الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Zabana de Relizane
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques

MEMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de MASTER en :

Géométrie différentielle

Intitulé

Résultats d'existence et de stabilité pour les équations et systèmes différentiels

Présenté par :

Mlle : DAMECHE Feryel

Devant les membres de jury :

Président : Mr Rezoug Noreddine	Maître de conférence (A)A(U. Relizane)
Encadreur : Mr Djourdem Habib	Maître de conférence (A) A (U. AB Mostaganem)
Examinateur : Mr Guendouz Cheikh	Maître de conférence (B) A (U. Relizane)

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

Au nom d'Allah,le tout Miséricordieux, le très Miséricordieux

Tout d'abord, je voudrais remercier **Allah Miséricordieux** *qui m'a donné la force et la patience nécessaires pour mener à bien cette humble oeuvre*

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma reconnaissance à mon superviseur, le professeur **DJOURDEM Habib**, *pour son soutien, ses précieux conseils et sont aide précieuse qui m'ont permis de mener à bien ce travail*

Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury d'avoir accepté d'étudier ce modeste ouvrage malgré les nombreuses tâches qui les attendent

Enfin, j'exprime ma sincère gratitude à ma famille, en particulier à mes chers parents, frères et camarades de classe, qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours.

Dédicaces

J'ai le plaisir de dédier cet humble ouvrage :
à mes chers parents dont le rêve a toujours été de me voir réussir, à mes frères rachid, houari, mohamed et habib qui m'ont soutenu et encouragé chaleureusement tout au long de mon par cours, et à ma famille et mes proches à qui je souhaite encore plus de succès

Résumé

L'objet de cette étude est de présenter quelques résultats d'existence et de stabilité de solutions des équations et systèmes différentiels. Pour cela, nous introduisons quelques théorèmes du point fixe et quelques rappels sur les équations différentielles, systèmes différentiels et des théorèmes d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy. On s'intéresse aussi à établir quelques résultats de stabilité des systèmes différentiels linéaires et non linéaires. La dernière étape de ce travail a été dédiée à l'étude de deux exemples en appliquant les résultats obtenus précédemment.

Mots clés : Espace de Banach, Équation différentiel, Problème de Cauchy, unicité, Stabilité, Lyapunov

ملخص

الهدف من هذه الدراسة هو تقديم بعض نتائج وجود واستقرار حلول المعادلات جمل المعادلات التفاضلية. وللقيام بذلك، نقدم بعض نظريات النقطة الثابتة و بعض التعاريف حول المعادلات التفاضلية ، جمل المعادلات التفاضلية ونظريات الوجود ووحدانية الحل لمسألة كوشي. نهتم أيضًا بدراسة بعض نتائج الاستقرار لجمل المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية. المرحلة الأخيرة من هذا العمل كانت مخصصة لدراسة مثالين من خلال تطبيق النتائج التي تم الحصول عليها سابقًا.

الكلمات المفتاحية

فضاء بناخ، معادلة تفاضلية، مسألة كوشي، الوحدانية، الاستقرار، ليابونوف

Table des matières

Introduction

Au milieu du 17ème siècle, un événement important est apparu dans l'histoire des sciences, à savoir les équations différentielles, plus précisément les équations différentielles ordinaires. Les équations différentielles sont apparues historiquement tout au début du développement de l'analyse, en générale à l'occasion de problèmes de mécanique ou de géométrie, plusieurs phénomènes peuvent être modélisés par les équations différentielles telles que l'évolution de la décharge d'un condensateur électrique, l'évolution de la vitesse de descente d'un parachutiste, la loi de des intégration radioctive, l'étude des fluides...etc [1, 8, 9].

L'étude de la stabilité des systèmes a fait l'objet au cours de ces derniers siècles d'un très large développement dans la qualité des résultats ainsi que leurs applications. Plusieurs de ces résultats concernent des systèmes décrits mathématiquement par des équations différentielles ordinaires linéaires ou non linéaires. Dans la littérature, plusieurs chercheurs ont étudié la stabilité de systèmes linéaires et non linéaires. En effet, la stabilité au sens de **Lyapunov** est bien développée pour les systèmes linéaires, par contre, la stabilité des systèmes non linéaires reste encore largement inconnue, bien que des méthodes de linéarisation permettent d'obtenir dans certains cas de bons résultats.

L'objectif de ce mémoire est d'appliquer quelques théorèmes du point fixe pour obtenir des résultats d'existence et unicité de solutions des équations différentielles, et d'établir quelques résultats de stabilité pour les systèmes différentielles linéaires et non linéaires.

Ce manuscrit est composé de trois chapitres :
Dans le premier chapitre, nous présenterons quelques notions et résultats. Également, nous introduirons des définitions sur les équations et les systèmes différentielles ordinaires et des théorèmes d'existence et d'unicité de solutions du problème de Cauchy.

Le deuxième chapitre est dédié aux notions de stabilité pour les systèmes différentielles en étudiant le cas d'un système linéaire et le cas d'un système non linéaire.

Dans la première partie du chapitre III, on applique le théorème du point fixe de Schauder pour obtenir le résultat d'existence d'une équation différentielle. Dans la deuxième partie de ce chapitre, des résultats d'existence et de stabilité sont établis à l'équation du pendule.

Chapitre 1

Préliminaires

On introduit dans ce chapitre des définitions de quelques notions de base de l'analyse fonctionnelle et des résultats connus, puis on présente des définitions sur les équations différentielles, les systèmes d'équations différentielles et des résultats d'existence du problème de Cauchy. Le lecteur peut consulter les références suivantes [2, 3, 5, 6, 8, 9, 10]

1.1 Normes et espaces de Banach

Définition 1.1. *Le couple* (E, d) *est dit un espace métrique si* E *est un ensemble arbitraire non vide et* $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une application vérifiant pour tout* x , y *et* z *de* E,
(d_1) $\quad d(x, y) = 0 \iff x = y$
(d_2) $\quad d(x, y) = d(y, x)$ *(Symétrie),*
(d_3) $\quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Inégalité triangulaire).*

Définition 1.2. *Un espace métrique* (E, d) *est dit complet, si toute suite de Cauchy d'éléments dans* E *et convergente dans* E.

Proposition 1.1. *Dans un espace métrique* (E, d) *toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Remarque 1.1. *La réciproque est fausse en générale.*

Définition 1.3. *Soit* E *un espace vectoriel. On appelle norme sur* E *toute application de* E *dans* $\mathbb{R}_+$ *habituellement notée* $\|.\|$ *vérifiant pour tout* $x, y \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$,
(N_1) $\quad \|x\| = 0 \iff x = 0$
(N_2) $\quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *(Homogénéité),*
(N_3) $\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Inégalité triangulaire).*

Exemple 1.1. 1. $\mathbb{R}$ *muni de sa valeur absolue ou* $\mathbb{C}$ *muni de son module est un espace vectoriel normé .*
2. $E = \mathbb{K}^n$ *, pour* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$*, on définit :*

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

plus généralement, pour tout $\alpha \geq 1, \|x\|_\alpha = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^n$ *.*
3. *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$*, l'espace* $C^\infty([a,b], \mathbb{K})$ *des fonctions infiniment différentiables et à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *muni de l'une des normes :*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}$$

ou encore de la norme :

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| \, dx$$

est un espace vectoriel normé .
La norme $\|\,.\,\|_1$ *est la norme de la convergence en moyenne ,* $\|\,.\,\|_2$ *est la norme de la convergence en moyenne quadratique et* $\|\,.\,\|_\infty$ *est la norme de la convergence uniforme(la norme infinie).*

Définition 1.4. *Un espace vectoriel normé est un couple* $(E, \|\,.\,\|)$ *où* E *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$*,* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* $\|\,.\,\|$ *est une norme sur* E*.*

Remarque 1.2. *Si* $(E, \|\,.\,\|)$ *est un espace vectoriel normé alors*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

définit une distance sur E*.*

Définition 1.5. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé* $(E, \|\,.\,\|)$ *complet pour la métrique associée á cette norme.*

Exemple 1.2. 1. *L'espace* $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ *des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *muni de la norme* $\|f\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$ *est un espace de Banach.*
2. $E = \mathbb{R}^n$ *ou* $E = \mathbb{C}^n$*muni des normes*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$$

et

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \{|x_j|\}$$

sont des espaces de Banach .
3. *Un espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Exemple 1.3. *Soit* $\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction continue donnée avec* $a, b \in \mathbb{R}$.
soit S *l'espace de fonctions continues*
et bornéesf $: [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *telles que* $f(t) = \psi(t)$, *pour* $a \leq t \leq b$, *pour* $f, g \in S$, *on définit*

$$d(f, g) = \sup_{t \in [a, \infty)} |f(t) - g(t)| = \|f - g\|_\infty.$$

Alors (S, d) *est un espace métrique complet.*

1.2 Applications lipschitziennes

Définition 1.6. *On dit que l'application* $f : E \longrightarrow F$ *est* $K-$ *Lipschitzienne si pour tout* x,$y \in E$, $\quad k \in \mathbb{R}^+$

