant :

$$\mathcal{U} = \{(U \times V, \varphi \times \psi) \,/\, (U, \varphi) \in \mathcal{A} \; et \; (V, \psi) \in \mathcal{B}\}$$

où :

$$\begin{array}{rcl} \varphi\times\psi : U\times V & \to & \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n \\ (u,v) & \mapsto & (\varphi(u),\psi(v)). \end{array}$$

Exemple 1.4 (Tore $T^2 = S^1\times S^1$)

Le tore est la surface engendrée par la révolution d'un cercle C autour d'une droite D de son plan. Dans ce cas Le tore est considéré comme une variété produit muni l'atlas produit voir l'Exemple 1.3.

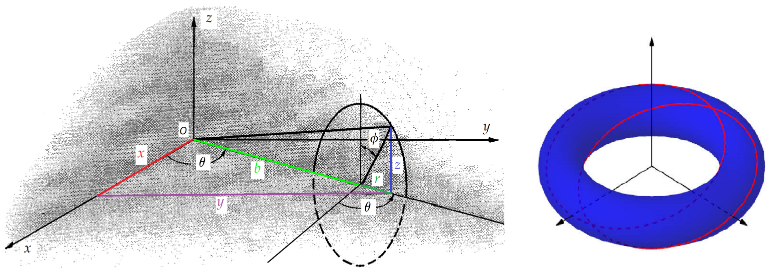

Figure 1.3 – Tore T^2.

1.2 Sous Variété

Définition 1.5

Soient M^m et N^n deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement. Une application $f : M\to N$ est dite différentiable de classe C^∞ en $x\in M$ s'il existe $(U,\varphi)\in atl(M,x)$ et $(V,\psi)\in atl(N,f(x))$ tels que l'application

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1} : \varphi(U)\subset\mathbb{R}^m\to\psi(V)\subset\mathbb{R}^n$$

est de classe C^∞ en $\varphi(x)$.

Définition 1.6

Soient M^m et N^n deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement. Une application $f : M\to N$ est dite différentiable de classe C^∞ sur M si elle est de classe C^∞ en tout point $x\in M$.

Définition 1.7

Soit M^m une variété différentiable de dimension m. On dit qu'une fonction $f : M\to\mathbb{R}$ est de classe C^∞ sur M, si pour chaque carte (U,φ) de M, la fonction $f\circ\varphi^{-1} : \varphi(U)\to\mathbb{R}$ est de classe C^∞.

Nous utilisons les notations suivantes :

$C^\infty(M)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur M,

$C^\infty(M,x)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ au voisinage de $x \in M$.

Exemple 1.5

Toute fonction différentiable $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est diférentiable entre les variétés $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ munies les atlas $\{(\mathbb{R}^m, Id_{\mathbb{R}^m})\}$ et $\{(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})\}$ respectivement.

Définition 1.8

Soient M^m, N^n deux variétés différentiables et $f : M^m \to N^n$ une application différentiable de classe C^∞.

1. *Le rang de l'application f en $x \in M$ relativement aux cartes $(U,\varphi) \in atl(M)$ et $(V,\psi) \in atl(N)$ est le rang de l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(x)$.*
$$rg_x(f) = rg_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = rg\left(\frac{\partial(\psi^i \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}.$$
2. *L'application f est de rang constant r, $(r \leq \min(m,n))$ sur U, si pour tout $x \in U$, $rg_x(f) = r$.*

Théorème 1.1. (Théorème du rang constant)[6]

Soient M^m, N^n deux variétés différentiables et $f : M^m \to N^n$ une application différentiable de classe C^∞. Si f est de rang constant $r \leq \min(m,n)$ sur un ouvert U de M, alors pour tout $x \in M$, il existent $(U,\varphi) \in atl(M,x)$ et $(V,\psi) \in atl(N,f(x))$ telles que :
$$\begin{array}{rcl} \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m & \to & \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \\ (y_1,\cdots,y_m) & \mapsto & (y_1,\cdots,y_r,0,\cdots,0). \end{array}$$

Définition 1.9

Soient M^m et N^n deux variétés différentiables. Une application $f : M^m \to N^n$ est un difféomorphisme de classe C^∞ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *f est bijective.*
2. *f et f^{-1} sont différentiables de classe C^∞.*

Proposition 1.1. [6]

Soient M^m, N^n deux variétés différentiables et $f : M^m \to N^n$ une application différentiable de classe C^∞ injective, alors f est un difféomorphisme de M sur $f(M)$ si et sulement si $rg(f) = m = n$.

Définition 1.10

Soient M^m, N^n deux variétés différentiables et $f : M^m \to N^n$ une application de classe C^∞.

1. *On dit que f est une immersion $($resp. submersion$)$ au point $x \in M$ si $rg_x(f) = m$ $($resp. $rg_x(f) = n)$.*
2. *On dit que f est une immersion $($resp. submersion$)$ si f est une immersion $($resp. submersion$)$ en tout point $x \in M$.*
3. *On dit que f est un plongement si f est une immersion et réalise un homéomorphisme de M sur $f(M)$ muni la topologie induite par celle de N.*

Remarques 1.2

1. Si $f : M^m \to N^n$ est une immersion,$m \leq n$, d'après le Théorème du rang constant, pour tout $x \in M$, il existent $(U, \varphi) \in atl(M, x)$ et $(V, \psi) \in atl(N, f(x))$, alors l'application

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m &\to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \\ (y_1, \cdots, y_m) &\mapsto (y_1, \cdots, y_m, 0, \cdots, 0). \end{aligned}$$

   est une injection.
2. Si $f : M^m \to N^n$ est une submersion, $m \geq n$, d'après le Théorème du rang constant, pour tout $x \in M$, il existent $(U, \varphi) \in atl(M, x)$ et $(V, \psi) \in atl(N, f(x))$, alors l'application

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m &\to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \\ (y_1, \cdots, y_m) &\mapsto (y_1, \cdots, y_n). \end{aligned}$$

   est une projection.

Exemple 1.6

1. L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

   f est une immersion non plongement (non injective).
2. L'application

$$\begin{aligned} f :]0, 2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

   f est un plongement.

Exemple 1.7

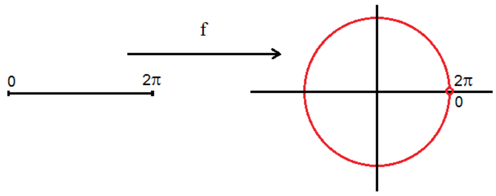

Figure 1.4 – Plongement.

1. L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y, y - z). \end{aligned}$$

   f est une submersion.

2. L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ x = (x_1, \cdots, x_m) &\mapsto \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_m^2 \end{aligned}$$

   f est une submersion sur $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

Définition 1.11

Soient M^m une variété différentiable et $N \subset M$. On dit que N est une sous variété de M de dimension $n \leq m$, si N^n est une variété différentiable et l'injection canonique $i : N \to M$ est un plongement.

Théorème 1.2. [6]

Soient M^m une variété différentiable et $N \subset M$. N est une sous variété de M de dimension $n \leq m$, si et seulement si pour tout $x \in N$, il existe $(U, \varphi) \in atl(M, x)$,

$$y \in U \cap N \Leftrightarrow \varphi_{n+1}(y) = \cdots = \varphi_m(y) = 0.$$

où φ_i les composantes de φ.

Théorème 1.3. [6]

Soient M^m, N^n deux variétés différentiables et $f : M^m \to N^n$ une application de classe C^∞ de rang constant r. Alors pour tout $z \in f(M)$, l'ensemble $f^{-1}(\{z\})$ est une sous variété fermer de M de dimension $m - r$.

Exemple 1.8

La sphère $S^m = \{x = (x_0, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}, \|x\| = 1\}$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{m+1}$ de dimension m. En effet : soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{m+1} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|^2 \end{aligned}$$

On a : $1 \in f(\mathbb{R}^{m+1})$ et $f^{-1}(\{1\}) = S^m$, de plus f est de rang constant égal à 1, donc d'après le Théorème 1.3 S^m est une sous variété de $\mathbb{R}^{m+1}$ de dimension m.

Exemple 1.9

L'espace hyperbolique

$$\mathbb{H}^m = \{x = (x_0, \ldots, x_{m-1}, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}, x_0^2 + \ldots + x_{m-1}^2 - x_m^2 = -1\},$$

en tant que sous espace de $\mathbb{R}^{m+1}$, il est muni de la topologie usuelle induite par celle de $\mathbb{R}^{m+1}$, peut être équipé d'une structure différentiable par un atlas comportant deux cartes $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$, telles que

$U_N = \mathbb{H}^m - \{(1, 0, \ldots, 0)\}$ et $U_S = \mathbb{H}^m - \{(-1, 0, \ldots, 0)\}$,

$$\varphi_N(x) = \frac{(x_1, \ldots, x_m)}{1 - x_0} \quad et \quad \varphi_S(x) = \frac{(x_1, \ldots, x_m)}{1 + x_0}.$$

$$\varphi_N^{-1}(y) = \frac{(-1 - \|y\|^2, 2y_1, \ldots, 2y_m)}{1 - \|y\|^2} \quad et \quad \varphi_S^{-1}(y) = \frac{(1 + \|y\|^2, 2y_1, \ldots, 2y_m)}{1 - \|y\|^2},$$

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y) = -\frac{y}{\|y\|^2}.$$

Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{m+1} &\to \mathbb{R} \\ x = (x_0, \ldots, x_m) &\mapsto x_0^2 + \ldots + x_{m-1}^2 - x_m^2. \end{aligned}$$

On a : $-1 \in f(\mathbb{R}^{m+1})$ et $f^{-1}(\{-1\}) = \mathbb{H}^m$, de plus f est de rang constant égal à 1, donc d'après le Théorème 1.3 $\mathbb{H}^m$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{m+1}$ de dimension m.

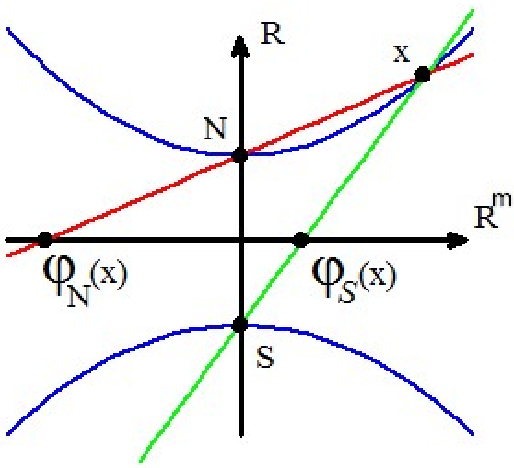

FIGURE 1.5 – Projection stéréographique de $\mathbb{H}^m$.

1.3 Espace Tangent

Définition 1.12

Soient M^m une variété différentiable et $x \in M$. Une application $A : C^\infty(M,x) \to \mathbb{R}$ est appelée une dérivation en x si elle satisfait les règles suivantes pour tous $f, g \in C^\infty(M)$.

1. $A(f+g) = A(f) + A(g)$.
2. $A(f.g) = A(f).g(x) + f(x).A(g)$.
3. *f est constante au voisinage de x, alors $A(f) = 0$.*

L'ensemble de toutes les dérivations en x, s'appelle l'espace tangent de M en x, il est noté T_xM, par définition un vecteur tangent de M en x est un élément de T_xM.

Exemple 1.10

Soit $\gamma : I \to M$ un chemin sur M, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On définie un vecteur tangent en $x = \gamma(t)$, noté $v = \dot{\gamma}(t)$ par $v(f) = \dot{\gamma}(t)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)$ avec $f \in C^\infty(M)$.

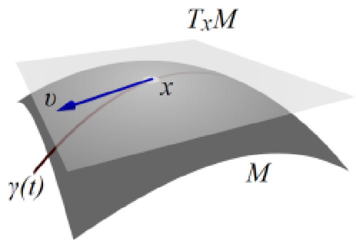

FIGURE 1.6 – Représentation graphique d'un espace tangent.

Remarques 1.3

Soient M^m une variété différentiable de dimension m, alors :

1. T_xM est un espace vectoriel de dimension m.
2. Si (U, φ) une carte locale en $x \in M$. Une base de T_xM est donnée par les m dérivations $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$, telle que, pour tout $f \in C^{+\infty}(M,x)$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_x(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))}{\partial x_i}.$$
3. $TM = \bigcup_{x \in M} T_xM = \{(x,v) | \, x \in M, v \in T_xM\}$ est appelé le fibré tangent à M.
4. Si U est un ouvert de M, alors $T_xU = T_xM$ et $TU = \bigcup_{x \in U} T_xM$.

Exemple 1.11

Le fibré tangent au cercle $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ apparait ainsi comme la variété
$$\{(x,y,X,Y) \in \mathbb{R}^4, x^2 + y^2 = 1, xX + yY = 0\}$$
il est difféomorphe au cylindre $C = S^1 \times \mathbb{R}$.

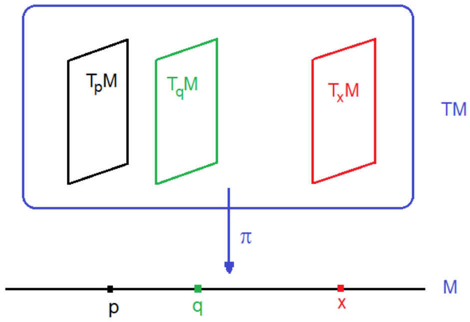

FIGURE 1.7 – Représentation graphique du fibré tangent.

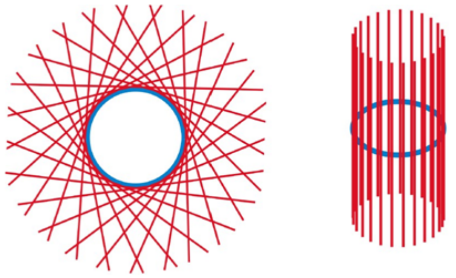

FIGURE 1.8 – Fibré tangent du cercle S^1.

Définition 1.13

Soit M une variété différentiable.

1. *$\pi : TM \to M$ la projection de TM sur M définie par $\pi(x, v) = x$ est une application surjective et de classe C^∞.*
2. *Une section de TM est une application $X : M \to TM$ telle que $\pi \circ X = id_M$.*
3. *Une telle section de TM de classe C^∞ est appelée un champ de vecteurs sur M. L'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté par $\Gamma(TM)$.*

Remarque 1.1

1. Un champ de vecteurs X sur M est considéré comme une application
$$X: \begin{array}{ccc} M & \to & TM \\ x & \mapsto & X_x \in T_xM \end{array}$$
telle que
$$X_x: \begin{array}{ccc} C^\infty(M) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & X_x(f) \end{array}$$
2. Le champ de vecteurs X induit un opérateur $\mathbb{R}$-linéaire sur $C^\infty(M)$
$$X: \begin{array}{ccc} C^\infty(M) & \to & C^\infty(M) \\ f & \mapsto & X(f) \end{array}$$

telle que

$$\begin{array}{rccl} X(f): & M & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & X(f)(x) = X_x(f) \end{array}$$

Remarque 1.2

Soit M^m une variété différentiable.

1. Soit (U,φ) une carte de M^m. En tout point $x \in U$, on a la base canonique $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\}_{i=\overline{1,m}}$ de T_xM. On obtient les champs de vecteurs sur U, définis par
$$\begin{array}{rccl} \frac{\partial}{\partial x_i}: & U & \to & TU \\ & x & \mapsto & \frac{\partial}{\partial x_i}|_x \end{array}$$
Les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = \overline{1,m}$ sont appelés les champs de bases associés à la carte (U,φ) et $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ est appelé la base locale des champs de vecteurs associés.
2. Tout champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ s'écrit
$$X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$
avec des fonctions $X^i : U \mapsto \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$ uniquement déterminées.
3. Soient $(U,\varphi), (V,\psi)$ deux cartes sur M^m et $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=\overline{1,m}}$, $\{\frac{\partial}{\partial y^j}\}_{j=\overline{1,m}}$ désignent les bases des champs de vecteurs associés respectivement aux cartes $(U,\varphi), (V,\psi)$. Si le changement de coordonnées est donné par :
$$\psi \circ \varphi^{-1}(x^1,\ldots,x^m) = (y^1,\ldots,y^m), \quad (x^1,\ldots,x^m) \in \varphi(U \cap V).$$
Alors on a, pour tout $i = \overline{1,m}$
$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

Définition 1.14

Soit M une variété différentiable.

Le crochet de Lie noté $[,]$ est définie par

$$[X,Y] = XY - YX$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Le crochet de Lie a les propriétés suivantes :

1. $[,]$ est bilinéaire et antisymétrique.
2. Pour tous X, Y et $Z \in \Gamma(TM)$
$$\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0.$$
3. Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f, g \in C^\infty(M)$
$$[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

4. Si $X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *et* $Y = \sum_{j=1}^{m} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^{m} (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{x^j}.$$

5. Pour tous $i, j = \overline{1,m}$

$$[\partial_i, \partial_j] = 0.$$

Définition 1.15

Soit $f : M^m \to N^n$ une application différentiable.
Deux champs de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ et $Y \in \Gamma(TN)$ sont dit f-équivalent si

$$df \circ X = Y \circ f,$$

i.e. le diagramme.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "X"'] & N \arrow[d, "Y"'] \\ TM \arrow[r, "df"] & TN \end{tikzcd}$$

On note alors $X \sim_f Y$.

Propriétés 1.1. [6]

Soient $f : M^m \to N^n$ une application de classe C^∞, $X \in \Gamma(TM)$,$Y \in \Gamma(TN)$ et $h \in C^\infty(N)$, on a :

1. $h \circ f \in C^\infty(M)$.
2. $d_x f(X_x)(h) = X_x(h \circ f)$.
3. $(df \circ X)(h) = X(h \circ f)$.
4. $(Y \circ f)_x(h) = Y_{f(x)}(h) = Y(h)(f(x)) = (Y(h) \circ f)(x)$.
5. $(Y \circ f)(h) = Y(h) \circ f$.

Théorème 1.4

Soient $f : M^m \to N^n$ une application de classe C^∞, $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ et $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$. Si

$$X_1 \sim_f Y_1 \quad et \quad X_2 \sim_f Y_2,$$

alors :

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda X_1 + X_2) \sim_f (\lambda Y_1 + Y_2)$.

2) $[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2]$.

Démonstration

Pour tous $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$, $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$ et $h \in C^\infty(N)$, on a :

$$X_1 \sim_f Y_1 \Longleftrightarrow df \circ X_1 = Y_1 \circ f \quad \text{et} \quad X_2 \sim_f Y_2 \Longleftrightarrow df \circ X_2 = Y_2 \circ f$$

1) Nous prouvons que : $(\lambda X_1 + X_2) \sim_f (\lambda Y_1 + Y_2)$ i.e.
$df \circ (\lambda X_1 + X_2) = (\lambda Y_1 + Y_2) \circ f$, alors :

$$\begin{aligned}
(df \circ (\lambda X_1 + X_2))(h) &= (\lambda X_1 + X_2)(h \circ f) \\
&= \lambda X_1(h \circ f) + X_2(h \circ f) \\
&= (\lambda df \circ X_1)(h) + (df \circ X_2)(h) \\
&= (\lambda Y_1 \circ f)(h) + (Y_2 \circ f)(h) \\
&= ((\lambda Y_1 + Y_2) \circ f)(h).
\end{aligned}$$

2) En utilisant les formules 4. et 6. des Propriétés 1.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
df \circ [X_1, X_2](h) &= [X_1, X_2](h \circ f) \\
&= X_1(X_2(h \circ f)) - X_2(X_1(h \circ f)) \\
&= X_1((df \circ X_2)(h)) - X_2((df \circ X_1)(h)) \\
&= X_1((Y_2 \circ f)(h)) - X_2((Y_1 \circ f)(h)) \\
&= X_1(Y_2(h) \circ f) - X_1(Y_2(h) \circ f) \\
&= df \circ X_1(Y_2(h)) - df \circ X_2(Y_1(h)) \\
&= (Y_1 \circ f)(Y_2(h)) - (Y_2 \circ f)(Y_1(h)) \\
&= Y_1(Y_2(h)) \circ f - Y_2(Y_1(h)) \circ f \\
&= [Y_1, Y_2](h) \circ f \\
&= ([Y_1, Y_2] \circ f)(h).
\end{aligned}$$

■

Définition 1.16

Soit $f : M \to N$ un difféomorphisme de classe C^k, $(k \geq 1)$.

1. *On définit l'application f_* par*

$$\begin{aligned}
f_* : \Gamma(TM) &\to \Gamma(TN) \\
X &\mapsto f_*(X) = df \circ X \circ f^{-1}
\end{aligned}$$

Pour tout $y \in N$, $\big(f_*(X)\big)_y = d_{f^{-1}(y)} f\big(X_{f^{-1}(y)}\big)$.
$f_*(X)$ est appelée l'image directe de X.

2. *On définit l'application f^* par*

$$\begin{aligned}
f^* : \Gamma(TN) &\to \Gamma(TM) \\
Y &\mapsto f^*(Y) = (f^{-1})_*(Y)
\end{aligned}$$

$f^*(Y)$ est appelée l'image inverse (Pull-back) de Y.

Propriétés 1.2

Soit $f : M \to N$ un difféomorphisme de classe C^k, $(k \geq 1)$, alors

1. *f_* et f^* sont des isomorphismes linéaires telles que $(f_*)^{-1} = f^*$,*
2. *X et $f_*(X)$ sont f-équivalent,*
3. *Y et $f^*(Y)$ sont f^{-1}-équivalent,*
4. *$f_*(X)(g) = X(g \circ f) \circ f^{-1}$,*
5. *$f^*(Y)(h) = Y(h \circ f^{-1}) \circ f$,*
6. *$f_*(hX) = (h \circ f^{-1})f_*(X)$,*
7. *$f^*(gY) = (g \circ f)f^*(Y)$,*
8. *$f_*([X_1, X_2]) = [f_*(X_1), f_*(X_2)]$,*
9. *$f^*([Y_1, Y_2]) = [f^*(Y_1), f^*(Y_2)]$.*

où $X, X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$, $Y, Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$, $h \in C^\infty(M)$ et $g \in C^\infty(N)$.

Démonstration

En utilisant la définition de l'image directe et l'image inverse d'un champ de vecteurs.

1. Comme df est linéaire alors f_* est linéaire.

pour tout $Y \in \Gamma(TN)$, il existe $X \in \Gamma(TM)$, tel que :

$$\begin{aligned} f_*(X) = Y \quad &\Leftrightarrow \quad df \circ X \circ f^{-1} = Y \\ &\Leftrightarrow \quad df \circ X = Y \circ f \\ &\Leftrightarrow \quad X = (df)^{-1} \circ Y \circ f \\ &\Leftrightarrow \quad X = df^{-1} \circ Y \circ f \\ &\Leftrightarrow \quad X = f^*(Y). \end{aligned}$$

d'où f_* est un isomorphisme linéaire d'inverse f^*.

2. On a $f_*(X) = df \circ X \circ f^{-1} \Leftrightarrow f_*(X) \circ f = df \circ X$ i.e X et $f_*(X)$ sont f-équivalent,

4. Pour tout $g \in C^\infty(N)$, on a $f_*(X)(g) = df(X) \circ f^{-1}(g)$, et d'après la définition de la différentielle $df(X)(g) = X(g \circ f)$ on obtient $f_*(X)(g) = X(g \circ f) \circ f^{-1}$

6. Pour tout $h \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} f_*(hX) &= df \circ (hX) \circ f^{-1} \\ &= df \circ (h \circ f^{-1})X \circ f^{-1} \\ &= (h \circ f^{-1})df \circ X \circ f^{-1} \\ &= (h \circ f^{-1})f_*(X). \end{aligned}$$

7. Pour tout $g \in C^{\infty}(N)$,

$$\begin{aligned}
[f_*(X_1), f_*(X_2)](g) &= (f_*(X_1))(f_*(X_2))(g) - (f_*(X_2))(f_*(X_1))(g) \\
&= X_1(f_*(X_2)(g) \circ f) \circ f^{-1} - X_2(f_*(X_1)(g) \circ f) \circ f^{-1} \\
&= \big[X_1(f_*(X_2)(g) \circ f) - X_2(f_*(X_1)(g) \circ f)\big] \circ f^{-1} \\
&= \big[X_1(X_2(g \circ f) \circ f^{-1} \circ f) - X_2(X_1(g \circ f) \circ f^{-1} \circ f)\big] \circ f^{-1} \\
&= \big[X_1(X_2(g \circ f)) - X_2(X_1(g \circ f))\big] \circ f^{-1} \\
&= [X_1, X_2](g \circ f) \circ f^{-1} \\
&= f_*([X_1, X_2])(g)
\end{aligned}$$

■

Définition 1.17

Soient M une variété différentiable et $x \in M$.

1. *L'espace dual de T_xM est appelé l'espace cotangent à M en x noté T_x^*M, i.e.*

$$T_x^*M = (T_xM)^*.$$

On sait que localement $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)$ est une base de T_xM, on note par $(dx^i|_x)$ sa base duale, nous avons :

$$\langle dx^j|_x ; \frac{\partial}{\partial x^i}|_x \rangle = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(x) = \delta_i^j.$$

2. $T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M = \{(x, \omega)|\, x \in M, \omega \in T_x^*M\}$ *est appelé le fibré cotangent à M.*
3. *Si U est un ouvert de M, alors $T_x^*U = T_x^*M$ et $T^*U = \bigcup_{x \in U} T_x^*M$.*

Définition 1.18

Soit M une variété différentiable.

1. *La projection $\pi : T^*M \to M$ de T^*M sur M telle que $(x, \omega) \mapsto \pi(x, \omega) = x$ est une application surjective et de classe C^{∞}.*
2. *Une section de T^*M est une application $\omega : M \to T^*M$ telle que $\pi \circ \omega = id_M$.*
3. *Une telle section de T^*M de classe C^{∞} est appelée une forme différentielle sur M. L'ensemble des formes différentielles sur M est noté par $\Gamma(T^*M)$.*

Remarque 1.3

1. Soit (U, φ) une carte de M^m

$$\begin{array}{rccl}
dx^i : & U & \to & T^*U \\
& x & \mapsto & dx^i|_x = (\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)^* \in T_x^*U
\end{array}$$

alors $dx^i \in \Gamma(T^*U)$.

2. Tout forme différentielle ω sur M s'écrit
$$\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega_i dx^i$$
avec les fonctions $\omega_i : U \mapsto \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$ uniquement déterminées.
3. Une forme différentielle ω sur M est considéré comme une application
$$\begin{array}{rccl} \omega : & M & \to & T^*M \\ & x & \mapsto & \omega_x \in T_x^*M \end{array}$$
telle que
$$\begin{array}{rccl} \omega_x : & T_xM & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & \omega_x(v) \end{array}$$
4. La forme différentielle ω induite un opérateur $C^\infty(M)$-linéaire
$$\begin{array}{rccl} \omega : & \Gamma(TM) & \to & C^\infty(M) \\ & X & \mapsto & \omega(X) \end{array}$$
telle que
$$\begin{array}{rccl} \omega(X) : & M & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \omega(X)(x) = \omega_x(X_x) \end{array}$$

Tenseur

Définition 1.19

Soit M une variété différentiable.

1. *Pour tout $x \in M$ nous définissons l'espace vectoriel*
$$T_x^{(p,q)}M = \underbrace{T_xM \otimes \ldots \otimes T_xM}_{p-fois} \otimes \underbrace{T_x^*M \otimes \ldots \otimes T_x^*M}_{q-fois}.$$
2. *Un élément $T \in T_x^{(p,q)}M$ est un tenseur de type (p,q) au-dessus de x. Dans une base associé à des coordonnées (x^i) au voisinage de x, il s'écrit*
$$T|_x = T^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(x) \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}(x) \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}(x) \otimes dx^{j_1}|_x \otimes dx^{j_2}|_x \otimes \cdots dx^{j_q}|_x.$$
3. *Pour tout $x \in M$ nous définissons l'espace vectoriel des tenseurs de type (p,q),*
$$T^{(p,q)}M = \bigcup_{x \in M} T_x^{(p,q)}M = \underbrace{TM \otimes \ldots \otimes TM}_{p-fois} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \ldots \otimes T^*M}_{q-fois}.$$

Définition 1.20

Un champ de tenseurs de type (p,q) est une section de classe C^∞ de $T^{(p,q)}M$. L'ensemble des champs de tenseur de type (p,q) est noté par $\Im_q^p(M)$. Relativement à une carte (U, x^i)

de M, un champ de tenseurs $T \in \Im^p_q(M)$ s'écrit en coordonnée locale

$$T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}\,, \tag{1.1}$$

où, $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ sont des fonctions différentiables de classe C^∞ sur U.
La formule (1.1) nous permet d'identifier $\Im^p_q(M)$ à l'espace $C^\infty(M)$-module

$$\{\ B : \bigotimes^q \Gamma(TM) \to \bigotimes^p \Gamma(TM) \mid C^\infty(M)\text{-}q\text{-linéaire}\ \},$$

où, $\bigotimes^s \Gamma(TM) = \underbrace{\Gamma(TM) \otimes \dots \otimes \Gamma(TM)}_{s-fois}$ pour $s \geq 1$ et $\bigotimes^0 \Gamma(TM) = C^\infty(M)$.