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq K\|x - y\|_E.$$

Si $K \in [0, 1[, f$ *est dite contractante.*

Exemple 1.4. *Soit la fonction :*

$$f(t, y) = 2\sqrt{y(t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in [4, +\infty[.$$

1. $\Rightarrow$ *Montrons que* f *et lipschitzienne par rapport à* y .
On doit montrer que :

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \forall y_1, y_2 \in [4, +\infty[\ , |f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

On a : $f(t_1, y_1) = 2\sqrt{y_1(t_1)} = 2\sqrt{y_1}$ *et* $f(t_2, y_2) = 2\sqrt{y_2(t_2)} = 2\sqrt{y_2}$.

$$|f(t_1,y_1)-f(t_2,y_2)| = |2\sqrt{y_1}-2\sqrt{y_2}| = 2|\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}| = 2\frac{|\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}||\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}|}{|\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}|} = 2\frac{|y_1-y_2|}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}},$$

d'autre parte : $y_1 \geq 4 \Rightarrow \sqrt{y_1} \geq 2$ *et* $y_2 \geq 4 \Rightarrow \sqrt{y_2} \geq 2$
alors $\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2} \geq 4$
puis $\frac{1}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}} < \frac{1}{4}$,
donc, on trouve :

$$|f(t_1,y_1)-f(t_2,y_2)| \leq 2\left(\frac{1}{4}\right)|y_1-y_2| \leq \frac{1}{2}|y_1-y_2|.$$

Alors : $\exists K = \frac{1}{2} > 0$ *d'ou* f *est lipschitzienne.*

Proposition 1.2. *Toute fonction Lipschitzienne est continue.*

1.3 Compacité et Applications Compactes

Définition 1.7. *soit* (S,d) *un espace métrique. Un sous ensemble* $\mathbb{M}$ *de* S *est dit compact si et seulement si de tout recouvrement ouvert de* $\mathbb{M}$*, on peut extraire un sous recouvrementfini.*
D'une manière équivalente, un sous ensemble $\mathbb{M}$ *de* S *est compact si et seulement si tout suite de* $\mathbb{M}$ *admet une sous suite convergente dans* $\mathbb{M}$*.*

Définition 1.8. *Un sous ensemble* $\mathbb{M}$ *d'un espace métrique est dit relativement compact si son adhérence est compacte, c'est à dire,* $\overline{\mathbb{M}}$ *est compact.*

En particulier, on a la propostion suivante :

Proposition 1.3. *Soit* $\mathbb{M}$ *un sous ensemble fermé d'un espace métrique complet. Alors,* $\mathbb{M}$ *est compact si et seulement si il est relativement compact .*

Définition 1.9. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés.*
1. Une partie A *de* E *est dite bornée s'il existe* $M \geq 0$ *tel que pour tout* $x \in A$, $\|x\|_E \leq M$.
2. Une application $T : D \subset E \longrightarrow F$ *est dite bornée si son image* $T(D)$ *est bornée dans* $(F, \|.\|_F)$.

Définition 1.10. *Soit* $\{f_n\}$ *une suite de fonctions réelles* $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, a,b \in \mathbb{R}$. $\{f_n\}$ *uniformément bornée sur* $[a,b]$ *s'il existe un* $l > 0$ *tel que* $|f_n(t)| \leq l$ *pour tout* n *et tout* $t \in [a,b]$.

Définition 1.11. *Soit* $\mathbb{M}$ *un sous ensemble de l'espace* $E = C([a,b],\mathbb{R})$. $\mathbb{M}$ *est dit équicontinu si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a,b], \exists \delta > 0, \forall y \in [a,b],$$

$$|x-y|<\delta \Rightarrow \forall f\in \mathbb{M}, |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Définition 1.12. *Soit* $\mathbb{M}$ *un sous ensemble de l'espace de Banach* $E=C([a,b],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_{\infty}$. $\mathbb{M}$ *est dit uniformément borné si et seulement si*

$$\exists C>0,\ \forall f\in\mathbb{M},\ \|f\|_{\infty}<C.$$

Ci-dessous on rappelle un outil classique et puissant pour montrer qu'une partie de l'espace des fonctions continues sur un compact est relativement compacte.

Théorème 1.1. $(Ascoli-Arzela)$ *Soit* $C([a,b],\mathbb{R}), -\infty<a<b<+\infty$, *l'espace des fonctions continues définies sur le compact* $[a,b]$ *et à valeurs réelles muni de la norme*

$$\|u\| = \max_{a\le t\le b}|u(t)|.$$

Une partie F *de* $C([a,b],\mathbb{R})$ *est relativement compacte dans* $C([a,b],\mathbb{R})$ *si et seulement si elle est uniformément bornée et équicontinue.*

Remarque 1.3. *Le théorème d'Ascoli-Arzela ne permet pas de caractériser que les ensembles relativement compacts de* $C(E_1,K)$ *avec* E_1 *métrique et compact,* $K=\mathbb{R}$ *où* $\mathbb{C}$*, et non les ensembles relativement compacts de n'importe quel espace de Banach.*

Exemple 1.5. *Soient* K_1 *et* K_2 *deux réels strictement positifs. Le sous ensemble* F *des fonctions réelles continues sur* $[a,b]$*, dérivables sur* $]a,b[$ *qui vérifient :*

$$|f(t)|\le K_1, et\ \ \sup|f'(t)|\le K_2,$$

pour tout $t\in[a,b]$ *est relativement compact dans* $C([a,b],\mathbb{R})$.
En effet, pour tout $f\in F$*, le théorème des accroissements finis, prouve que pour tout* $t_0,\ t\in[a,b]$ *il existe* $c\in]t_0,t[$ *tel que*

$$|f(t)-f(t_0)| = |f'(c)||t-t_0|.$$

Donc $|f(t)-f(t_0)|\le K_2|t-t_0|$. *Fixons* $t_0\in[a,b]$. *Soit* $\varepsilon>0$ *et* $\mu=\frac{\varepsilon}{K_2}$*, alors*

$$\forall t\in[a,b], |t-t_0|\le\eta \Rightarrow |f(t)-f(t_0)|\le\varepsilon.$$

Ce qui est exactement l'équicontinuité de F *en* t_0. *Comme on peut prendre pour* t_0 *n'importe quel point de* $[a,b]$*, on en déduit que* F *est équicontinu.*
On a $|f(t)|\le K_1$ *pour tout* $f\in F$ *ce qui implique que* $\|f\|\ \le K_1$ *et partant de*

$$\forall f\in F, f\in B'(0,K_1),$$

c'est à dire ,

$$F\subset B'(0,K_1),$$

d'où la bornitude de F. Finalement, comme F est borné et équicontinue, alors le théorème d'Ascoli-Arzela assure que F est relativement compact.

Définition 1.13. *Soit X et Y deux espaces vectoriels normés et Ω un sous ensemble de X.*
(i) une application continue $T : X \longrightarrow Y$ est dite compacte si lorsque Ω est borné implique $T(\Omega)$ est relativement compact, c'est à dire $T(\Omega)$ est compact, autre mou dit, si pour tout suite borné $\{x_n\}$ dans X, la suite $T(x_n)$ possède une sous suite convergent dans Y,
(ii) T est dite complètement continue si elle est compacte et continue.

1.4 Théorèmes du point fixe

Définition 1.14. *Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach ,$T : E \longrightarrow E$ une application. On appelle point fixe de T tout point $x \in E$ tel que $T(x) = x$. Ce qui est équivalent à dire que l'équation $T(x) - x = 0$ possède une solution.*

Exemple 1.6. *La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ admet $\{0, 1\}$ comme points fixes.*

Exemple 1.7. *Si $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ est une fonction continue, alors f admet au moins un point fixe.*
Pour résoudre un problème du point fixe, on doit identifier trois éléments fondamentaux, à savoir ,
1. *un ensemble convenable S apte pour contenir les solutions du problème,*
2. *Une application $T : S \longrightarrow S$ ayant la particularité qu'un point fixe est solution du problème ,*
3. *Un théorème de point fixe qui assure l'existence d'un tel point fixe de T sur S.*

1.4.1 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1.2. *(Principe de contraction de Banach)[2] Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach et $T : E \longrightarrow E$ une application contractante de constante $k \in [0, 1[$. Alors, il existe un point unique $x \in E$ tel que $T(x) = x$.*

Remarque 1.4. *Si A est une application lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées A^p est une contraction, alors A a un seul point fixe.*
En effet, soit x l'unique point fixe de A^P on a

$$A^P(A(x)) = A(A^p(x)) = A(x),$$

ce qui convient à dire que $A(x)$ est aussi un point fixe de A^p et grâce à l'unicité $A(x) = x$. Ce résultat est valable pour tous les types de contractions qui assurent l'unicité du point fixe.