Remarque 1.4

De la définition précédent, on a :
$\Im^0_0(M) = C^\infty(M)$, $\Im^1_0(M) = \Gamma(TM)$ et $\Im^0_1(M) = \Gamma(T^*M)$.

Exemple 1.12

1. $\Im^1_q(M)$ s'identifie l'espace des applications $C^\infty(M)$-q-linéaire de $\Gamma(TM)$ dans $\Gamma(TM)$.
2. $\Im^1_1(M)$ s'identifie à l'espace des applications $C^\infty(M)$-linéaire de $\Gamma(TM)$ dans $\Gamma(TM)$.
3. $\Im^0_q(M)$ s'identifie l'espace des applications $C^\infty(M)$-q-linéaire de $\Gamma(TM)$ dans $C^\infty(M)$.
4. $\Im^0_2(M)$ s'identifie l'espace des applications $C^\infty(M)$-bilinéaire de $\Gamma(TM)$ dans $C^\infty(M)$.

Définition 1.21

Soient M, N deux variétés différentiables.

1. *Soit $f : M \to N$ une application de classe C^k, $(k \geq 1)$.*
   On définit l'application f^* par

$$\begin{aligned} f^* : T^{(0.r)}(N) &\to T^{(0.r)}(M) \\ T &\mapsto f^*T \end{aligned}$$

   telle que pour tous $X^1, \dots, X^r \in \Gamma(TM)$ et $x \in M$, on a

$$(f^*T)(X^1, \dots, X^r) = T\big(df(X^1), \dots, df(X^r)\big) \circ f,$$
$$(f^*T)_x(X^1, \dots, X^r) = T_{f(x)}\big(d_x f(X^1_x), \dots, d_x f(X^r_x)\big)$$

   f^*T est appelée l'image inverse (Pull-back) de T.

2. *Soit $f : M \to N$ un difféomorphisme de classe C^k, $(k \geq 1)$.*
   On définit l'application f_* par

$$\begin{aligned} f_* : T^{(0.r)}(M) &\to T^{(0.r)}(N) \\ S &\mapsto f_*S = (f^{-1})^*S \end{aligned}$$

   f_*S est appelée image directe de S.

CHAPITRE 2

VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

Sommaire

2.1 Variété riemannienne

Métrique riemannienne

Définition 2.1

Une métrique riemannienne g sur une variété M est une application

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^{\infty}(M),$$

$C^{\infty}(M)$-bilinéaire, symétrique et définie positive.

Remarques 2.1

Soit g une métrique riemannienne sur une variété M^m, pour tous $V, W \in \Gamma(TM)$, on a :

1.
   - $g(V,W) = g(W,V)$ (symétrique),
   - $g(V,V) \geq 0$ (définie positive),
2. $g \in \Gamma(TM^*) \otimes \Gamma(TM^*)$.
   - Si (U, φ) est une carte sur M, alors :

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \tag{2.1}$$

   où g_{ij} sont des fonctions différentiables sur U appelées composantes du tenseur métrique relativement à la carte (U, φ).

- Si $V = \sum_{i=1}^{m} V^i \partial_i$ et $W = \sum_{j=1}^{m} W^j \partial_j$, on a

$$g(V, W) = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} V^i W^j.$$

3. Pour tout $x \in M$ on a

$$g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive, où T_xM désigne l'espace tangent en x.

Définition 2.2

Une variété riemannienne est un couple (M, g), où M est une variété différentiable et g une métrique riemannienne sur M. Si M est de dimension m, nous la noterons par (M^m, g).

Remarque 2.1

Soient (M^m, g) une variété riemannienne, (U, φ) et (V, ψ) deux cartes sur M. Si g_{ij} (resp. $\tilde{g}_{kl}$) désignent les composantes de g relativement à la carte (U, φ) (resp.(V, ψ)). Si le changement de coordonnées est donné par :

$$y = y(x) = (y^1, \dots, y^m) = \psi \circ \varphi^{-1}(x), \quad x \in \varphi(U \cap V),$$

alors on a :

$$g_{ij} = \sum_{k,l=1}^{m} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \tilde{g}_{kl}, \tag{2.2}$$

où $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=\overline{1,m}}$ et $\{\frac{\partial}{\partial y^j}\}_{j=\overline{1,m}}$ désignent les bases des champs de vecteurs associés respectivement aux cartes (U, φ) et (V, ψ).

Exemple 2.1

1. L'espace Euclidien, $\mathbb{R}^m$ muni du produit scalaire standard

$$g_0(V, W) = \sum_{i=1}^{m} v_i w_i,$$

où $V = (v_1, \dots, v_m)_x, W = (w_1, \dots, w_m)_x \in T_x(\mathbb{R}^m), x \in \mathbb{R}^m$.

2. Dans la boule

$$\mathbb{D}^m = \{x \in \mathbb{R}^m | \quad \|x\| < 1\},$$

on considère le tenseur g_H défini par

$$g_H(v, w) = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} g_0(v, w), \quad v, w \in T_x\mathbb{R}^m, x \in \mathbb{D}^m.$$

g_H est appelée la métrique hyperbolique sur $\mathbb{D}^m$.

3. Soit M une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^m$. Pour tout $x \in M$, on a $T_xM \subset T_x\mathbb{R}^m$. En

posant

$$g(v, w) = g_0(v, w), \quad v, w \in T_x M,$$

on obtient la métrique riemannienne induite par g_0 sur M.

Exemple 2.2

On considère le tore T^2 paramétrée par :

$$\phi : (u, v) \mapsto ((1 + 2\cos v)\cos u, (1 + 2\cos v)\sin u, 2\sin v).$$

$(U, \varphi) \in atl(T^2)$ et $(V, \psi) \in atl(\mathbb{R}^3)$ deux cartes sur T^2 et $\mathbb{R}^3$ respectivement, tel que $(U, \varphi) = (U, \phi^{-1})$ et $(V, \psi) = (\mathbb{R}^3, Id_{\mathbb{R}^3})$ donc $\tilde{g} = \delta_{kl}$ et $y = \psi \circ \varphi^{-1} = \phi$, d'où

$$y(u, v) = (y_1, y_2, y_3) = ((1 + 2\cos v)\cos u, (1 + 2\cos v)\sin u, 2\sin v)$$

et $(x_1, x_2) = (u, v)$. Alors en utilisant la formule (2.2), on trouve :

$$g_{11} = (1 + 2\cos v)^2, \quad g_{22} = 4 \quad et \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Donc la métrique riemannienne induite sur le tore T^2 par g_0 est donnée par :

$$g = (1 + 2\cos v)^2 du^2 + 4dv^2$$

et la matrice associée à cette métrique :

$$G = \begin{pmatrix} (1 + 2\cos v)^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

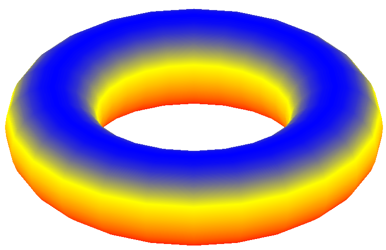

FIGURE 2.1 – Tore T^2.

Définition 2.3

Soient (N^n, h) une variété riemannienne, de dimension n, M^m une variété différentiable de dimension m et $f : M \to N$ une immersion. Alors :

$$f^*h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$$

définie pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $x \in M$ par :

$$f^*h(X, Y)_x = h_{f(x)}(d_x f(X_x), d_x f(Y_x))$$

est une métrique riemannienne sur M, appelée métrique inverse de h.

Remarque 2.2

Soient (U, φ) une carte sur M^m de base locale associée $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=\overline{1,m}}$ et (V, ψ) une carte sur N^n de base locale associée $\{\frac{\partial}{\partial y^j}\}_{j=\overline{1,m}}$, alors :

$$\begin{aligned}(f^*h)_{ij} &= f^*h(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= h(df(\frac{\partial}{\partial x^i}), df(\frac{\partial}{\partial x^j})) \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} h(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}) \circ f \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} (h_{\alpha\beta} \circ f).\end{aligned}$$

Exemple 2.3

On considère la boule $\mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| < 1\}$ et la projection stéréographique :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (y_1, y_2) &\mapsto \left(\frac{2y_1}{1-\|y\|^2}, \frac{2y_2}{1-\|y\|^2}, \frac{1+\|y\|^2}{1-\|y\|^2}\right).\end{aligned}$$

Soit la forme bilinéaire h sur $\mathbb{R}^3$, définie comme suit,

$$h(A, B) = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3,$$

où $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3) \in T_p\mathbb{R}^3$ et $p \in \mathbb{R}^3$.

Les composantes de h sont $h_{\alpha\beta} = 0$, $\alpha \neq \beta$ et $h_{11} = h_{22} = 1$ et $h_{33} = -1$.

On pose $g = f^*h$ alors, on a

$$\begin{aligned} g_{ij} &= (f^*h)_{ij} \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \frac{\partial f^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial y^j} h_{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial f^1}{\partial y^i}\frac{\partial f^1}{\partial y^j} + \frac{\partial f^2}{\partial y^i}\frac{\partial f^2}{\partial y^j} - \frac{\partial f^3}{\partial y^i}\frac{\partial f^3}{\partial y^j}.\end{aligned}$$

Donc, on trouve

$$g_{11} = g_{22} = \frac{4}{(1-\parallel y \parallel^2)^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

i.e. : $\quad g_{ij} = \dfrac{4\delta_{ij}}{(1-\parallel y \parallel^2)^2}$,

d'où la matrice associe à la métrique g est

$$G = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1-\parallel y \parallel^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1-\parallel y \parallel^2)^2} \end{pmatrix}.$$

2.2 Connexion linéaire

Connexion linéaire

Définition 2.4

Une connexion linéaire sur une variété M est une application

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, V) &\mapsto \nabla_X V \end{aligned}$$

vérifiant :

1. $\nabla_X(V + W) = \nabla_X V + \nabla_X W,$
2. $\nabla_X(fV) = X(f)V + f\nabla_X V,$
3. $\nabla_{X+fY} V = \nabla_X V + f\nabla_Y V,$

pour tous $V, W,\ X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$. On dit aussi que $\nabla_X Y$ est la dérivée covariante de Y par rapport à X.

Définition 2.5

Soient ∇ une connexion sur une variété M^m, de dimension m et $\{\partial_i\}_{i=1,m}$ (resp. $\{dx^j\}_{j=\overline{1,m}}$) une base locale de section de $\Gamma(TM)$ (resp. $\Gamma(T^*M)$). On définit les coefficients de Christoffel par

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{k=1}^{m} dx^k(\nabla_{\partial i}\partial j). \tag{2.3}$$

Remarque 2.3

Soit ∇ une connexion linéaire sur une variété M^m .

Dans un système de coordonnées (x^i) sur M, ∇ est complètement définie par les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k et on a :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

En effet, si $X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \sum_{j=1}^{m} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ alors :

$$\nabla_X Y = \sum_{i,k=1}^{m} X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} Y^k + \sum_{j=1}^{m} \Gamma_{ij}^k Y^j\right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Définition 2.6

Une connexion linéaire ∇ sur M^m est dite localement plate, s'il existe une carte (U, φ) sur M telle que $\Gamma_{ij}^k = 0$ pour tous $i, j, k = \overline{1, m}$.

Définition 2.7

Une connexion linéaire ∇ sur M^m est dite ***localement symétrique****, s'il existe une carte (U, φ) sur M telle que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ pour tous $i, j, k = \overline{1, m}$.*

Remarques 2.2

1. Toute connexion linéaire localement plate est localement symétrique.
2. Une connexion est plate si $\Gamma_{ij}^k = 0$ pour tous $i, j, k = \overline{1, m}$ sur M^m.
3. Une connexion est symétrique si $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ pour tous $i, j, k = \overline{1, m}$ sur M^m.

Tenseur de torsion

Définition 2.8

Soient M une variété différentiable et ∇ une connexion linéaire sur M. Le tenseur de torsion associé à ∇ est une application vectorielle $C^\infty(M)$-bilinéaire

$$\mathrm{T} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM),$$

définie par :

$$\mathrm{T}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.
La connexion ∇ est dite ***sans torsion*** *si $T \equiv 0$.*

Remarques 2.3

Soit M^m une variété différentiable.

1. T est un champ de tenseurs de type $(1, 2)$.
2. $\mathrm{T}(X, Y) = -\mathrm{T}(Y, X)$ pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ (T est antisymétrique).
3. La connexion ∇ est sans torsion ssi pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :
$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$
4. **Expression locale :** pour $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_{j=1}^m Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\
&= \sum_{i,j=1}^m \Big(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&\quad - Y^j X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^m X^i Y^j (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^m X^i Y^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

Proposition 2.1

Une connexion linéaire ∇ *est symétrique sur* M *si et seulement si* $\mathrm{T}(X,Y)=0$*, pour tous* $X,Y\in\Gamma(TU)$.

Remarque 2.4

Une condition nécessaire pour qu'une connexion linéaire soit localement plate (resp. plate) est que localement $\mathrm{T}=0$ (resp. $\mathrm{T}=0$).

Théorème 2.1. (fondamentale)[5]

Soit M^m *une variété. Si* $p\in M$ *tel que* $\mathrm{T}_p=0$*, alors il existe une carte* $(U,x^1,\ldots,x^m)$ *telle que pour tous* $i,j,k=\overline{1,m}$*, on a :*

$$\Gamma_{ij}^k(p)=0.$$

Définition 2.9

Soit S *un tenseur de type* $(0,r)$ *sur une variété* M*. La dérivée covariante* ∇S *du tenseur* S *est un tenseur de type* $(0,r+1)$ *défini par :*

$$(\nabla_X S)(Y_1,\ldots,Y_r)=X(S(Y_1,\ldots,Y_r))-\sum_{i=1}^{r}S(Y_1,\ldots,\nabla_X Y_i,\ldots,Y_r).$$

Si S *un tenseur est de type* $(1,r)$ *alors,*

$$(\nabla_X S)(Y_1,\ldots,Y_r)=\nabla_X(S(Y_1,\ldots,Y_r))-\sum_{i=1}^{r}S(Y_1,\ldots,\nabla_X Y_i,\ldots,Y_r),$$

pour tous $X,Y_i\in\Gamma(TM)$ *et* $i=1,\ldots,r$.

Définition 2.10

Une section $V\in\Gamma(TM)$ *est dite parallèle par rapport à la connexion* ∇ *si :*

$$\nabla_X V=0,$$

pour tout $X\in\Gamma(TM)$.

Définition 2.11

Une métrique riemannienne g *sur une variété* M *est dite compatible avec la connexion* ∇ *(ou parallèle) si :*

$$\nabla g=0, \tag{2.4}$$

i.e.

$$X(g(V,W))=g(\nabla_X V,W)+g(V,\nabla_X W), \tag{2.5}$$

pour tous $V,W,X\in\Gamma(TM)$.

Connexion de Levi-Civita

Théorème 2.2

Soit (M, g) *une variété riemannienne, l'application*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM),$$

définie par la formule de Koszul[a]

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) \end{aligned} \tag{2.6}$$

est une connexion linéaire sur M*, appelée connexion de Levi-Civita*[b]

---

a.

Jean-Louis Koszul, né le 3 janvier 1921 à Strasbourg et mort le 12 janvier 2018 à Fontanil-Cornillon près de Grenoble, est un mathématicien français. Membre du groupe Bourbaki, il est surtout connu pour ses travaux en algèbre et en géométrie et pour la formule de Koszul sur les connexions (de Koszul, 1950), qui a formalisé le transport parallèle de vecteurs le long d'une courbe, (Wikipédia).

b.

Tullio Levi-Civita, né le 29 mars 1873 à Padoue, Italie et mort le 29 décembre 1941 à Rome, est un mathématicien italien. Il est connu principalement pour son travail sur le calcul tensoriel et ses applications en théorie de la relativité. La connexion Levi-Civita est un cas particulier des connexions Koszul (1950) et porte le nom de Tullio Levi-Civita. En son honneur pour avoir introduit les concepts de transport parallèle aux fins de la relativité générale,(Wikipédia).

Démonstration

Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$ on a,

$$\begin{aligned} 1)\ 2g(\nabla_{fX} Y, Z) &= fX(g(Y,Z)) + Y(g(Z,fX)) - Z(g(fX,Y)) \\ &\quad + g(Z,[fX,Y]) + g(Y,[Z,fX]) - g(fX,[Y,Z]) \\ &= fX(g(Y,Z)) + Y(f)g(Z,X) + fY(g(Z,X)) \\ &\quad - Z(f)g(X,Y) - fZ(g(X,Y)) - Y(f)g(Z,X) \\ &\quad + fg(Z,[X,Y]) + Z(f)g(Y,X) + fg(Y,[Z,X]) \\ &\quad - fg(X,[Y,Z]) \\ &= fX(g(Y,Z)) + fY(g(Z,X)) - fZ(g(X,Y)) \\ &\quad + fg(Z,[X,Y]) + fg(Y,[Z,X]) - fg(X,[Y,Z]) \\ &= 2fg(\nabla_X Y, Z) \\ &= 2g(f\nabla_X Y, Z), \end{aligned}$$

alors, on trouve $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$.

$$\begin{aligned}
2)\ 2g(\nabla_{X+W}Y, Z) &= (X+W)(g(Y,Z)) + Y(g(Z, X+W)) \\
&\quad -Z(g(X+W, Y)) + g(Z, [X+W, Y]) \\
&\quad +g(Y, [Z, X+W]) - g(X+W, [Y,Z]) \\
&= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\
&\quad +g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) \\
&\quad +W(g(Y,Z)) + Y(g(Z,W)) \\
&\quad -Z(g(W,Y)) + g(Z,[W,Y]) + g(Y,[Z,W]) \\
&\quad -g(W,[Y,Z]) \\
&= 2g(\nabla_X Y, Z) + 2g(\nabla_W Y, Z) \\
&= 2g(\nabla_X Y + \nabla_W Y, Z),
\end{aligned}$$

d'où , $\nabla_{X+W}Y = \nabla_X Y + \nabla_W Y$.

$$\begin{aligned}
3)\ 2g(\nabla_X fY, Z) &= X(g(fY,Z)) + fY(g(Z,X)) - Z(g(X,fY)) \\
&\quad +g(Z,[X,fY]) + g(fY,[Z,X]) - g(X,[fY,Z]) \\
&= X(f)g(Y,Z) + fX(g(Y,Z)) + fY(g(Z,X)) \\
&\quad -Z(f)g(X,Y) - fZ(g(X,Y)) + X(f)g(Z,Y) \\
&\quad +fg(Z,[X,Y]) + fg(Y,[Z,X]) + Z(f)g(X,Y) \\
&\quad -fg(X,[Y,Z]) \\
&= 2X(f)g(Y,Z) + fX(g(Y,Z)) + fY(g(Z,X)) \\
&\quad -fZ(g(X,Y)) + fg(Z,[X,Y]) + fg(Y,[Z,X]) \\
&\quad -fg(X,[Y,Z]) \\
&= 2X(f)g(Y,Z) + 2fg(\nabla_X Y, Z) \\
&= 2g(X(f)Y + f\nabla_X Y, Z),
\end{aligned}$$

d'où $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

De même manière on obtient, $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$. Donc ∇ est une connexion linéaire sur M. ■

Théorème 2.3. (Théorème fondamental de la géométrie riemannienne)

Si (M, g) est une variété riemannienne, alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec g.

Démonstration

Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, on a

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) &= \frac{1}{2}\{g(Z,[X,Y]) - g(Z,[Y,X])\} \\ &= g(Z,[X,Y]), \end{aligned}$$

d'où la connexion de Levi-Civita est sans torsion, et

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) &= \frac{1}{2}\{X(g(Y,Z)) + X(g(Z,Y))\} \\ &= X(g(Y,Z)), \end{aligned}$$

cela prouve que la connexion de Levi-Civita est compatible avec la métrique g sur M. La relation (2.6) détermine complètement la connexion ∇, ce qui donne l'unicité. ■

Proposition 2.2

Soient (M^m, g) une variété riemannienne, de dimension m et ∇ la connexion de Levi-Civita. Si (U, φ) est une carte sur M avec les champs de bases $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ associés, alors les coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k sont donnés par :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^m g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right),$$

où g_{ij} sont les coordonnées de g relativement à la carte (U, φ).

Démonstration

Comme $[\partial_i, \partial_j] = 0$ pour tous $i, j = \overline{1,m}$, où $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ pour tout $i = \overline{1,m}$ on a,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l) &= 2\sum_{s=1}^m g(\Gamma_{ij}^s \partial_s, \partial_l) \\ &= 2\sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} \\ &= \partial_i(g(\partial_j,\partial_l)) + \partial_j(g(\partial_l,\partial_i)) - \partial_l(g(\partial_i,\partial_j)), \end{aligned}$$

donc,

$$\sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$$

d'où,

$$\sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} g^{lk} = \frac{1}{2} g^{lk}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}),$$

et,

$$\sum_{s,l=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} g^{lk} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^m g^{lk}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}),$$

et comme (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}), on a

$$\sum_{l=1}^m g_{sl} g^{lk} = \delta_{ks},$$

où δ_{ks} est le symbole de Kronecker, d'où

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}}\right).$$

Exemple 2.4

Soit $\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{m+1}} / \|x\| = 1\}$ la sphère de dimension m, munie de la métrique induite de $\mathbb{R}^{\mathrm{m+1}}$ donnée par :

$$g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1+\|x\|^2)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

Les symboles de Christoffel se calculent comme suit, où $i, j, k = \overline{1,m}$ et $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$:
$\Gamma_{ij}^{k}(x) = 0$, $\Gamma_{ii}^{i}(x) = \Gamma_{ij}^{j}(x) = \Gamma_{ji}^{j}(x) = -\Gamma_{jj}^{i}(x) = \dfrac{-2x_i}{1+\|x\|^2}$.

Exemple 2.5

On définit sur S^2 la métrique riemannienne

$$g = dx^2 + \cos^2 x\, dy^2.$$

Les symboles de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^{k} = \sum_{l=1}^{2} \frac{1}{2} g^{lk}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i}} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^{j}} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^{l}} g_{ij}\right), \textit{où } i, j, k = 1, 2$$

de la connexion de Levi-Cita associée à g sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{1} & \Gamma_{12}^{1} \\ \Gamma_{21}^{1} & \Gamma_{22}^{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin x \cos x \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{2} & \Gamma_{12}^{2} \\ \Gamma_{21}^{2} & \Gamma_{22}^{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\tan x \\ -\tan x & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3 Courbures

Tenseur de courbure

Définition 2.12

Soit M une variété muni d' une connexion linéaire ∇. On définit le tenseur de courbure, $\mathrm{R} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$, associé à ∇, par :

$$\mathrm{R}(X, Y)V = \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_{[X,Y]} V,$$

pour tous $X, Y, V \in \Gamma(TM)$.

Propriétés 2.1

1. *Le tenseur de courbure R est $C^\infty(M)$-3 linéaire.*
2. $\mathrm{R}(X, Y)V = -\mathrm{R}(Y, X)V$ *pour tous $X, Y, V \in \Gamma(TM)$ (antisymétrique).*

Proposition 2.3. [9, P.210,V1]

Une connexion linéaire ∇ *est plate si et seulement si* $\mathrm{T} = 0$ *et* $\mathrm{R} = 0$.

Définition 2.13

Sur une variété riemannienne (M^m, g), *le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita est appelé tenseur de courbure riemannienne.*

On peut considérer le tenseur de courbure riemannienne comme un tenseur de type $(0, 4)$ *tel que pour tous* $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$

$$\mathrm{R}(X, Y, Z, W) = g(\mathrm{R}(Z, W)Y, X).$$

Le tenseur de courbure riemannienne s'exprime en fonction des coefficients de Christoffel :

$$\mathrm{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^{m} \mathrm{R}_{ijk}^{l} \partial_l,$$
$$\mathrm{R}(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = \mathrm{R}_{ijkl},$$

$$\mathrm{R}_{ijk}^{l} = \partial_i(\Gamma_{jk}^{l}) - \partial_j(\Gamma_{ik}^{l}) + \sum_{s=1}^{m} \{\Gamma_{is}^{l}\Gamma_{jk}^{s} - \Gamma_{js}^{l}\Gamma_{ik}^{s}\},$$

et

$$\mathrm{R}_{ijkl} = \sum_{s=1}^{m} g_{sl} \mathrm{R}_{ijk}^{s},$$

où $(\partial_i)_{i=\overline{1,m}}$ est une base locale des champs de vecteurs sur M. En effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{m} \mathrm{R}_{ijk}^{l} \partial_l &= \mathrm{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k \\
&= \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k \\
&= \nabla_{\partial_i}\Big(\sum_{s=1}^{m} \Gamma_{jk}^{s}\partial_s\Big) - \nabla_{\partial_j}\Big(\sum_{t=1}^{m} \Gamma_{ik}^{t}\partial_t\Big) \\
&= \sum_{s=1}^{m} \Big(\partial_i(\Gamma_{jk}^{s})\partial_s + \sum_{p=1}^{m} \Gamma_{jk}^{s}\Gamma_{is}^{p}\partial_p\Big) - \sum_{t=1}^{m} \Big(\partial_j(\Gamma_{ik}^{t})\partial_t + \sum_{q=1}^{m} \Gamma_{ik}^{t}\Gamma_{jt}^{q}\partial_q\Big) \\
&= \sum_{l=1}^{m} \Big[\sum_{s=1}^{m} (\Gamma_{is}^{l}\Gamma_{jk}^{s} - \Gamma_{js}^{l}\Gamma_{ik}^{s}) + (\partial_i\Gamma_{jk}^{l} - \partial_j\Gamma_{ik}^{l})\Big]\partial_l.
\end{aligned}$$

Nous avons obtenu la formule explicite

$$\mathrm{R}_{ijk}^{l} = \partial_i(\Gamma_{jk}^{l}) - \partial_j(\Gamma_{ik}^{l}) + \sum_{s=1}^{m} (\Gamma_{is}^{l}\Gamma_{jk}^{s} - \Gamma_{js}^{l}\Gamma_{ik}^{s}).$$

On remarque que le tenseur de courbure ne dépend que des coefficients de la métrique g et de leurs dérivées, les symboles de Christoffel ne dépendant eux-mêmes que de g.

Proposition 2.4

Soit (M, g) une variété riemannienne. Le tenseur de courbure riemannienne R a les propriétés suivantes :

1. *R est un champ de tenseurs de type $(1, 3)$,*
2. *$g(\mathrm{R}(X, Y)Z, W) = -g(\mathrm{R}(Y, X)Z, W)$,*
3. *$g(\mathrm{R}(X, Y)Z, W) = -g(\mathrm{R}(X, Y)W, Z)$,*
4. *$g(\mathrm{R}(X, Y)Z, W) = g(\mathrm{R}(Y, X)W, Z)$,*
5. *$g(\mathrm{R}(X, Y)Z, W) = g(\mathrm{R}(Z, W)X, Y)$,*
6. *R vérifie l'identité de Bianchi algébrique*
$$\mathrm{R}(X, Y)Z + \mathrm{R}(Y, Z)X + \mathrm{R}(Z, X)Y = 0,$$
7. *R vérifie l'identité de Bianchi différentielle*
$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0,$$

pour tous $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$.

Courbure sectionnelle

Définition 2.14

Soient (M^m, g) une variété riemannienne de dimension $m \geq 2$ et P un 2-plan de T_xM de base $\{X, Y\}$. On appelle courbure sectionnelle en x de P
$$\mathrm{K}_x(P) = \frac{g(\mathrm{R}(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}.$$

Remarquons que dans la définition précédente, on peut donc supposer que $\{X, Y\}$ est une base orthonormale. Dans ce cas :
$$\mathrm{K}_x(P) = g(\mathrm{R}(X, Y)Y, X).$$

Définition 2.15

Soit (M^m, g) une variété riemannienne, de dimension m. On dit que M est une variété à courbure constante s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in M$ et tout 2-plan P de T_xM, on a :
$$\mathrm{K}_x(P) = k.$$

On dit aussi (M^m, g) est un espace à courbure constante.