1.4.2 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, affirme que le point fixe n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des estimations sur la fonction. Mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach par exemple l'identité

Définition 1.15. *(Ensemble convexe) Un sous-ensemble X d'un espace vectoriel E est convexe si :*

$$\forall\ (x,y)\ \in X,\ \forall\alpha\ \in [0,1],\ (1-\alpha)\,x+\alpha y\ \in X.$$

Exemple 1.8. *Dans un espace vectoriel normé les boules ouvertes où fermés sont convexes.*

Théorème 1.3. *(Théorème de Schauder)[6] Soit $\mathbb{M}$ un sous ensemble convexe fermé borné et non vide d'un espace de Banach E et $T : \mathbb{M} \longrightarrow E$ une application compacte. Alors T possède un point fixe .*

Remarque 1.5. *Si $\mathbb{M}$ est compact et convexe, il suffit que T soit continue pour avoir un point fixe pour T.*

1.5 Équations différentielles

Soient I un ouvert de R, E un espace de Banach sur R et $U_1, U_2, ..., U_n$ des ouverts de E.

1.5.1 Équations différentielles ordinaires

Définition 1.16. *Une équation différentielle sur l'espace de Banach E est une équation de la forme*

$$F\left(t,x,x',x'',\ldots,x^{(n)}\right) \tag{1.1}$$

où n est un entier non nul appelé l'ordre de l'équation, F est une fonction donnée le $(n+2)$ variable supposée régulières sur $I\times U_1\times U_2\times\ldots\times U_n$, x est la fonction inconnue de I dans l'espace de Banach E et $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$ sont ses dérivées successives. Plus précisément le problème est de trouver un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $x : t \longrightarrow x(t)$ dérivable sur cet intervalle jusqu'à l'ordre n et vérifiant l'équation

$$\forall t\in I\ ,\ F\left(t,x,x',x'',\ldots,x^{(n)}\right)=0. \tag{1.2}$$

Cette équation est de forme très générale, en pratique, on préférera travailler avec des équations plus particulières dites du type explicite, pour les quelles il existe une fonction

H régulière sur $I \times U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_{n-1}$ *tel que*

$$x^{(n)} = H\left(t, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}\right). \tag{1.3}$$

Définition 1.17. *On appelle équation différentielle normale d'ordre* n *toute équation de la forme*

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x'', \ldots, x^{(n-1)}\right).$$

Définition 1.18. *On appelle équation différentielle autonome d'ordre* n *toute équations de la forme*

$$x^{(n)} = f\left(x, x'', \ldots, x^{(n-1)}\right).$$

Autrement dit, f *ne dépend pas explicitement de* t.

Remarque 1.6. *Les équations autonomes sont très importantes quand on cherchera des solutions stationnaires ainsi que leur stabilité.*

Exemple 1.9. *Équation du premier ordre sous la forme normale :*

$$x' = f(t, x).$$

Équation du premier ordre autonome :

$$x' = f(x).$$

1.5.2 Équations différentielles linéaires

Définition 1.19. *Une équation différentielle ordinaire d'ordre* n *est linéaire si elle est de la forme*

$$a_n(t)\, x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)\, x(t) = g(t), \tag{1.4}$$

avec tous $x^{(i)}$ *de degré* 1 *et tous les coefficients dépendant au plus de* t*, si* g *est nulle, alors l'équation est dite homogène, ou sans second membre. L'équation différentielle suivante*

$$a_n(t)\, x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)\, x(t) = 0, \tag{1.5}$$

est appelée l'équation différentielle homogène associée.
Si $a_j(t)$*,* $0 \leq j \leq n$ *sont des constants, on parle d'équation différentielle linéaire a coefficients constants.*

Exemple 1.10. *L'équation* $x'' + x' - 3x = 0$ *est une équation ordinaire linéaire d'ordre deux à coefficients constants.*

1.6 Systèmes différentiels

Définition 1.20. *Un système d'équations différentielles par rapport aux inconnues* $x_1, x_2, ..., x_n$ *admet la forme générale suivante :*

$$F_k(t, x_1, x_1', ..., x_1^{(k_1)}, x_2, x_2', ..., x_2^{(k_2)}, ..., x_n, x_n', ..., x_n^{(k_n)}) = 0, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{1.6}$$

Lorsqu'il est résolu par rapport à aux dérivées d'ordre le plus élevé $x_1^{(k_1)}$, $x_2^{(k_2)}$,..., ,$x_n^{(k_n)}$ *le système obtenu s'appelle système canonique. Il est de la forme*

$$\begin{cases} x_1^{(k_1)} = f_1\left(t, x_1, x_1', ..., x_1^{(k_1-1)}, x_2, x_2', ..., x_2^{(k_2-1)}, ..., x_n, x_n', ..., x_n^{(k_n-1)}\right) \\ x_2^{(k_2)} = f_2\left(t, x_1, x_1', ..., x_1^{(k_1-1)}, x_2, x_2', ..., x_2^{(k_2-1)}, ..., x_n, x_n', ..., x_n^{(k_n-1)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k_n)} = f_n\left(t, x_1, x_1', ..., x_1^{(k_1-1)}, x_2, x_2', ..., x_2^{(k_2-1)}, ..., x_n, x_n', ..., x_n^{(k_n-1)}\right) \end{cases} \tag{1.7}$$

Définition 1.21. *Un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre*

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right), \quad k = 1, 2, ...n, \tag{1.8}$$

où t *est une variable indépendante et* $x_1, x_2, ..., x_n$ *sont des fonctions inconnues de* t*, s'appelle système normal. On dit que deux systèmes d'équations différentielles sont équivalents s'ils possèdent les mêmes solutions.*

Remarque 1.7. *Tout système canonique (1.7) peut être ramené a un système normal (1.8) équivalent.*

Exemple 1.11. *Le système suivant :*

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 3ty = 0 \\ t\frac{dy}{dt} - x = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

se ramène à un système normal par un changement de variable.
On pose : $x = x_1$, $\frac{dx}{dt} = x'(t) = x_2$ *et* $y = x_3$*. Donc le système (1.9) devient*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 = f_1\left(t, x_1, x_2, x_3\right), \\ \frac{dx_2}{dt} = 3tx_3 = f_2\left(t, x_1, x_2, x_3\right), \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{x_1}{t} = f_3\left(t, x_1, x_2, x_3\right). \end{cases}$$

1.6.1 Systèmes différentiels linéaires

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$ et $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues sur I. L'objectif est de trouver des fonctions

$$x_1, \ldots, x_n : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

de classe C^1 sur I telles que

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)\, x_1 + \ldots + a_{1n}(t) + f_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)\, x_1 + \ldots + a_{nn}(t)\, x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{1.10}$$

On peut écrire ce système sous la forme matricielle suivante :

$$X'(t) = A(t)\, X(t) + F(t), \tag{1.11}$$

où

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{11}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} et\ F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t). \end{pmatrix}$$

En générale il peut y avoir une infinité de solutions de cette équation. Soient $t_0 \in I$ et $X(t_0) \in \mathbb{R}^n$ données.

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0. \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Le but est de trouver X une solution de l'équation (1.11) satisfaisants a la condition initiale (1.12). Autrement dit, existe-il X une fonction dérivable définie sur I a valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)\, X(t) + F(t) \\ X(t_0,) = X_0 \end{cases} \tag{1.13}$$

pour tout $t \in I$.

Définition 1.22. *Le système (1.11) est dit homogène si $F = 0$ c'est à dire :*

$$X'(t) = A(t)\, X(t).$$

Définition 1.23. *Le système (1.11) est dit non homogène si $F \neq 0$ c'est à dire :*

$$X(t) = A(t)\, X(t) + F(t).$$

Solution générale du système différentiel homogène

Considérons le système différentiel

$$\frac{dY}{dt} = AY, \tag{1.14}$$

avec $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n d'éléments constants dans le corps $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Théorème 1.4. *Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. La solution générale du système (1.14) ($Y : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$) est définie par*

$$\forall t \in I, \ Y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} V_i,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ valeurs propres de A n'est pas nécessairement distinctes associées aux vecteurs propres $V_1, V_2, ..., V_n$ et $C_1, C_2, ..., C_n$ sont des constantes dans $\mathbb{K}$.

Lorsque A est n'est pas diagonalisable, on a besoin en général de la notion d'exponentielle d'une matrice.

Exponentielle d'une matrice

On muni $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme $\|.\|$.

Proposition 1.4. *La série matricielle*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

converge normalement sur toute partie bornée de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Sa limite (ou somme) est appelée l'exponentielle de A et elle est notée e^A.