Proposition 2.5

Une variété riemannienne (M, g) est de courbure sectionnelle constante k si et seulement *si le tenseur de courbure vérifie l'équation :*

$$\mathrm{R}(X,Y)Z = k(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y),$$

pour tous X, Y *et* $Z \in \Gamma(TM)$.

Exemple 2.6

L'espace euclidien $\mathbb{R}^m$ muni du produit scalaire euclidien g, où $g_{ij} = \delta_{ij}$. On vérifie immédiatement que $\Gamma_{ij}^k = 0$, $\mathrm{R}_{ijk}^l = 0$ donc $\mathrm{R} = 0$. En particulier, la courbure sectionnelle de $(\mathbb{R}^m, g)$ est nulle.

Courbure de Ricci

Définition 2.16

La courbure de Ricci d'une variété riemannienne (M^m, g) *de dimension* m *est un tenseur de type* $(0,2)$ *défini par :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X,Y) &= \mathrm{Tr}_g(Z \mapsto \mathrm{R}(Z,X)Y) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(\mathrm{R}(e_i,X)Y, e_i), \end{aligned}$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, *où* $\{e_i\}_{i=\overline{1,m}}$ *une base orthonormée locale sur* M.

Relativement à la base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=\overline{1,m}}$, les composantes de la courbure de Ricci sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_{ij} &= \mathrm{Ric}(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= \mathrm{Tr}_g \mathrm{R}(*, \frac{\partial}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \sum_{k,l=1}^{m} g^{kl} g(\mathrm{R}(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}) \\ &= \sum_{k,l,s=1}^{m} g^{kl}\mathrm{R}_{kij}^s g_{ls} \\ &= \sum_{k,s=1}^{m} \delta_{ks}\mathrm{R}_{kij}^s \\ &= \sum_{k=1}^{m} \mathrm{R}_{kij}^k. \end{aligned}$$

Définition 2.17

Le tenseur de Ricci d'une variété riemannienne (M^m, g), *est un tenseur de type*$(1,1)$, *défini par :*

$$\mathrm{Ricci}(X) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{R}(X, e_i)e_i,$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$, où $(e_i)_{i=\overline{1,m}}$ est une base orthonormée locale sur M.

Remarque 2.5

Soit (M^m, g) une variété riemannienne. Alors pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = g(\mathrm{Ricci}(X), Y).$$

Définition 2.18

Une variété riemannienne (M, g) est dite variété d'Einstien si pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \lambda g(X, Y)$$

où λ une constante.

Théorème 2.4. [12]

Soit (M^m, g) une variété riemannienne. Si pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \lambda g(X, Y)$$

où $\lambda \in C^\infty(M)$. Alors λ est nécessairement une constante à condition que $m > 2$.

Proposition 2.6

Toute variété riemannienne (M^m, g) de courbure sectionnelle constante k est une variété Einsteinnienne.

Démonstration

Soit $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $(e_i)_{i=\overline{1,m}}$ une base orthonormée sur M .alors,

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} g(\mathrm{R}(X, e_i)e_i, Y).$$

Supposons que (M^m, g) est de courbure sectionnelle constante k. Alors, d'aprés la proposition précédente on a pour tout i fixé,

$\mathrm{R}(X, e_i)e_i = k\big(g(e_i, e_i)X - g(X, e_i)e_i\big)$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X, Y) &= \sum_{i=1}^{m} g\Big(k\big(g(e_i, e_i)X - g(X, e_i)e_i\big), Y\Big)\\ &= k\Big(g\big(\sum_{i=1}^{m} g(e_i, e_i)X, Y\big) - g\big(\sum_{i=1}^{m} g(X, e_i)e_i, Y\big)\Big),\end{aligned}$$

puisque $\sum_{i=1}^{m} g(e_i, e_i) = m$ et $X = \sum_{j=1}^{m} X_j e_j$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} g(X,e_i)e_i &= \sum_{i=1}^{m} g(\sum_{j=1}^{m} X_j e_j, e_i)e_i\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} X_j g(e_j,e_i)e_i\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} X_j \delta_{ij} e_i\\ &= \sum_{i=1}^{m} X_i e_i = X.\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,Y) &= k\big(g(mX,Y)-g(X,Y)\big)\\ &= k(m-1)g(X,Y)\\ &= \lambda g(X,Y),\end{aligned}$$

où $\lambda = k(m-1)$, et donc la variété (M^m, g) est Einsteinnienne. ■

Courbure scalaire

Définition 2.19

On appelle courbure scalaire d'une variété riemannienne (M^m, g) la fonction définie sur M par :

$$\sigma = \mathrm{Tr}_g \mathrm{Ric} = \sum_{i,j=1}^{m} g(\mathrm{R}(e_i,e_j)e_j, e_i),$$

où $(e_i)_{i=\overline{1,m}}$ une base orthonormée locale sur M.

Corollaire 2.1

Si (M^m, g) est une variété riemannienne de courbure sectionnelle constante k, alors pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :

1. $\mathrm{Ricci}(X) = (m-1)kX$,
2. $\mathrm{Ric}(X,Y) = (m-1)kg(X,Y)$,
3. $\sigma = m(m-1)k$.

Exemple 2.7

On considère l'espace hyperbolique $(\mathbb{H}^3, h)$.

$$\mathbb{H}^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\},$$

$$h = \frac{1}{(cz)^2}\big((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\big)\ , \quad c > 0.$$

1. Les symboles de Christoffel non nuls de la connexion de Levi-Cita associée à h sont :
$$\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = \frac{1}{z}\,.$$
$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \Gamma^3_{33} = -\frac{1}{z}\,.$$
2. Les composantes non nulles du tenseur de courbure riemannienne R associé à h sont :
$$\mathrm{R}^1_{212} = \mathrm{R}^1_{313} = \mathrm{R}^2_{121} = \mathrm{R}^2_{323} = \mathrm{R}^3_{131} = \mathrm{R}^3_{232} = \frac{1}{z^2}\,.$$
$$\mathrm{R}^1_{122} = \mathrm{R}^1_{133} = \mathrm{R}^2_{211} = \mathrm{R}^2_{233} = \mathrm{R}^3_{311} = \mathrm{R}^3_{322} = -\frac{1}{z^2}\,.$$
3. Les composantes non nulles de la courbure Ricci Ric_{ij} associé à h sont :
$$\mathrm{Ric}_{11} = \mathrm{Ric}_{22} = \mathrm{Ric}_{33} = -\frac{2}{z^2}.$$
4. La courbure scalaire σ associé à h est :
$$\sigma = -6c^2.$$
5. La courbure sectionnelle $\mathrm{K}(e_i, e_j)$ en (x, y, z) de $P = vect(e_i, e_j)_{1\leqslant i<j\leqslant 3}$, où $e_1 = cz\partial x$, $e_2 = cz\partial y$ et $e_3 = cz\partial z$ est
$$\mathrm{K}(e_1, e_2) = g(\mathrm{R}(e_1, e_2)e_2, e_1) = -c^2.$$
$$\mathrm{K}(e_1, e_3) = g(\mathrm{R}(e_1, e_3)e_3, e_1) = -c^2.$$
$$\mathrm{K}(e_2, e_3) = g(\mathrm{R}(e_2, e_3)e_3, e_2) = -c^2.$$

Nous déduisons que l'espace hyperbolique $(\mathbb{H}^3, h)$ a une courbure sectionnelle constante négative égale à $-c^2$.

Exemple 2.8

On définit sur S^3 la métrique riemannienne
$$g = dx^2 + \cos^2 x\, dy^2 + \sin^2 x\, dz^2.$$
1. Les symboles de Christoffel non nuls de la connexion de Levi-Cita associée à g sont :
$$\Gamma^1_{22} = -\Gamma^1_{33} = \sin x \cos x,\;\; \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\tan x.$$
$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \cot x.$$
2. Les composantes non nulles du tenseur de courbure riemannienne R associé à g sont :
$$\mathrm{R}^2_{121} = -\mathrm{R}^2_{211} = \mathrm{R}^3_{131} = -\mathrm{R}^3_{311} = -1\,.$$
$$\mathrm{R}^1_{122} = -\mathrm{R}^1_{212} = \mathrm{R}^3_{322} = -\mathrm{R}^3_{232} = \cos^2 x\,.$$
$$\mathrm{R}^1_{133} = -\mathrm{R}^1_{313} = \mathrm{R}^2_{233} = -\mathrm{R}^2_{323} = \sin^2 x\,.$$
3. Les composantes non nulles de la courbure Ricci Ric_{ij} associé à g sont :
$$\mathrm{Ric}_{11} = 2\,,\;\; \mathrm{Ric}_{22} = 2\cos^2 x\,,\;\; \mathrm{Ric}_{33} = 2\sin^2 x\,.$$

4. La courbure scalaire σ associé à g est :

$$\sigma = 6.$$

5. La courbure sectionnelle $\mathrm{K}(e_i, e_j)$ en (x, y, z) de $P = vect(e_i, e_j)_{1\leqslant i<j\leqslant 3}$, où $e_1 = \partial x$, $e_2 = \dfrac{1}{\cos x}\partial y$ et $e_3 = \dfrac{1}{\sin x}\partial z$ est

$$\mathrm{K}(e_1, e_2) = g(\mathrm{R}(e_1, e_2)e_2, e_1) = 1.$$

$$\mathrm{K}(e_1, e_3) = g(\mathrm{R}(e_1, e_3)e_3, e_1) = 1.$$

$$\mathrm{K}(e_2, e_3) = g(\mathrm{R}(e_2, e_3)e_3, e_2) = 1.$$

Nous déduisons que la sphère S^3 a une courbure sectionnelle constante positive égale à 1.

2.4 Opérateurs sur une variété riemannienne

Proposition 2.7

Soit (M^m, g) une variété riemannienne. L'application

$$\begin{array}{cccc} \sharp : & \Gamma(T^*M) & \rightarrow & \Gamma(TM) \\ & \omega & \mapsto & \sharp(\omega) \end{array}$$

définie par

$$g(\sharp\omega, X) = \omega(X) \tag{2.7}$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$, est un isomorphisme $C^\infty(M)$-linéaire.

Démonstration

1. Soit $\omega_1, \omega_2 \in \Gamma(T^*M)$, $f, h \in C^\infty(M)$ et pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\begin{aligned} g(\sharp(f\omega_1 + h\omega_2), X) &= (f\omega_1 + h\omega_2)(X) \\ &= f\omega_1(X) + h\omega_2(X) \\ &= fg(\sharp\omega_1, X) + hg(\sharp\omega_2, X) \\ &= g(f\sharp\omega_1, X) + g(h\sharp\omega_2, X) \\ &= g(f\sharp\omega_1 + h\sharp\omega_2, X), \end{aligned}$$

alors

$$\sharp(f\omega_1 + h\omega_2) = f\sharp\omega_1 + h\sharp\omega_2,$$

c'est-à-dire $\sharp$ est linéaire.

2. $\forall Y \in \Gamma(TM), \exists! \omega \in \Gamma(T^*M),\ \sharp\omega = Y.$

En effet, pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on a : $g(\sharp\omega, X) = \omega(X) \Leftrightarrow g(Y, X) = \omega(X),$ alors $\omega = g(Y, *),$ c'est-à-dire $\sharp$ est bijective. ∎

Lemme 2.1

Soit (M^m, g) une variété riemannienne, (U, φ) une carte locale sur M, avec $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ les champs de base associée et $\omega = \sum_{k=1}^{m} \omega_k dx^k$, alors on a

$$\sharp\omega = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \omega_i \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{2.8}$$

où (g^{ij}) désigne la matrice inverse de (g_{ij}).

Démonstration

$$\begin{aligned}
g(\sharp\omega, \frac{\partial}{\partial x^i}) = \omega(\frac{\partial}{\partial x^i}) \quad &\Leftrightarrow \quad g(\sum_{k=1}^{m} (\sharp\omega)^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_{k=1}^{m} \omega_k dx^k (\frac{\partial}{\partial x^i}) \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} (\sharp\omega)^k g_{ki} = \sum_{k=1}^{m} \omega_k \delta_i^k \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} (\sharp\omega)^k g_{ki} = \omega_i \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} g^{ij} \sum_{k=1}^{m} (\sharp\omega)^k g_{ki} = \sum_{i=1}^{m} g^{ij} \omega_i \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} (\sharp\omega)^k \delta_k^j = \sum_{i=1}^{m} g^{ij} \omega_i \\
&\Leftrightarrow \quad (\sharp\omega)^j = \sum_{i=1}^{m} g^{ij} \omega_i \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} (\sharp\omega)^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \omega_i \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&\Leftrightarrow \quad \sharp\omega = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \omega_i \frac{\partial}{\partial x^j}.
\end{aligned}$$

■

L'opérateur gradient

Définition 2.20

Soit (M^m, g) une variété riemannienne, on définit l'opérateur gradient sur M par

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} : C^\infty(M) \quad &\to \quad \Gamma(TM) \\
f \quad &\mapsto \quad \operatorname{grad} f = \sharp df
\end{aligned}$$

Remarque 2.6

Pour tout champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ et toute fonction $f \in C^\infty(M)$, en utilisant la formule (2.7) on trouve :

$$g(\operatorname{grad} f, X) = df(X) = X(f),$$

où df est la différentielle de la fonction f.