Définition 1.24. *On appelle exponentielle d'une matrice, l'application de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ définie par*

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \quad \exp(A) = e^A.$$

Remarque 1.8. *Si A est la matrice nulle de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A) = I_n$.*

Propriété 1.1. *Si $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ commutent ($AB = BA$), alors,*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Remarque 1.9. *Calcul du e^A :*
i) Si A est diagonale, avec a_{ii} sur la diagonale, e^A est la matrice diagonale ayant $e^{a_{ii}}$ sur

la diagonale.
ii) Si $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale, alors $e^A = Pe^D P^{-1}$.
iii) Supposons que $A = \lambda I + N$, où N est une matrice triangulaire supérieure, dont la diagonale est composée par des zéros. D'où $N^p = 0$ pour tout $p \geq n$. Alors,

$$e^A = e^\lambda \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!}.$$

iv) Supposons que A soit une matrice diagonale par blocs, de blocs carrés $A_1, A_2, \ldots$ (de la forme précédente).

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

Alors e^A est une matrice diagonale par blocs, ayant pour blocs $e^{A_1}, e^{A_2}, \ldots, e^{A_n}$.
v) Supposons que A soit semblable à une matrice B (de la forme précédente) : $A = PBP^{-1}$. Alors $e^A = Pe^B P^{-1}$.

Proposition 1.5. *Soient $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'application*

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \\ t &\longmapsto e^{tA} \end{aligned}$$

est de classe C^1 sur I et $\forall t \in I$, $\varphi'(t) = A\varphi(t) = Ae^{At}$.

Théorème 1.5. *La solution Y du système (1.14) vérifiant $Y(t_0) = V_0$ est donnée par*

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}.V_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Solution du système non homogène

Considérons le système

$$\frac{dY}{dt} = AY + B(t),$$

où $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, $B(t) \in \mathbb{K}^n$ continue.

Si aucune solution évidente n'apparaît, on peut utiliser la méthode de variation des constantes, c'est à dire qu'on cherche une solution particulière sous la forme

$$Y(t) = e^{tA}V(t).$$

où V est supposée différentiable. Il vient

$$\begin{aligned} Y'(t) &= Ae^{tA} + e^{tA}.V'(t) \\ &= AY(t) + e^{tA}.V'(t). \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir V telle que $e^{tA}.V'(t) = B(t)$, soit par exemple

$$V(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-sA} B(s)\, ds, \quad t_0 \in I.$$

On obtient ainsi la solution particulière

$$Y(t) = e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-sA} B(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\, ds,$$

qui est la solution telle que $Y(t_0) = 0$. La solution générale du problème de Cauchy telle que $Y(t_0) = V_0$ est donc

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}.V_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\, ds.$$

1.6.2 Problème de Cauchy

Il est impossible de définir la notion de solution d'un système différentiel du premier ordre, c'est pour quoi on introduit un problème standard qui est le problème de Cauchy. Un problème de Cauchy est un problème constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vérifiant une certaine condition initiale. Cette condition peut prendre plusieurs formes selon la nature de l'équation différentielle. Soit U un ouvert de $I \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction.

Définition 1.25. *Étant donnée une équation différentielle du premier ordre sous la forme suivante :*

$$x'(t) = f(t, x), \tag{1.15}$$

pour $(t, x(t)) \in U$, et un point $(t_0, x_0) \in U$, le problème de Cauchy correspondant consiste a chercher une solution $x(t)$ telle que $x(t_0) = x_0$. On note le problème de Cauchy de la forme suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad (t, x(t)) \in U \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.16}$$

Interprétation Physique - Dans de nombreuses situations concrètes, la variable t représente le temps et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille de paramètres décrivant l'état d'un système matériel donné. L'équation (1.16) traduit physiquement la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps et de la valeur des paramètres. Résoudre le problème de Cauchy (1.16) revient à prévoir l'évolution du système au cours du temps, sachant qu'en $t = t_0$ le système est décrit par les paramètre $x_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n})$. On dit que (t_0, x_0) sont les données initiales du problème de Cauchy (1.16) .

Définition 1.26. *Une solution du problème de Cauchy (1.16) sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $(t_0; x_0) \in U$ et $t_0 \in I$ est une fonction dérivable $x : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :*
- *pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in U$,*
- *pur tout $t \in I, x'(t) = f(t, x(t))$,*
- *$x(t_0) = x_0$.*

Théorème 1.6. *Soit $f : I \times V \longrightarrow X$ une application continue, I un ouvert de $\mathbb{R}$ et V un ouvert connexe non vide d'un $\mathbb{R}$-espace de Banach et (t_0, x_0) un point fixé de $\mathbb{R} \times V$ et x une fonction définie sur un intervalle ouvert qui contient t_0, alors x est une solution du problème de Cauchy* (1.16) *sur I si et seulement si*
1. *pour tout $t \in I, (t, x(t)) \in I \times V$,*
2. *x est continue sur I,*
3. *pour tout $t \in I$*
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

preuve. Soit $x : I \longrightarrow V$ une fonction continue sur un intervalle ouvert I qui contient t_0 et que $(t, x(t)) \in I \times V$.
Supposons que x est une solution du problème de Cauchy (1.16). Alors, x est dérivable sur I et vérifie :
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.17}$$
En intégrant les deux membres de t_0 à t ,on obtient pour tout $t \in I$
$$\int_{t_0}^{t} x'(t)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds,$$
ce qui donne, en remplaçant $x(t_0)$ par x_0
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \textit{pour tout } t \in I.$$
Inversement, supposons que pour tout $t \in I$, x vérifie :
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \tag{1.18}$$
alors, d'après la continuité de x et la dérivabilité de la fonction $t \longrightarrow f(t, x(t))$, on obtient
$$x'(t) = f(t, x(t)), \textit{ pour tout } t \in I, \tag{1.19}$$

de plus x vérifie $x(t_0) = x_0$ ce qui signifie que x est solution du problème (1.16).

Exemple 1.12. *Soit le problème suivant :*

$$\begin{cases} x' = e^{-t^2} + x^2 \;\; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \, et \; 0 < |x| < b \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Ce problème est un problème de Cauchy .
La fonction f est définie par : $(t,x) \longrightarrow f(t,x) = e^{-t^2} + x^2$ est continue sur $[0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}$ avec la condition initiale : $x(t_0) = x(0) = 0$.
On a x est une fonction continue sur $[0; \frac{1}{2}]$, donc par intégration sur $[0;t]$, de la fonction f on trouve :

$$\int_0^t x'(s)\, ds = \int_0^t f(s, x(s))\, ds$$

alors

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \left(e^{-s^2} + x^2(s)\right) ds$$

d'où

$$x(t) = \int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

Définition 1.27. *(orbite, trajectoire). Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de l'équation différentielle (1.15), on appelle le trajectoire de φ l'ensemble $\{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subseteq U$. On appelle l'ensemble $\{\varphi(t) : t \in I\}$ l'orbite de la solution φ.*

1.6.3 Fonction lipschitzienne

Soit $U \subset I \times \mathbb{R}^n$, f une application définie de U dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.28. *L'application f est dite lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur U s'il existe une constante k, appelée la constante de Lipschitz de f, telle que :*

$$\forall\, t \in I,\; \forall\, y_1,\; y_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|. \tag{1.20}$$

La fonction $y \longmapsto f(t,y)$ est localement lipschitzienne pour tout $t \in I$, c'est-à-dire que pour tout $J \subset I$ compact, pour tout $O \subset U$ compact, il existe une constante γ telle que :

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \gamma \|y_1 - y_2\|, \quad \forall t \in J, \quad \forall\, y_1,\; y_2 \in O. \tag{1.21}$$

Remarque 1.10. *On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si tout point de $I \times \mathbb{R}^n$ admet un voisinage U sur lequel f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.*

Définition 1.29. *Soient* $y_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $y_2 : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *des solutions de (1.16). On dit que* y_2 *est un prolongement de* y_1 *si* $I \subset J$ *et* y_1 *est la restriction de* y_2 *c'est à dire :* $\forall t \in I : \; y_2(t) = y_1(t)$.

Définition 1.30. *On dit qu'une solution* $y_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est maximale si* y *n'admet pas de prolongement* $y_2 : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *avec* $I \subset J$.

Définition 1.31. *Une solution* $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de (1.16) est globale si elle est définie sur* I *tout entier.*

1.6.4 Théorème de Cauchy Lipschitz

Théorème 1.7. *(forme forte) Soient* $I \subset \mathbb{R}$ *et* $f \in C(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. *et le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.22}$$

avec $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ *Supposons que* $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, alors pour tout* t_0 *dans* I *et pour tout* y_0 *dans* $\mathbb{R}^n$, *il existe au voisinage de* t_0 *une unique solution du problème (1.22).*
En particulier, pour toute telle donnée, il existe une unique solution maximale associée et toute autre solution vérifiant la condition de Cauchy est une restriction de cette solution maximale.

Avant d'introduire la preuve de ce théorème, on doit présenter un résultat connu sous lemme de (*Gronwall*).