Proposition 2.8. (Expression du gradient en coordonnées locales)

Soit (M^m, g) une variété riemannienne et (U, φ) une carte locale sur M, alors pour tout $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$(\mathrm{grad}\, f)|_U = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Démonstration

Relativement à la carte (U, φ), on a :

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

En utilisant la formule (2.8) on trouve :

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\, f &= \sharp df \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} (df)_i \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.7

Si $\{E_i\}_{i=\overline{1,m}}$ une base orthonormale sur M, alors

$$\mathrm{grad}\, f = \sum_{i=1}^{m} E_i(f) E_i. \tag{2.9}$$

Propriétés 2.2

Soit (M^m, g) une variété riemannienne , pour tous $f, h \in X^\infty(M)$, on a :

1. $\mathrm{grad}(f + h) = \mathrm{grad}\, f + \mathrm{grad}\, h$
2. $\mathrm{grad}(fh) = h\mathrm{grad}\, f + f\mathrm{grad}\, h$
3. $(\mathrm{grad}\, f)(h) = (\mathrm{grad}\, h)(f)$
4. $g(\nabla_X \mathrm{grad}\, f, Y) = g(\nabla_Y \mathrm{grad}\, f, X)$,
5. $\nabla_{\mathrm{grad}\, f} \mathrm{grad}\, f = \frac{1}{2} \mathrm{grad}(\|\mathrm{grad}\, f\|^2)$.

Démonstration

Soit $f, h \in C^\infty(M)$, pour tous $X \in \Gamma(TM)$ on a :

1.
$$\begin{aligned} g(\operatorname{grad}(f+h),X) &= X(f+h) \\ &= X(f)+X(h) \\ &= g(\operatorname{grad} f,X)+g(\operatorname{grad} h,X) \\ &= g(\operatorname{grad} f+\operatorname{grad} h,X), \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} g(\operatorname{grad}(fh),X) &= X(fh) \\ &= hX(f)+fX(h) \\ &= hg(\operatorname{grad} f,X)+fg(\operatorname{grad} h,X) \\ &= g(h\operatorname{grad} f+f\operatorname{grad} h,X), \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} f)(h) &= g(\operatorname{grad} h,\operatorname{grad} f) \\ &= g(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} h) \\ &= (\operatorname{grad} h)(f), \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} g(\nabla_X\operatorname{grad} f,Y) &= Xg(\operatorname{grad} f,Y)-g(\operatorname{grad} f,\nabla_X Y) \\ &= X(Y(f))-\nabla_X Y(f) \\ &= [X,Y](f)+Y(X(f))-\nabla_X Y(f) \\ &= Y(X(f))-\nabla_Y X(f) \\ &= Yg(\operatorname{grad} f,X)-g(\operatorname{grad} f,\nabla_Y X) \\ &= g(\nabla_Y\operatorname{grad} f,X). \end{aligned}$$

5. Soit $\{E_i\}_{i=\overline{1,m}}$ une base orthonormale sur M, alors
$$\begin{aligned} \nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f &= \sum_{i=1}^m g(\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f,E_i)E_i \\ &= \sum_{i=1}^m g(\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f)E_i \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{2}E_i g(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f)E_i \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{2}E_i\|\operatorname{grad} f\|^2 E_i \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{grad}(\|\operatorname{grad} f\|^2). \end{aligned}$$

■

L'opérateur divergence

Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs sur une variété riemannienne (M^m, g), on a :

$$\begin{aligned} \nabla X : \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ Z &\mapsto \nabla_z X \end{aligned}$$

est une application $C^\infty(M)$ linéaire (∇X est un tenseur de type $(1,1)$).
Si $x \in M$, alors

$$\begin{aligned} (\nabla X)_x : \Gamma(T_x M) &\rightarrow \Gamma(T_x M) \\ v &\mapsto (\nabla_v X)_x \end{aligned}$$

est une application linéaire d'espace vectoriel.

Définition 2.21

Soit (M^m, g) une variété riemannienne.
La divergence d'un champ de vecteur $X \in \Gamma(TM)$, notée $\operatorname{div} X$ est une fonction sur M définie par

$$\operatorname{div} X = \operatorname{Tr}_g(\nabla X).$$

Remarque 2.8

Si $\{E_i\}_{i=\overline{1,m}}$ une base orthonormale sur M, alors

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{E_i} X, E_i). \tag{2.10}$$

Proposition 2.9. (Expression de la divergence en coordonnées locales)

Soit (M^m, g) une variété riemannienne, pour tout $X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM)$ on a

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m} X^j \Gamma_{ij}^i\right).$$

Démonstration

Sur une carte locale sur M nous avons,

$$X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ et } \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

alors,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{m} dx_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X^j \frac{\partial}{\partial X^j}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} dx^i(\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^{m} X^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}) \\
&= \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m} X^j \Gamma_{ij}^i).
\end{aligned}$$

■

Propriétés 2.3

Soit (M^m, g) une variété riemannienne, pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a :

1. $\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$,
2. $\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div} X + X(f)$.

Démonstration

On applique directement la définition du divergence, soit (E_i) une base orthonormée locale sur M, on a :

1)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(X+Y) &= \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{E_i}(X+Y), E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{E_i} X, E_i) + \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{E_i} Y, E_i) \\
&= \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(fX) &= \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{E_i}(fX), E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} g(E_i(f)X + f\nabla_{E_i} X, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} E_i(f) g(X, E_i) + f\sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{E_i} X, E_i) \\
&= X(f) + f\operatorname{div} X.
\end{aligned}$$

■

La Hessienne d'une fonction

Définition 2.22

Soient (M^m, g) une variété riemannienne et $f \in C^\infty(M)$. La Hessienne de la fonction f noté Hess_f , est unne application $C^\infty(M)$-bilinéaire, définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hess}_f : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) & \to & C^\infty(M) \\ (X, Y) & \mapsto & \mathrm{Hess}_f(X, Y) = g(\nabla_X \mathrm{grad}\, f, Y). \end{array}$$

Proposition 2.10

Soient (M^m, g) une variété riemannienne et $f \in C^\infty(M)$. La Hessienne de la fonction f est une application $C^\infty(M)$-bilinéaire symétrique.

Démonstration

En utilisant la bilinéarité de g, la linéarité de ∇ et la formule 4. des Propriétés 2.2, nous obtenons que la Hessienne est $C^\infty(M)$-bilinéaire symétrique. ∎

Remarque 2.9

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\mathrm{Hess}_f(X, Y) = X(Y(f)) - \nabla_X Y(f). \tag{2.11}$$

L'opérateur Laplacien

Définition 2.23

Soit (M^m, g) une variété riemannienne, on définit l'opérateur laplacien noté Δ, sur M par

$$\begin{array}{rcl} \Delta : C^\infty(M) & \to & C^\infty(M) \\ f & \mapsto & \Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f). \end{array}$$

Remarque 2.10

Si $\{E_i\}_{i=\overline{1,m}}$ une base orthonormale sur M, alors de la définition de la Hessienne et la formule (2.11), on trouve :

1. $\Delta f = \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{E_i} \mathrm{grad}\, f, E_i) = \mathrm{Tr}_g(\mathrm{Hess}_f)$,
2. $\Delta f = \sum_{i=1}^{m} (E_i(E_i(f)) - \nabla_{E_i} E_i(f))$.

Propriétés 2.4

Soit (M^m, g) *une variété riemannienne, pour tout* $f, h \in C^\infty(M)$*, on a :*

1. $\Delta(f+h) = \Delta f + \Delta h$,
2. $\Delta(fh) = h\Delta f + f\Delta h + 2g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h)$.

Démonstration

1. Soit $f, h \in C^\infty(M)$, en utilisant les propriétés des opérateur grad et div, on obtient

$$\begin{aligned}\Delta(f+h) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f+h))\\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f + \operatorname{grad} h)\\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + \operatorname{div}(\operatorname{grad} h)\\ &= \Delta f + \Delta h.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\Delta(fh) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(fh))\\ &= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h + h \operatorname{grad} f)\\ &= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h) + \operatorname{div}(h \operatorname{grad} f)\\ &= f \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) + (\operatorname{grad} h)(f) + h \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + (\operatorname{grad} f)(h)\\ &= f\Delta h + h\Delta f + 2g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h).\end{aligned}$$

■

Proposition 2.11

Soit (M^m, g) *une variété riemannienne, pour tout* $f \in C^\infty(M)$*, on a :*

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}).$$

Démonstration

Soit $f \in C^\infty(M)$, alors

$$\begin{aligned}\Delta f &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)\\ &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x^j})\\ &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(\frac{\partial}{\partial x^i} g(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x^j}) - g(\operatorname{grad} f, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}))\\ &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial f}{\partial x^j}) - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k g(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x^k}))\\ &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k})\end{aligned}$$

■

Exemple 2.9

Soit $\mathbb{R}^m$ muni du produit scalaire standard $(g_{ij} = \delta_{ij})$, alors pour tous fonction différentiable f sur $\mathbb{R}^m$ et $X = (X^1, \dots, X^m)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$, on a :

1. $$\mathrm{grad}\, f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m})$$

2. $$\mathrm{div}\, X = \sum_{i=}^{m} \frac{\partial X^i}{\partial x^i} = \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial X^m}{\partial x^m}$$

3. $$\Delta\, f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}.$$

Exemple 2.10

Soient $\mathbb{R}^2$ munie la métrique

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $X = X^1 e_1 + X^2 e_2$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$, où f, X^1 et X^2 sont des fonctions dépendant des variables r et θ en coordonnées polaires.

Les symboles de Christoffel non nuls de la connexion de Levi-Cita associée à g sont :

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \; et \; \Gamma_{22}^1 = -r.$$

Dans la base orthonormée

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial r} \; et \; e_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

on a :

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_1} e_2 = 0, \; \nabla_{e_2} e_1 = \frac{1}{r} e_2 \; , \; \nabla_{e_2} e_2 = -\frac{1}{r} e_1.$$

1. $$\mathrm{grad}\, f = \sum_{i=1}^{2} e_i(f) e_i = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

2. $$\mathrm{div}\, X = \sum_{i=1}^{2} g(\nabla_{e_i} X, e_i) \quad = \quad \frac{\partial X^1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial X^2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} X^1.$$

3. $$\Delta\, f = \sum_{i=1}^{2} (e_i(e_i(f)) - \nabla_{e_i} e_i(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}.$$

CHAPITRE 3

GÉOMÉTRIE DE LA MÉTRIQUE MUS-GRADIENT GÉNÉRALISÉE

Sommaire

3.1 Métrique Mus-gradient généralisée

Définition 3.1

Soient (M^m, g) une variété riemannienne et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^\infty(M)$. On définit sur M une nouvelle métrique riemannienne appelée Mus-gradient généralisée , notée g^α par

$$g^\alpha(X, Y) = \alpha g(X, Y) + (1 - \alpha)X(f)Y(f), \tag{3.1}$$

pour tous champs de vecteurs X et Y sur M, où α est une constante réelle.

Notons que si $\alpha = 1$, alors $g^\alpha = g$. Dans ce qui suit, nous considérons $\alpha \in (0, 1)$ et $\|\mathrm{grad}\, f\| = 1$.

Remarque 3.1

Soit $(E_i)_{i=\overline{1,m}}$ une base orthonormale de champs vecteurs associée à g telle que $E_1 = \mathrm{grad}\, f$, on a :

$$\begin{aligned}
g^\alpha(E_1, E_1) &= 1, \\
g^\alpha(E_i, E_1) &= 0 \quad i = \overline{2, m}, \\
g^\alpha(E_i, E_j) &= \alpha\delta_{ij} \quad i, j = \overline{2, m}.
\end{aligned}$$

On pose : $E_1^\alpha = E_1$, $E_i^\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} E_i \quad i = \overline{2, m}$.
Alors $(E_i^\alpha)_{\overline{1,m}}$ est une base orthonormale de champs de vecteurs associée à g^α. Relativement à la base $(E_i^\alpha)_{i=\overline{1,m}}$, la matrice associée à g^α est la matrice unitaire.

Remarque 3.2

Soient $X \in \Gamma(TM)$, en utilisant (3.1), les formule 4. et 5. des Propriétés 2.2, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
g^\alpha(X, \operatorname{grad} f) &= g(X, \operatorname{grad} f) = X(f), && (3.2)\\
\nabla_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f &= 0 && (3.3)\\
\operatorname{Hess}_f(X, \operatorname{grad} f) &= 0,. && (3.4)
\end{aligned}
$$

où ∇ est la connexion de Levi-civita de (M, g).

3.2 Connexion de Levi-civita

Théorème 3.1

Soit (M, g) une variété riemannienne .Si ∇^α désigne la connexion de Levi-civita de (M, g^α), alors :

$$\nabla^\alpha_X Y = \nabla_X Y + (1 - \alpha)\operatorname{Hess}_f(X, Y) \operatorname{grad} f. \tag{3.5}$$

Démonstration

Soient $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. En utilisant la formule de Koszul (2.6), nous avons :

$$\begin{aligned}
2g^{\alpha}(\nabla^{\alpha}_X Y, Z) &= X(g^{\alpha}(Y,Z)) + Y(g^{\alpha}(Z,X)) - Z(g^{\alpha}(X,Y)) \\
&\quad + g^{\alpha}(Z,[X,Y]) + g^{\alpha}(Y,[Z,X]) - g^{\alpha}(X,[Y,Z]) \\
&= X(\alpha g(Y,Z) + (1-\alpha)Y(f)Z(f)) \\
&\quad + Y(\alpha g(Z,X) + (1-\alpha)Z(f)X(f)) \\
&\quad - Z(\alpha g(X,Y) + (1-\alpha)X(f)Y(f)) \\
&\quad + \alpha[g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])] \\
&\quad + (1-\alpha)[Z(f)[X,Y](f) + Y(f)[Z,X](f) - X(f)[Y,Z](f)] \\
&= \alpha[X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g(Z,[X,Y]) \\
&\quad + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])] + (1-\alpha)[X(Y(f)Z(f)) \\
&\quad + Y(Z(f)X(f)) - Z(X(f)Y(f)) + Z(f)[X,Y](f) \\
&\quad + Y(f)[Z,X](f) - X(f)[Y,Z](f)] \\
&= 2\alpha g(\nabla_X Y, Z) + (1-\alpha)X(Y(f)Z(f)) \\
&\quad + (1-\alpha)Y(Z(f)X(f)) - (1-\alpha)Z(X(f)Y(f)) \\
&\quad + (1-\alpha)Z(f)[X,Y](f) + (1-\alpha)Y(f)[Z,X](f) \\
&\quad - (1-\alpha)X(f)[Y,Z](f) \\
&= 2\alpha g(\nabla_X Y, Z) + 2(1-\alpha)X(Y(f))Z(f) \\
&= 2(g^{\alpha}(\nabla_X Y, Z) - (1-\alpha)(\nabla_X Y)(f)Z(f)) \\
&\quad + 2(1-\alpha)X(Y(f))Z(f) \\
&= 2g^{\alpha}(\nabla_X Y, Z) + 2(1-\alpha)(X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f))g^{\alpha}Z(f)
\end{aligned}$$