Lemme 1.1. (*Gronwall*) *Soit* $u \in C\ ([0,T]; \mathbb{R}^+)$. *Supposons qu'il existe des fonctions* $a, b \in C\ ([0,T]; \mathbb{R}^+)$ *telles que*

$$u(t) \leq b(t) + \int_0^t a(\tau)\, u(\tau)\ d\tau \ \text{ pour tout}, t \in [0,T]$$

Alors

$$u(t) \leq b(t) + \int_0^t b(\tau)\, a(\tau)\, e^{\int_\tau^t a(s)\, ds}\, d\tau$$

Lemme 1.2. *(Cas particulier) Soit* $u, a : [0,T] \longrightarrow [0, +\infty[$ *et* $C > 0$
tq :

$$u(t) \leq C + \int_0^t a(\tau)\, u(\tau)\ d\tau \ \ \forall t \in [0,T]$$

ona :

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_0^t a(s)\ ds\right).$$

Démonstration. (Preuve du théorème 1.7)
i) Du théorème 1.6, la solution du problème (1.22) $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \tag{1.23}$$

On note $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par (I, y).
ii) **Unicité :** Dans le cas où f est localement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, on peut démontrer l'unicité d'un éventuelle solution en utilisant le Lemme du Grönwall.
En effet, soient (J_1, y_1) , (J_2, y_2) deux solutions du même problème (1.22) en t_0. On veut montrer que y_1 et y_2 sont égales sur $J_0 = J_1 \bigcap J_2$.
Pour cela on introduit l'ensemble

$$S = \{t \in J_0,\ tel\ que\ y_1(s) = y_2(s)\,,\ \ \forall s \in [t_0, t]\},$$

où $[t_0, t]$ est remplacé par $[t, t_0]$ si $t < t_0$.
Cet ensemble est non vide car il contient
t_0 (y_1 et y_2) vérifiant la même donnée de Cauchy à l'instant t_0.
On va montrer que $S \bigcap [t_0, +\infty[= J_0 \bigcap [t_0, +\infty[$ (la même idée montrerait l'égalité de $S \bigcap]-\infty, t_0]$ et de $J_0 \bigcap]-\infty, t_0]$.
Supposons que $S \bigcap [t_0, +\infty[\neq J_0 \bigcap [t_0, +\infty[$. On pose alors $t^* = \sup(S)$.
On a $t^* \geq t_0$ et $t_0 \in J_0$.
En effet, si ce n'était pas le cas on aurait $t^* \in \partial J_0$ et alors $y_1 = y_2$ sur $[t_0, \sup J_0[$ et donc $y_1 = y_2$ sur $J_O \bigcap [t_0, +\infty[$ par continuité de y_1 et y_2. Ceci contredit l'hypothèse.
Par ailleurs, par continuité de y_1 et y_2, on sait que $y_1(t^*) = y_2(t^*) = \tilde{y}$.
Soit L une constante de Lipschitz de f sur le compact $K = [t^*, t^* + 1] \times \overline{B}(\tilde{y}, 1)$. Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $t^* + \delta \in J_0$ et tel que

$$y_i(t) \in \overline{B}(\tilde{y}, 1)\,,\ \forall t \in [t^*, t^* + \delta],\ \forall i = 1, 2.$$

Par ailleurs comme y_1 et y_2 vérifient l'équation on a

$$y_i(t) = y_i(t^*) + \int_{t^*}^{t} f(s, y_i(s))\, ds \qquad i = 1, 2.$$

Par soustraction, on trouve

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \int_{t^*}^{t} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|\, ds,\ \forall t \in [t^*, t^* + \delta].$$

Comme y_1 et y_2 prennent leurs valeurs dans K, on en déduit

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq L \int_{t^*}^{t} |y_1(s) - y_2(s)| \, ds, \ \ \forall t \in [t^*, t^* + \delta].$$

La différence $u(t) = |y_1(t) - y_2(t)|$ vérifie

$$u(t) \leq L \int_{t^*}^{t} u(s) \, ds, \ \ \forall t \in [t^*, t^* + \delta].$$

Par le lemme 1.2 et pour $C = 0$, on a $u(t) \leq 0$, donc $u(t) = 0$ pour tout $t \in [t^*, t^* + \delta]$, d'où $y_1(t) = y_2(t)$ pour tout $\in [t^*, t^* + \delta]$.
Ceci montre que $t^* + \delta$ est dans S et contredit donc la définition de t^*.
iii) **Existence :**
Soit $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ un intervalle contenant t_0 dans son intérieur. On pose $y^0(t) = y_0$ pour tout $t \in J$ et on construit, par récurrence, la suite de fonctions

$$y^{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y^n(s)) \, ds, \ \ \forall t \in J.$$

Ceci revient à définir $y^{n+1} = \varphi(y^n)$ où $\varphi : C^0(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^0(J, \mathbb{R}^n)$ est l'application qui à y associe

$$\varphi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \, ds, \ \ \forall t \in J.$$

Résoudre l'équation (1.23) revient à trouver un point fixe de l'application φ.
Comme J est compact, on peut munir $E = C(J, \mathbb{R}^n)$ de la norme infinie, ce qui en fait un espace complet. On peut donc espérer appliquer le théorème du point fixe de Banach à cette fonction. Pour cela, il faudrait montrer que φ est contractante.
Comme on ne possède aucune information globale sur f, il se peut que $\|f(s, y)\|$ soit très grand quand $\|x\|$ est grand et il y a donc aucune chance que nous arrivions à montrer que φ est contractante sur E.
On va donc essayer d'appliquer le théorème sur le sous-espace fermé $F = C\left(J, \overline{B}(y_0, r)\right)$ de E qui est donc bien complet.
Pour cela, on peut jouer sur les paramètres α et r pour faire en sorte que $\varphi(F) \subset F$ et que φ soit contractante.
-Fixons une valeur $\alpha_0 > 0$ et un nombre $r_0 > 0$ tels que le compact $K_0 = [t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ soit inclus dans l'ouvert U sur lequel (1.21) est vraie.
-On note maintenant $M = \sup_{[t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)} \|F\|$.
Ainsi, pour tout fonction $y \in \mathcal{C}^0\left([t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0], \overline{B}(y_0, r_0)\right)$ on a

$$\|\varphi(y)(t) - y_0\| \leq \| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \, ds\| \leq |t - t_0| M.$$

Si on veut s'asurer que $\varphi(y)(t)$ reste dans la boule $\overline{B}(y_0, r_0)$, il faut se restreindre à un intervalle $[t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0]$ avec $0 < \alpha < \alpha_0$ choisi pour que

$$\alpha M \leq r_0 \tag{1.24}$$

Ainsi, l'espace $F_\alpha = \mathcal{C}^0\left([t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0], \overline{B}(y_0, r_0)\right)$ est laissé fixe par φ dés que (1.24) est vérifiée .

-Essayons maintenant d'étudier le caractère contractante de φ sur un tel espace. Soient $y, z \in F_\alpha$, on a

$$\|\varphi(y)(t) - \varphi(z)(t)\| \leq |\int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s))\| ds| \leq C_{t_0,y_0}|t - t_0|\|y - z\|_\infty,$$

et donc

$$\|\varphi(y) - \varphi(z)\| \leq C_{t_0,y_0}\alpha\|y - z\|_\infty.$$

D'où, φ sera contractante dés que

$$\alpha C_{t_0,y_0} < 1 \tag{1.25}$$

- En conclusion, on va choisi $0 < \alpha \leq \alpha_0$ qui satisfait (1.24) et (1.25), ce qui est bien entendu possible. La fonction φ laisse alors invariant le sous-espace fermé $F_\alpha \subset E$ et elle est contractante dans cet espace. D'aprés le théorème du point fixe de Banach, il existe donc une unique solution $y \in f_\alpha$ à l'équation (1.23) et ainsi $([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha, y])$ est une solution du problème de Cauchy considéré. C'est également l'unique solution sur cet intervalle qui prend ses valeurs dans la boule$\overline{B}(y_0, r)$.

- Il reste à montrer que toute autre solution éventuelle z du problème de Cauchy définie sur un intervalle de la forme $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ avec $\beta \leq \alpha$ coincide avec y.

· Si z prend ses valeurs dans la boule $\overline{B}(y_0, r_0)$, alors la propriété d'unicité dans le théorème du point fixe donne le résultat.

· Si z ne prend pas ses valeurs dans cette boule, on note $\tilde{B}$ le plus grand nombre dans $[0, \beta]$ tel que $z([t_0 - \beta, t_0 + \beta])$ est contenu dans cette boule. On a $\tilde{B} < \beta$ par hypothèse et $\tilde{B} > 0$ car $z(t_0) = y_0$ est dans l'intérieur de la boule et que z est continue.

On a alors

$$\|z(t) - y_0\| \leq |t - t_0|M \leq \beta M \leq \alpha M \leq r_0, \ \ \forall t \in [t_0 - \tilde{B}, t_0 + \tilde{B}],$$

ce qui contredit la maximalité de $\tilde{B}$. □

Proposition 1.6. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et f une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}^p$. Alors*

(i) Si f est localement lipschitzienne sur Ω, elle est continue sur Ω.

(ii) Si $f \in \mathcal{C}^1$, alors f est localement lipischtzienne. De plus, sur un compact, la meilleure constante est la norme du maximum de la dérivé.

Théorème 1.8. *(forme faible). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si la fonction $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 alors pour tout donnée de Cauchy (1.22) $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe, au voisinage de t_0, une unique solution du problème de Cauchy associé (1.22). En particulier, pour tout telle donnée, il existe une unique solution maximale associé et toute autre solution vérifiant la condition de Cauchy est une restriction de cette solution maximale.*

Chapitre 2

Notions de Stabilité pour les systèmes différentiels

2.1 Stabilité des solutions :

La question d'une stabilité d'une des questions fondamentale de la théorie qualitative, elle a été etudier par le mathématicien LYAPUNOV.
Il est important de connaitre le comportement de la solution lorsque $t \longrightarrow +\infty$, une solution est dite stable si les solutions associé à des valeures voisigne de la donné initiale restent proche de la solution considéré jusqu'a ∞ [4].

Considérons le problème de Cauchy associé à léquation différentielle

$$y' = f(t, y) / f : U \subset I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

avec condition initiale $y(t_0) = z_0$. On suppose que la solution de ce problème existe sur $[t_0, +\infty[$.

Définition 2.1. *Soit $y(t, z)$ la solution du (2.1) tel que $y(t_0, z) = z_0$. On dira que la solution $y(t, z_0)$ est stable s'il existe une boule $\bar{B}(z_0, r)$ et une constante $c \geq 0$ telles que :*
i/ pour tout $z \in \bar{B}(z_0, r), t \to y(t, z)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$.
ii/ pour tout $z \in \bar{B}(z_0, r)$ et $t \geq t_0$ on a

$$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq c\|z - z_0\|.$$

La solution $y(t, z_0)$ est dite asymptotiquement stable, si elle est stable et si la condition (iii) plus forte que (ii) est satisfaite.
iii/ Il existe une boule $\bar{B}(z_0, r)$ et une fonction $y : [t_0, +\infty[\longrightarrow R_+$ continue avec $lim_{t \longrightarrow +\infty} y(t) =$

0 *telle que pour tous* $z \in \bar{B}(z_0, r)$ *et* $t \geq t_0$ *on ait*

$$\|y(t,z) - y(t,z_0)\| \leq y(t)\|z - z_0\|.$$

Définition 2.2. *Un point* x^* *est un point d'équilibre ou point stationnaire si* $f(t, x^*) = 0$*, pour tout* $t \in I$*.*

Définition 2.3. *On appelle portrait de phases d'un système différentiel l'ensemble de ses trajectoires.*

Remarque 2.1. *Dans la pratique, tracer le portrait de phases d'un système de dimension 2, c'est tracer, dans le plan, suffisamment de trajectoires pour que l'on puisse les imaginer toutes.*

2.1.1 Système linéaire à coefficients constants

Pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(t_0) = Z \end{cases} \tag{2.2}$$

est $Y(t,z) = e^{(t-t_0)A}z$.
D'où

$$\|Y(t,z) - Y(t,z_0)\| \leq \|e^{(t-t_0)A}\|\|z - z_0\|,$$

donc la stabilité est liée au comportement de la norme $\|e^{(t-t_0)A}\|$ lorsque $t \to +\infty$ qui doit rester bornée . On distingue deux cas :
• Le cas scalaire $n = 1$:

$$A = (a) \;\; et \;|e^{(t-t_0)A}| = e^{(t-t_0)Re(a)},$$

où $Re(a)$ désigne la partie réelle du nombre a.
- Si $Re(a) > 0$; alors $\lim_{t\longrightarrow+\infty} |e^{(t-t_0)a}| = +\infty$, dans ce cas les solutions sont **instables**.
-Si $Re(a) = 0$; alors $|e^{(t-t_0)a}| = 1$, les solutions sont **large stables.**
-Si $Re(a) < 0$; alors $\lim_{t\longrightarrow+\infty} |e^{(t-t_0)a}| = 0$, les solutions sont **asymptotiquement stables**.
• Le cas générale n>1 :
- **Si A est diagonalisable :** on ce ramène après changement de variable linéaire au système

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, le système se ramène au équations

$$y_i' = \lambda_i y_i,\ 1 \leq i \leq n,$$

qui admetent pour solutions

$$y_i\left(t, z\right) = z_i e^{\lambda_i (t-t_0)}\ \ , 1 \leq i \leq n.$$

Les solutions sont **stables** si et seleument si $Re\left(\lambda_i\right) \leq 0$, **asymptotiquement stables** si et seleument si $Re\left(\lambda_i\right) < 0$, et **instables** si $Re\left(\lambda_i\right) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Exemple 2.1. *Considérons le système $Y' = AY$ avec $A \in \mathbb{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$:*
1)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Donc les solutions sont instables.
2)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1 = \lambda_2$. Donc les solutions sont asymptotiquement stables.

-Si A n'est pas diagonalisable : il suffit de regarder ce qui passe pour chaque bloque d'une triangulation, supposons donc :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

donc

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

où N est une matrice nilpotente non nulle telle que $N^\alpha = 0$ (cette décomposition s'appelle la décomposition de Dunford).
Donc

$$e^{(t-t_0)A} = e^{\lambda(t-t_0)} e^{(t-t_0)N} = e^{\lambda(t-t_0)} \sum_{K=0}^{\alpha-1} \frac{\left(t-t_0\right)^K}{K!} N^K.$$

Les coefficients de $e^{(t-t_0)A}$ sont des produits de $e^{\lambda(t-t_0)}$ par des polynômes de degré $\leq \alpha - 1$. (Comme $N \neq 0$, il y a au moins un polynôme de degré supérieur ou égal à 1).
Si $Re\left(\lambda\right) < 0$ les coefficients tendent vers 0, et les solutions sont asymptotiquement stables.

- Si $Re(\lambda) > 0$ les modules tend vers $+\infty$, et les solutions sont instables.
- Si $Re(\lambda) = 0$ donc $|e^{\lambda(t-t_0)}| = 1$, les solutions sont instables.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes de la matrice A, alors les solutions du système linéaires $Y' = AY$ sont :
- Asymptotiquement stable si et seulement si $Re(\lambda_i) < 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$.
- Stable si et seulement si $R(\lambda_i) < 0$, $ou\, Re(\lambda_i) = 0$, est le bloc correspondant est diagonalisable pour tout $1 \leq i \leq n$.

Exemple 2.2. *Considérons le système $Y' = AY$ avec $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$:*
1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1 - i$, $\lambda_2 = -1 + i$. Donc les solutions sont asymptotiquement stable.
2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -i\sqrt{5}$, $\lambda_2 = i\sqrt{5}$. Donc les solutions sont stable.

Définition 2.4. *L'espace des phases d'un système $y' = f(t, y)$ est l'ensemble ouvert où évolue y.*

2.1.2 Portrait de phase en dimension 2

Soit le polynôme caractéristique de la matrice A :

$$P_A(x) = \det(A - xI) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

alors A possède deux valeurs propres λ_1 et λ_2, ces valeurs propres nous renseignent sur le type de stabilité du système $Y' = AY$ selon leur signe :

1ercas

I)- Si λ_1 et λ_2 sont réels :
-Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, alors le point d'équilibre est instable et il appelé noeud instable.

Exemple 2.3. *Soit le système $Y' = AY$:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$ sont toutes positives et différentes on parle de noeud instable ou de source

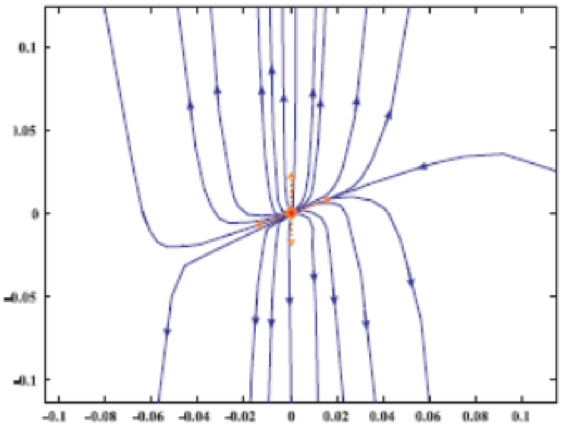

FIGURE 2.1 – Noeud instable

- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ alors le point d'équilibre est stable et il appelé un noeud stable

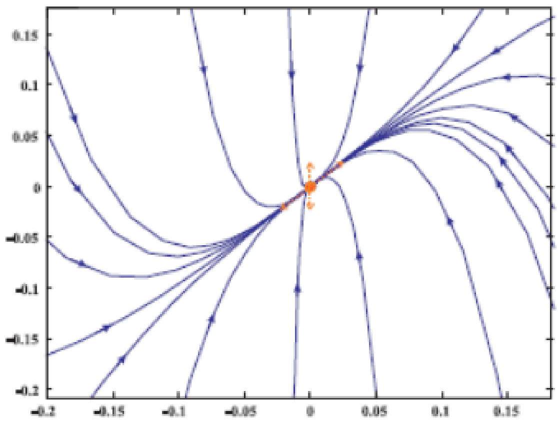

FIGURE 2.2 – Noeud stable

Exemple 2.4. *Soit le système $Y' = AY$ avec :*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -1$ sont tout négatives et différentes, on parle de nœud stable.

-Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ dans ce cas le point d'équilibre représente un col ou point selle

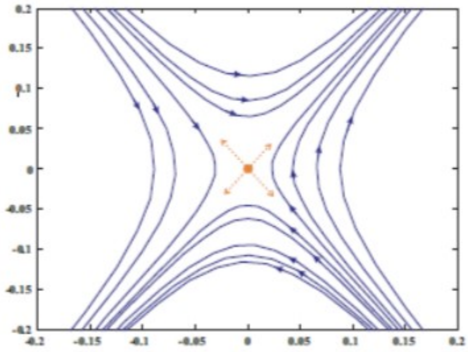

FIGURE 2.3 – Point selle

Exemple 2.5. *Soit le système suivant $Y' = AY$ avec :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1 > 0$ et $\lambda_2 = -2 < 0$,alors on parle d'un point selle

i) Si A est diagonalisable : ceci a lieu si tous les vecteurs sont des vecteurs propres, chaque droite qui passe par le point d'équilibre est une trajectoire, on distingue deux cas :
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$: le point d'équilibre est un neoud asymptotiquement instable.

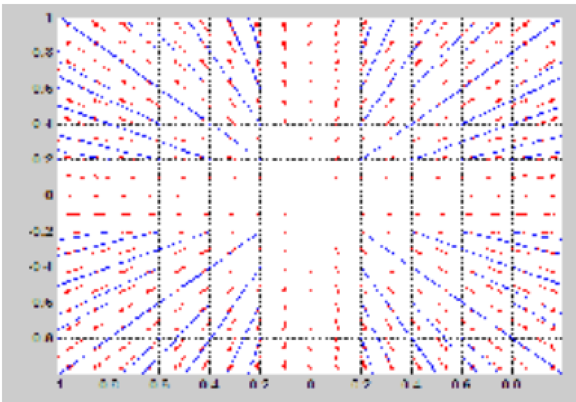

FIGURE 2.4 – Noeud asymptotiquement instable

Exemple 2.6. *Soit le système suivant $Y' = AY$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A Sont $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$ sont positive et égaux, alors on parle de nœud asymptotiquement instable.

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$: le point d'équilibre est un nœud asymptotiquement stable.

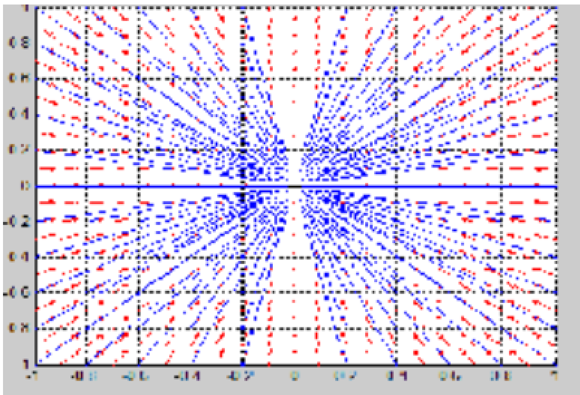

FIGURE 2.5 – Nœud asymptotiquement stable

Exemple 2.7. *Soit le système $Y' = AY$:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1 = \lambda_2$ sont négative et égaux, alors on parle de noeud asymptotiquement stable.

ii : Si A n'est pas diagonalisable : il existe un seul vecteur propre et donc une seule droite qui contient une trajectoire. Le point d'équilibre est dénommé noeud dégénéré.
-Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ le point d'équilibre est un neoud dégénéré instable

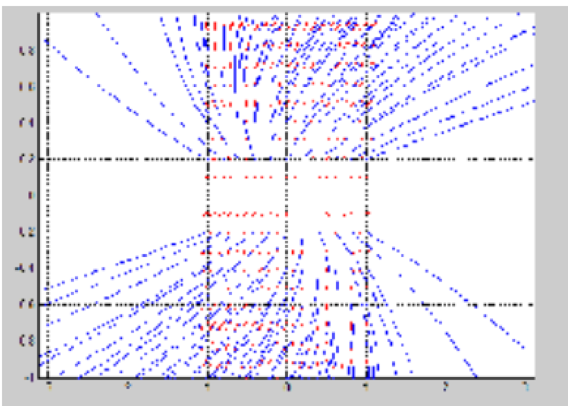

FIGURE 2.6 – Noeud dégénéré instable

Exemple 2.8. *Considérons le système* $Y' = AY$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a une valeur propre double $\lambda = 1 > 0$ *alors on parle d'un nœud dégénéré instable*

-Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ le point d'équilibre est un nœud dégénéré stable.

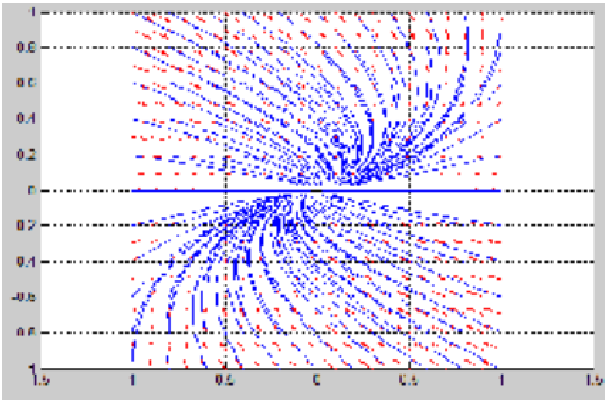

FIGURE 2.7 – Noeud dégénéré stable

Exemple 2.9. *Considérons le système* $Y' = AY$ *:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a une valeur propre double $\lambda = -1 < 0$ *alors on parle d'un nœud dégénéré stable.*

- Dans ce cas des valeurs propres identique , obtient un nœud , soit stable $(\lambda < 0)$, soit instable si $(\lambda > 0)$.

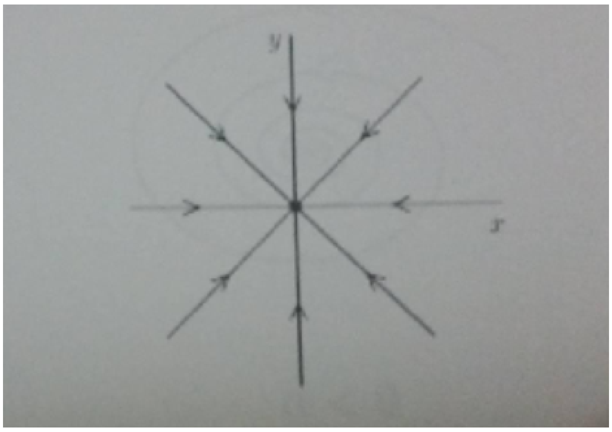

FIGURE 2.8 – nœud étoilé stable

Exemple 2.10. *Soit le système* $Y' = AY$ *:*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A *sont* $\lambda_1 = \lambda_2 = 6 > 0$ *(double), alors on parle d'un nœud étoilé instable.*

2^{me}cas

II)-Si λ_1 et λ_2 sont complexes : on pose :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{cases}$$

- Si $\alpha = 0$: les trajectoires sont des ellipses fermées avec période $T = \frac{2\pi}{\beta}$. Le point d'équilibre est dit un centre.

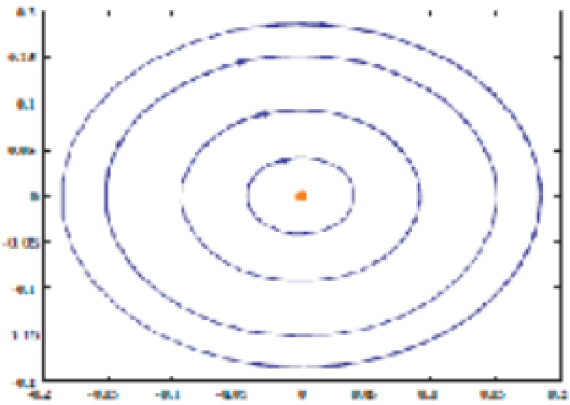

FIGURE 2.9 – Centré

Exemple 2.11. *Soit le système $Y' = AY$:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2i$ et $\lambda_2 = -2i$ sont complexe et $\alpha = 0$, alors on parle d'un centre

- Si $\alpha < 0$: le système est asymptotiquement stable et les trajectoires convergent vers le point d'équilibre en suivant des spirales. Le point d'équilibre est dit foyer stable.