En utilisent les formules (2.11) et (3.2), on trouve

$$\begin{aligned}
&= 2g^{\alpha}(\nabla_X Y, Z) + 2(1-\alpha)(X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f))g^{\alpha}(\operatorname{grad} f, Z) \\
&= 2g^{\alpha}(\nabla_X Y + (1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(X,Y)\operatorname{grad} f, Z)
\end{aligned}$$

donc : $\nabla^{\alpha}_X Y = \nabla_X Y + (1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(X,Y)\operatorname{grad} f$ ■

3.3 Courbures

Tenseur de courbure

Théorème 3.2

Soient (M^m, g) une variété riemannienne et g^{α} la métrique Mus-gradient généralisée définie sur M. Si R (resp. R^{α}) dénote la tenseur de courbure associé à g (resp. g^{α}). Alors, *pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, nous avons :*

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^{\alpha}(X,Y)Z &= \mathrm{R}(X,Y)Z - (1-\alpha)g(\mathrm{R}(X,Y)Z, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\ &+(1-\alpha)(\mathrm{Hess}_f(Y,Z)\nabla_X \operatorname{grad} f - \mathrm{Hess}_f(X,Z)\nabla_X \operatorname{grad} f). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Démonstration

Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

$$\mathrm{R}^{\alpha}(X,Y)Z = \nabla^{\alpha}_X \nabla^{\alpha}_Y Z - \nabla^{\alpha}_Y \nabla^{\alpha}_X Z - \nabla^{\alpha}_{[X,Y]} Z$$

$$\begin{aligned} i) \quad \nabla^{\alpha}_X \nabla^{\alpha}_Y Z &= \nabla^{\alpha}_X (\nabla_Y Z + (1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(Y,Z)\operatorname{grad} f) \\ &= \nabla^{\alpha}_X \nabla_Y Z + \nabla^{\alpha}_X ((1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(Y,Z)\operatorname{grad} f) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + (1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(X, \nabla_Y Z)\operatorname{grad} f \\ &\quad +X((1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(Y,Z))\operatorname{grad} f \\ &\quad +(1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(Y,Z)\nabla^{\alpha}_X \operatorname{grad} f \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + (1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(X, \nabla_Y Z)\operatorname{grad} f \\ &\quad -(1-\alpha)^2 \mathrm{Hess}_f(X, \operatorname{grad} f)\mathrm{Hess}_f(Y,Z)\operatorname{grad} f \\ &\quad +(1-\alpha)(g(\nabla_X \nabla_Y \operatorname{grad} f, Z) + \mathrm{Hess}_f(Y, \nabla_X Z))\operatorname{grad} f \\ &\quad +(1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(Y,Z)\nabla_X \operatorname{grad} f \\ &\quad +(1-\alpha)^2 \mathrm{Hess}_f(Y,Z)\mathrm{Hess}_f(X, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + (1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(X, \nabla_Y Z)\operatorname{grad} f \\ &\quad +(1-\alpha)(g(\nabla_X \nabla_Y \operatorname{grad} f, Z) + \mathrm{Hess}_f(Y, \nabla_X Z))\operatorname{grad} f \\ &\quad +(1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(Y,Z)\nabla_X \operatorname{grad} f\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad \nabla^{\alpha}_Y \nabla^{\alpha}_X Z &= \nabla_Y \nabla_X Z + (1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(Y, \nabla_X Z)\operatorname{grad} f \\ &\quad +(1-\alpha)(g(\nabla_Y \nabla_X \operatorname{grad} f, Z) + \mathrm{Hess}_f(X, \nabla_Y Z))\operatorname{grad} f \\ &\quad +(1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(X,Z)\nabla_Y \operatorname{grad} f\ . \end{aligned}$$

$$iii) \quad \nabla^{\alpha}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + (1-\alpha)\mathrm{Hess}_f([X,Y],Z)\operatorname{grad} f.$$

D'où , pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^{\alpha}(X,Y)Z &= \mathrm{R}(X,Y)Z - (1-\alpha)g(\mathrm{R}(X,Y)Z, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\ &+(1-\alpha)(\mathrm{Hess}_f(Y,Z)\nabla_X \operatorname{grad} f - \mathrm{Hess}_f(X,Z)\nabla_Y \operatorname{grad} f). \end{aligned}$$

■

Courbure sectionnelle

Proposition 3.1

Soient (M^m, g) une variété riemannienne et g^α la métrique Mus-gradient généralisée définie sur M. Si K (resp. K^α) désigne la courbure sectionnelle de (M^m, g) (resp. (M^m, g^α)), alors on a :

$$\mathrm{K}^\alpha(X,Y) = \frac{\mathrm{K}(X,Y) + (1-\alpha)(\mathrm{Hess}_f(X,X)\mathrm{Hess}_f(Y,Y) - \mathrm{Hess}_f(X,Y)^2)}{\alpha + (1-\alpha)(X(f)^2 + Y(f)^2)}. \tag{3.7}$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ deux champs de vecteurs orthonormés par rapport à g.

Démonstration

La courbure sectionnelle de (M^m, g^α) définie par

$$\mathrm{K}^\alpha = \frac{g^\alpha(\mathrm{R}^\alpha(X,Y)Y,X)}{g^\alpha(X,X)g^\alpha(Y,Y) - g^\alpha(X,Y)^2}$$

$$\begin{aligned}
g^\alpha(\mathrm{R}^\alpha(X,Y)Y,X) &= \alpha g(\mathrm{R}^\alpha(X,Y)Y,X) \\
&\quad +(1-\alpha)g(\mathrm{R}^\alpha(X,Y)Y, \mathrm{grad}\, f)X(f) \\
&= \alpha g(\mathrm{R}^\alpha(X,Y)Y,X) \\
&\quad -\alpha(1-\alpha)g(\mathrm{R}(X,Y)Y, \mathrm{grad}\, f)X(f) \\
&\quad +\alpha(1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(Y,Y)\mathrm{Hess}_f(X,X) \\
&\quad -\alpha(1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(X,Y)\mathrm{Hess}_f(Y,X) \\
&\quad +(1-\alpha)g(\mathrm{R}(X,Y)Y, \mathrm{grad}\, f)X(f) \\
&\quad -(1-\alpha)^2 g(\mathrm{R}(X,Y)Y, \mathrm{grad}\, f)X(f) \\
&\quad +\alpha(1-\alpha)^2\mathrm{Hess}_f(X, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{Hess}_f(Y,Y)X(f) \\
&\quad -(1-\alpha)^2\mathrm{Hess}_f(X,Y)\mathrm{Hess}_f(Y, \mathrm{grad}\, f)X(f) \\
&= \alpha g(\mathrm{R}(X,Y)Y,X) - \alpha(1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(X,Y)^2 \\
&\quad +\alpha(1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(X,X)\mathrm{Hess}_f(Y,Y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^\alpha(X,X)g^\alpha(Y,Y) - g^\alpha(X,Y)^2 &= (\alpha g(X,X) + (1-\alpha)X(f)^2) \\
&\quad (\alpha g(Y,Y) + (1-\alpha)Y(f)^2) \\
&\quad -(\alpha g(X,Y) + (1-\alpha)X(f)Y(f))^2 \\
&= \alpha^2 + \alpha(1-\alpha)(X(f)^2 + Y(f)^2) .
\end{aligned}$$

d'où , la division de $g^\alpha(\mathrm{R}^\alpha(X,Y)Y,X)$ par $g^\alpha(X,X)g^\alpha(Y,Y) - g^\alpha(X,Y)^2$ donne le résultat.

■

Tenseur de Ricci

Proposition 3.2

Soient (M^m, g) une variété riemannienne et g^α la métrique Mus-gradient généralisée définie sur M . Si Ricci *(resp.* Ricci^α*) dénote le tenseur de Ricci associé à g (resp. g^α). Alors, pour tout $X \in \Gamma(TM)$, nous avons :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ricci}^\alpha(X) &= \frac{1}{\alpha}\mathrm{Ricci}(X) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\mathrm{R}(X, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f \\
&\quad -\frac{(1-\alpha)}{\alpha}Ric(X, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\Delta f \nabla_X \mathrm{grad}\, f \\
&\quad -\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\nabla_{(\nabla_X \mathrm{grad}\, f)}\mathrm{grad}\, f. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Démonstration

Soit $(E_i)_{i=\overline{1,m}}$ une base orthonormale de champs vecteurs associée à g, alors $(E_i^\alpha)_{i=\overline{1,m}}$ est une base orthonormale de champs de vecteurs associée à g^α où

$$E_1^\alpha = E_1 = \mathrm{grad}\, f \quad , \quad E_i^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}E_i \quad i = \overline{2, m}.$$

De la définition du tenseur de Ricci, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ricci}^\alpha(X) &= \sum_{i=1}^m \mathrm{R}^\alpha(X, E_i)E_i \\
&= \mathrm{R}^\alpha(X, E_1^\alpha)E_1^\alpha + \sum_{i=2}^m \mathrm{R}^\alpha(X, E_i^\alpha)E_i^\alpha \\
&= \mathrm{R}^\alpha(X, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=2}^m \mathrm{R}^\alpha(X, E_i)E_i \\
&= \mathrm{R}(X, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f - (1-\alpha)g(\mathrm{R}(X, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f \\
&\quad +(1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f)\nabla_X \mathrm{grad}\, f \\
&\quad -(1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(X, \mathrm{grad}\, f)\nabla_{\mathrm{grad}\, f}\mathrm{grad}\, f \\
&\quad +\frac{1}{\alpha}\sum_{i=2}^m \Big(\mathrm{R}(X, E_i)E_i - (1-\alpha)g(\mathrm{R}(X, E_i)E_i, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f \\
&\quad +(1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(E_i, E_i)\nabla_X \mathrm{grad}\, f - (1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(X, E_i)\nabla_{E_i}\mathrm{grad}\, f\Big) \\
&= \mathrm{R}(X, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f + \frac{1}{\alpha}\mathrm{Ricci}(X) - \frac{1}{\alpha}\mathrm{R}(X, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f \\
&\quad -\frac{(1-\alpha)}{\alpha}g(\mathrm{Ricci}(X), \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f \\
&\quad +\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\Delta f \nabla_X \mathrm{grad}\, f - \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\nabla_{\nabla_X \mathrm{grad}\, f}\mathrm{grad}\, f \\
&= \frac{1}{\alpha}\mathrm{Ricci}(X) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\mathrm{R}(X, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f \\
&\quad -\frac{(1-\alpha)}{\alpha}Ric(X, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\Delta f \nabla_X \mathrm{grad}\, f \\
&\quad -\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\nabla_{(\nabla_X \mathrm{grad}\, f)}\mathrm{grad}\, f.
\end{aligned}$$

Courbure de Ricci

Proposition 3.3

Soient (M^m, g) une variété riemannienne et g^α la métrique Mus-gradient généralisée définie sur M . Si Ric (resp. Ric^α) dénote la courbure de Ricci associé à g (resp. g^α). Alors, pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}^\alpha(X,Y) &= \mathrm{Ric}(X,Y) - (1-\alpha)g(\mathrm{R}(X, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f, Y) \\ &\quad +(1-\alpha)\Delta f \mathrm{Hess}_f(X,Y) - (1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(\nabla_X \mathrm{grad}\, f, Y). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Démonstration

De la définition de la courbure de Ricci, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}^\alpha(X,Y) &= g^\alpha(\mathrm{Ricci}^\alpha(X), Y) \\ &= \alpha g(\mathrm{Ricci}^\alpha(X), Y) + (1-\alpha)\mathrm{Ricci}^\alpha(X)(f)Y(f) \\ &= \alpha g(\mathrm{Ricci}^\alpha(X), Y) + (1-\alpha)g(\mathrm{Ricci}^\alpha(X), \mathrm{grad}\, f)Y(f) \\ &= g(\mathrm{Ricci}(X), Y) - (1-\alpha)g(\mathrm{R}(X, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f, Y) \\ &\quad -(1-\alpha)\mathrm{Ric}(X, \mathrm{grad}\, f)Y(f) + (1-\alpha)\Delta f \mathrm{Hess}_f(X,Y) \\ &\quad -(1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(\nabla_X \mathrm{grad}\, f, Y) + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} g(\mathrm{Ricci}(X), \mathrm{grad}\, f)Y(f) \\ &\quad -\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} g(\mathrm{R}(X, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f)Y(f) \\ &\quad -\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\mathrm{Ric}(X, \mathrm{grad}\, f)Y(f) + \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\Delta f \mathrm{Hess}_f(X, \mathrm{grad}\, f)Y(f) \\ &\quad -\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\mathrm{Hess}_f(\nabla_X \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f)Y(f) \\ &= \mathrm{Ric}(X,Y) - (1-\alpha)g(\mathrm{R}(X, \mathrm{grad}\, f)\mathrm{grad}\, f, Y) \\ &\quad +(1-\alpha)\Delta f \mathrm{Hess}_f(X,Y) - (1-\alpha)\mathrm{Hess}_f(\nabla_X \mathrm{grad}\, f, Y). \end{aligned}$$

Courbure scalaire

Proposition 3.4

Soient (M^m, g) une variété riemannienne et g^α la métrique Mus-gradient généralisée définie sur M . Si σ (resp. σ^α) dénote la courbure associé à g (resp. g^α). Alors :

$$\begin{aligned} \sigma^\alpha &= \frac{1}{\alpha}\sigma - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\mathrm{Ric}(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f) + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}(\Delta f)^2 \\ &\quad -\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\|\nabla \mathrm{grad}\, f\|^2, \end{aligned} \tag{3.10}$$

où $\|\nabla \text{grad} f\|^2 = \text{Tr}_g g(\nabla_* \text{grad} f, \nabla_* \text{grad} f)$.

Démonstration

Soit $(E_i)_{i=\overline{1,m}}$ une base orthonormale de champs vecteurs associée à g ,alors $(E_i^\alpha)_{i=\overline{1,m}}$ est une base orthonormale de champs de vecteurs associée à g^α où

$$E_1^\alpha = E_1 = \text{grad} f \quad , \quad E_i^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} E_i \quad i = \overline{2,m}$$

Par définition de la courbure scalaire, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sigma^\alpha &= \text{Tr}_g(\text{Ric}^\alpha) \\
&= \sum_{i=1}^m \text{Ric}^\alpha(E_i^\alpha, E_i^\alpha) \\
&= \text{Ric}^\alpha(E_1^\alpha, E_1^\alpha) + \sum_{i=2}^m \text{Ric}^\alpha(E_i^\alpha, E_i^\alpha) \\
&= \text{Ric}^\alpha(\text{grad} f, \text{grad} f) + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=2}^m \text{Ric}^\alpha(E_i, E_i) \\
&= \text{Ric}(\text{grad} f, \text{grad} f) - (1-\alpha) g(\text{R}(\text{grad} f, \text{grad} f)\text{grad} f, \text{grad} f) \\
&\quad + (1-\alpha)\Delta f \text{Hess}_f(\text{grad} f, \text{grad} f) - (1-\alpha)\text{Hess}_f(\nabla_{\text{grad} f} \text{grad} f, \text{grad} f) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=2}^m \Big(\text{Ric}(E_i, E_i) - (1-\alpha) g(\text{R}(E_i, \text{grad} f)\text{grad} f, E_i) \\
&\quad + (1-\alpha)\Delta f \text{Hess}_f(E_i, E_i) - (1-\alpha)\text{Hess}_f(\nabla_{E_i} \text{grad} f, E_i) \Big) \\
&= \frac{1}{\alpha}\sigma - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \text{Ric}(\text{grad} f, \text{grad} f) + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}(\Delta f)^2 - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \|\nabla \text{grad} f\|^2.
\end{aligned}$$

■

3.4 Exemples

Exemple 3.1

On considère l'espace hyperbolique $(\mathbb{H}^2, g)$.

$$\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\},$$

muni de la métrique de riemannienne suivante :

$$g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2).$$

La variété $(\mathbb{H}^2, g)$ est une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante négative :

$$\text{K} = -1.$$

Considérons une fonction $f : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \ln(y)$.

Alors on a : $\|grad\ f\| = 1$, et $df = \frac{1}{y} dy$.

Nous définissons maintenant la métrique de Mus-gradient généralisée g^α :

$$\begin{aligned} g^\alpha &= \alpha g + (1-\alpha) df \otimes df \\ &= \frac{\alpha}{y^2}(dx^2+dy^2) + \frac{(1-\alpha)}{y^2}dy^2 \\ &= \frac{\alpha}{y^2}dx^2 + \frac{1}{y^2}dy^2. \end{aligned}$$

1. Les symboles de Christoffel non nuls de la connexion de Levi-Cita associée à g^α sont :
$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\alpha}{y},\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}.$$
2. Les composantes non nulles du tenseur de courbure riemannienne R^α associé à g^α sont :
$$\mathrm{R}_{121}^2 = -\mathrm{R}_{211}^2 = \frac{\alpha}{y^2},\ \mathrm{R}_{122}^1 = -\mathrm{R}_{212}^1 = -\frac{1}{y^2}.$$
3. Les composantes non nulles de la courbure Ricci $\mathrm{Ric^\alpha}_{ij}$ associé à g^α sont :
$$\mathrm{Ric}_{11}^\alpha = -\frac{\alpha}{y^2},\ \mathrm{Ric}_{22}^\alpha = -\frac{1}{y^2}.$$
4. La courbure scalaire σ^α associé à g^α est :
$$\sigma^\alpha = -2.$$
5. La courbure sectionnelle $\mathrm{K}^\alpha(\partial_x, \partial_y)$ en (x,y) de $P = vect(\partial_x, \partial_y)$ est
$$\mathrm{K}^\alpha(\partial_x, \partial_y) = -1.$$

Nous déduisons que $(\mathbb{H}^2, g^\alpha)$ a également une courbure sectionnelle constante négative égale à -1.

Exemple 3.2

Soit l'espace hyperbolique

$$\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 > y\}$$

munie de la métrique riemannienne suivant :

$$g = y^2(dx^2 + dy^2).$$

La variété $(\mathbb{H}^2, g)$ est une variété riemannienne à courbure sectionnelle

$$\mathrm{K} = \frac{1}{y^4} \neq const.$$

Considérons le sous ensemble

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{H}^2, 1 - \alpha y^4 > 0\} \subset \mathbb{H}^2$$

et la fonction $f : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \int \sqrt{\frac{1-\alpha y^4}{(1-\alpha)y^2}}\, dy.$$

Alors on a :

$$df = \sqrt{\frac{1-\alpha y^4}{(1-\alpha)y^2}}\, dy.$$

Nous définissons maintenant la métrique de Mus-gradient généralisée g^α :

$$\begin{aligned} g^\alpha &= \alpha g + (1-\alpha) df \otimes df \\ &= \alpha y^2 dx^2 + \alpha y^2 dy^2 + (1-\alpha)\frac{1-\alpha y^4}{(1-\alpha)y^2} dy^2 \\ &= \alpha y^2 dx^2 + \frac{1}{y^2} dy^2. \end{aligned}$$

1. Les symboles de Christoffel non nuls de la connexion de Levi-Cita associée à g^α sont :

$$\Gamma^2_{11} = -\alpha y^3, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\Gamma^2_{22} = \frac{1}{y}.$$

2. Les composantes non nulles du tenseur de courbure riemannienne R associé à g^α sont :

$$\mathrm{R}^2_{121} = -\mathrm{R}^2_{211} = \alpha y^2, \; -\mathrm{R}^1_{122} = \mathrm{R}^1_{212} = \frac{1}{y^2}.$$

3. Les composantes non nulles de la courbure Ricci Ric_{ij} associé à g^α sont :

$$\mathrm{Ric}_{11} = -\alpha y^2, \; \mathrm{Ric}_{22} = -\frac{1}{y^2}.$$

4. La courbure scalaire σ associé à g^α est :

$$\sigma = -2.$$

5. La courbure sectionnelle $\mathrm{K}^\alpha = \mathrm{K}^\alpha(\partial_x, \partial_y)$ en (x, y) de $P = vect(\partial_x, \partial_y)$ est

$$\mathrm{K}^\alpha(\partial_x, \partial_y) = -1.$$

Nous déduisons que (M, g^α) a une courbure sectionnelle constante négative égale à -1.

Exemple 3.3

Soit $\mathbb{S}^3$ muni de la métrique de riemannienne suivante :

$$h = dx^2 + \sin^2 x \, dy^2 + \cos^2 x \, dz^2.$$

La variété $(\mathbb{S}^3, h)$ est une variété riemannienne à courbure constante positive $\mathrm{K} = 1$.

Considérons une fonction $f : \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = ax + b$.

Nous définissons maintenant la métrique de Mus-gradient généralisée h^α :

$$\begin{aligned} h^\alpha &= \alpha h + (1-\alpha) df \otimes df \\ &= \alpha(dx^2 + \sin^2 x \, dy^2 + \cos^2 x \, dz^2) + (1-\alpha)a^2 dx^2 \\ &= (\alpha + (1-\alpha)a^2) dx^2 + \alpha \sin^2 x \, dy^2 + \alpha \cos^2 x \, dz^2. \end{aligned}$$

1. Les symboles de Christoffel non nuls de la connexion de Levi-Cita associée à h^α sont :

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{12} = \frac{\cos\, x}{\sin\, x}, \; \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = -\tan\, x,$$
$$-\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = \frac{\alpha \sin\, x \cos\, x}{\alpha + (1-\alpha)a^2}.$$

2. Les composantes non nulles du tenseur de courbure riemannienne R^α associé à h^α sont :

$$\mathrm{R}^2_{121} = -\mathrm{R}^2_{211} = \mathrm{R}^3_{131} = -\mathrm{R}^3_{311} = -1,$$
$$\mathrm{R}^1_{122} = -\mathrm{R}^1_{212} = \mathrm{R}^3_{322} = -\mathrm{R}^3_{232} = \frac{\alpha \sin^2 x}{\alpha + (1-\alpha)a^2},$$

$$\mathrm{R}_{133}^{1} = -\mathrm{R}_{313}^{1} = \mathrm{R}_{233}^{2} = -\mathrm{R}_{323}^{2} = \frac{\alpha\cos^2 x}{\alpha + (1-\alpha)a^2}.$$

3. Les composantes non nulles de la courbure Ricci $\mathrm{Ric}^{\alpha}{}_{ij}$ associé à h^α sont :

$$\mathrm{Ric}_{11}^{\alpha} = 2,\ \mathrm{Ric}_{22}^{\alpha} = \frac{2\alpha(4\alpha-5)\sin^2 x}{8\alpha-9},\ \mathrm{Ric}_{33}^{\alpha} = \frac{\alpha(3\alpha-5)\cos^2 x}{3\alpha-4}.$$

4. La courbure scalaire σ^α associé à h^α est :

$$\sigma^\alpha = \frac{48(a^2\alpha^3-\alpha^3)+a^2(-177\alpha^2+214\alpha-85)+\alpha(81\alpha+33)-72}{(a^2(\alpha-1)-\alpha)(8\alpha-9)(3\alpha-4)}.$$

5. La courbure sectionnelle $\mathrm{K}^\alpha(v_i,v_j)$ en (x,y,z) de $P = vect(v_i,v_j)_{1\leqslant i<j\leqslant 3}$, où $v_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha+(1-\alpha)a^2}}\partial x$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\sin\ x}\partial y$ et $v_3 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\cos\ x}\partial z$ une base orthonormale associée à h^α.

$$\mathrm{K}^\alpha(v_1,v_2) = h^\alpha(\mathrm{R}^\alpha(v_1,v_2)v_2,v_1) = \frac{1}{\alpha+(1-\alpha)a^2}.$$
$$\mathrm{K}^\alpha(v_1,v_3) = h^\alpha(\mathrm{R}^\alpha(v_1,v_3)v_3,v_1) = \frac{1}{\alpha+(1-\alpha)a^2}.$$
$$\mathrm{K}^\alpha(v_2,v_3) = h^\alpha(\mathrm{R}^\alpha(v_2,v_3)v_3,v_2) = \frac{1}{\alpha+(1-\alpha)a^2}.$$

Nous déduisons que $(\mathbb{S}^3,h^\alpha)$ a une courbure sectionnelle constante positive égale à $\frac{1}{\alpha+(1-\alpha)a^2}$. Si $a^2=1$ i.e. $a=1$ ou $a=-1$, alors les $(\mathbb{S}^3,h^\alpha)$ et $(\mathbb{S}^3,h)$ ont la même courbure sectionnelle constante positive 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Benkartab and A.M. Cherif, *New methods of construction for biharmonic maps*, Kyungpook Math. J. **59**(1)(2019), 135–147.

[2] A. Benkartab and A.M. Cherif, *Deformations of metrics and biharmonic maps*, Commun. Math., **28**(3)(2020), 263-275.

[3] P. Buser, *Géométrie riemannienne* , version du 22 octobre 2003.

[4] M. De Leon and P.R. Rodrigues , *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North-Holland Mathematics Studies, 1989.

[5] M. Djaa, *Géométrie riemannienne et Analyse Harmonique sur les variétés* (Mastre - Doctorat) Centre universitaire de Relisane 2017.

[6] M. Djaa, *Géométrie Différentielle Variété-I Variétés Différentelles*, 1^{ere} Année Master, Centre universitaire de Relisane (2017-2018).

[7] N. E. Djaa and A. Zagane, *Harmonicity of Mus-Gradient Metric*, Int. J. Maps Math., **5**(1) (2022), 61-77.

[8] N. E. Djaa and A. Zagane, *Some results on the geometry of a non-conformal deformation of a metric*, Commun. Korean Math. Soc. **37**(3)(2022), 865-879.

[9] S.Kobayashi and K. Nomizu, *Fondations of differential geometry*, vol.I, II .Intersciense, New York-London 1963.

[10] T. Masson, *Géométrie différentielle, groupes et algèbers de Lie, fibrés et connexion*, version du 8 juillet 2004.

[11] P. Petersen, *Riemanniann geometry* (Second Edition), Department of Mathematics, University of Califoria, Los Angeles, CA 90095-1555 USA.

[12] K. Yano, and M. Kon, *Structures on Manifolds*, Series in Pure Math., Vol 3, World Sci. 1984.

[13] A. Zagane, *Geometry of Mus-Gradient Metric*, Hagia Sophia Journal of Geometry, **5** (2023), no. 1, 1-10.

[14] A. Zagane, *A study on the semi-conformal deformation of Berger-type metric*, Int. J. Maps Math. **6**(2)(2023), 99-113.

[15] A. Zagane, *Geometry of generalized Berger-type deformed metric on B-manifold*, Commun. Korean Math. Soc. **38**(4)(2023), 1281-1298.

NOTATIONS

- $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur la variété M,
- TM fibré tangent à la variété M,
- T^*M fibré cotangent à la variété M,
- $\Gamma(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M,
- $\Gamma(T^*M)$ l'ensemble des formes différentielles sur M,
- Γ_{ij}^k symboles de Christoffel,
- $\Im_q^p(M)$ l'ensemble des champs de tenseurs de type (p, q) sur la variété M,
- $[,]$ crochet de Lie de deux champs de vecteurs.

ملخص

تدخل هذه الأطروحة في إطار دراسة الهندسة الريمانية، وبشكل خاص مقياس ميس التدرج المعمم على منوعة ريمانية .

في هذه الأطروحة، نقدم اتصال ليفيسيفيتا، والصيغ المتعلقة بأنواع مختلفة من التقوسات، بما في ذلك موتر التقوس، التقوس المقطعي، تقوس ريتشي والتقوس العددي (القياسي). أيضًا، نقدم بعض الأمثلة المفصلة جيدًا.

Résumé :

Cette thèse rentre dans le cadre de l'étude de la géométrie riemannienne., en particulier "la métrique Mus-gradient généralisée sur une variété riemannienne".

Dans cette thèse nous introduisons la connexion de Levi-Civita, les formules relative aux différents types de courbures notamment tenseur de courbure, courbure sectionnelle, courbure de Ricci et courbure scalaire. Aussi nous introduisons quelques exemples bien détaillés.

Abstract :

This thesis falls within the scope of the study of Riemannian geometry, in particular, "the generalized Mus-gradient metric on a Riemannian manifold ".

In this thesis, we introduce the Levi-Civita connection, the formulas related to the different types of curvatures, namely curvature tensor, sectional curvature, Ricci curvature, and scalar curvature. We also introduce some well-detailed examples.