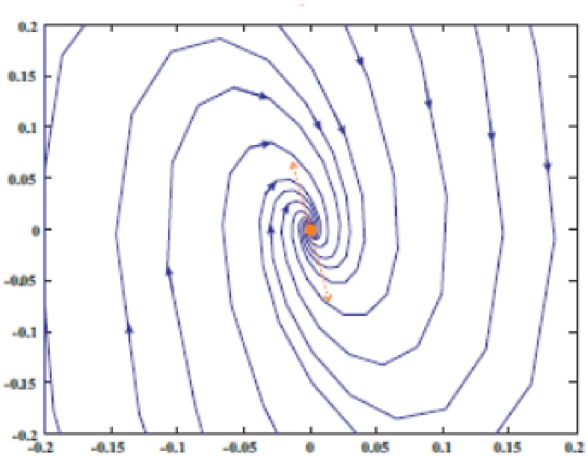

FIGURE 2.10 – Foyer stable

Exemple 2.12. *Soit le système $Y' = AY$:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1+2i$ et $\lambda_2 = -1-2i$ sont complexes et $\alpha = -1 < 0$, alors on parle d'un foyer stable.

- Si $\alpha > 0$: le système est instable et les trajectoires s'éloignent du point d'équilibre en suivant des spirales. Le point d'équilibre est dit foyer instable.

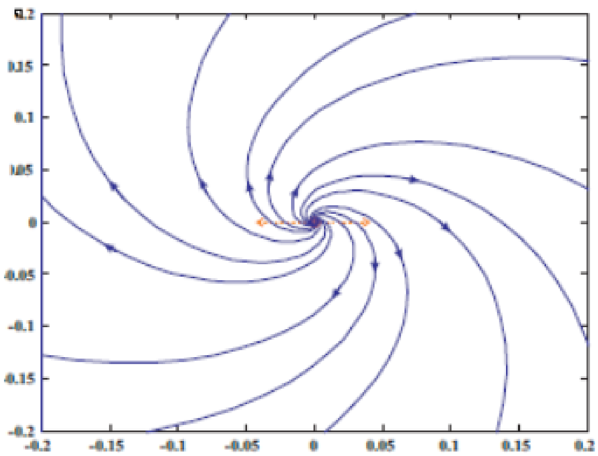

FIGURE 2.11 – Foyer instable

Exemple 2.13. *Soit le système $Y' = AY$:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2 + 2i$ et $\lambda_2 = 2 - 2i$ sont complexes et $\alpha = 2 > 0$, alors on parle d'un foyer instable.

Remarque 2.2. *Comme on ne peut pas toujours trouver des expressions faciles à manipuler de ces valeurs propres, on utilise le déterminent et la trace de la matrice A pour pouvoir prédire le comportement des systèmes au voisinage des points d'équilibre. On sait que :* $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$ *et* $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$*. L'équation caractéristique peut prendre donc la forme :*

$$P_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2 = x^2 - tr(A)x + \det(A) = 0$$

Il en suit que : $\lambda_{1,2} = \frac{tr(A) \pm \left(tr(A)^2 - 4\det(A)\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$.

- Si $\det(A) < 0$ alors on aura deux valeurs propres réelles l'une positive et l'autre négative ce qui implique que le point d'équilibre est un point selle et donc instable.

Exemple 2.14. *Soit le système $Y' = AY$:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -4$ et $\lambda_2 = 5$,$\det(A) = -20 < 0$*, alors on parle d'un point selle et donc instable.*

- Si $\det(A) > 0$ mais $tr(A) > 0$, on distingue deux cas selon le signe du discriminent :
i) Si $\Delta = \left(tr(A)^2 - 4\det(A)\right) > 0$ donc la matrice A admet deux valeurs propres réelles

positives d'où le point d'équilibre est un nœud instable.
ii) Si $\Delta < 0$, la matrice A admet deux valeurs propres complexes conjuguées avec une partie réelle positive (car $tr\,(A) > 0$) donc le point d'équilibre est un foyer instable.

Exemple 2.15. *Soit le système suivant $Y' = AY$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$, $\det(A) = 2 > 0$ et $tr\,(A) = 3 > 0$ et $\Delta = 1 > 0$ alors on parle un nœud instable.

- Si $\det(A) > 0$, avec $tr\,(A) < 0$, on distingue aussi deux cas selon le signe du discriminent :
i) Si $\Delta \geq 0$, la matrice A admet deux valeurs propres réelles négatives donc le point d'équilibre est un nœud stable.
ii) Si $\Delta < 0$, la matrice A admet deux valeurs propres complexes à partie réelle négative donc le point d'équilibre est un foyer stable.

Exemple 2.16. *Soit le système $Y' = AY$:*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 - 2$,$\det(A) = 2 > 0$,$tr\,(A) = -3 < 0$ et $\Delta = 1 > 0$, alors on parle un nœud stable

- Si $\det(A) > 0$ avec $tr\,(A) = 0$, le point d'équilibre est un centre. L'ensemble de ces cas peut être résumé par le graphique dans le domaine $tr\,(A)$, $\det(A) = 0$ où le parabole a pour équation $\left(tr\,(A)^2 - 4\det(A)\right)$.

2.2 Stabilité des systèmes différentiels non linéaires

Dans cette section, on considère des systèmes d'équations différentielles ordinaires couplées non linéaires :

$$\dot{X} = \phi(X)\ ,\ X \in S \subseteq \mathbb{R}^2$$

où ϕ est une fonction non linéaire contin$\hat{u}$ument différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Par rapport à ce que nous avons vu pour les systèmes linéaires, il va falloir raisonner de manière locale au voisinage des points d'équilibres (méthode de linéarisation), et nous verrons que le portrait de phase global n'est pas toujours une réplique exacte de portrait de phase local au voisinage des points d'équilibres. Ici $\dot{X}$ désigne $X'(t)$ c'est à dire $\dot{X} = X'(t)$.

2.2.1 Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre

Considérons le système où f et g deux fonctions de classe C^2 , définies sur $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \tag{2.3}$$

en admettant un point d'équilibre (x^*, y^*) solution de :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x^*,y^*) = 0, \\ \dot{y} = g(x^*,y^*) = 0. \end{cases}$$

On introduit les variables locales

$$\begin{cases} u(t) = x(t) - x^*, \\ v(t) = y(t) - y^*. \end{cases}$$

On se place dans un voisinage de (x^*, y^*) et on procède un développement en série de Taylor au premier ordre des fonctions f et g :

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{x} = f(x^*,y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*)(y - y^*) \\ \dot{v} = \dot{y} = g(x^*,y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*,y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*,y^*)(y - y^*) \end{cases}$$

Chacune des fonctions f, g et cette fois approchée par l'équation d'un plan.
Or $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$, d'où :

$$\begin{cases} \dot{u} = a_{11}u + a_{12}v \\ \dot{v} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

où $A^* = [a_{ij}]$ est **la matrice Jacobienne** calculée au point d'équilibre avec :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \, et \;\; A^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*,y^*) \end{pmatrix}$$

On pose

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad et \quad \dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}.$$

Le système $\dot{U} = A^*U$ est un système linéaire qui approxime le système de départ au voisinage du point d'équilibre (x^*, y^*). Ainsi, si un système possède plusieurs points d'équilibre, il y a aura autant de systèmes linéaires que de points d'équilibre.

Exemple 2.17. *On considère le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = \cos(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x - y = f(x,y) \\ \dot{y} = \cos(x) = g(x,y) \end{cases}$$

Les points d'équilibres :

$$\begin{cases} f(x^*,y^*) = 0 \\ g(x^*,y^*) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^* - y^* = 0 \\ cos(x^*) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^* = y^* \\ x^* = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Alors : $(x^*,y^*) = (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)\ \ k \in \mathbb{Z}$.
La matrice jacobienne s'écrit sous la forme suivante :

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial f}{\partial}(x^*,y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*,y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^*(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ (-1)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A^*) = (-1)^{k+1}$

***1**^{re} **cas :** k pair*

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $\det(A^*) = -1 < 0 \iff (x^*,y^*)$ *est un point selle*

$$\begin{cases} \dot{u} = u - v \\ \dot{v} = -u \end{cases}$$

***2**^{me} **cas :** k impair*

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \det A^* = 1 > 0 \\ trA^* = 1 > 0 \\ \Delta = -3 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow\ (x^*,y^*)$ *est un foyer instable*

$$\begin{cases} \dot{u} = u - v \\ \dot{v} = u \end{cases}$$

2.3 Stabilité au sens de Lyapunov

On a vu dans la partie précédente que la méthode de linéarisation parfois ne suffit pas, dans cette partie nous introduisons la stabilité d'un système à l'aide d'une fonction convenablement choisi, appelée fonction de Lyapunov. Cette méthode, dite directe est un outil pour les systèmes non linéaires et elle a l'avantage d'être applicable dans des situations non standards.

Définition 2.5. ***(Fonction de Lyapunov)*** *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contient le point d'équilibre (x^*, y^*) , $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 est dite définie positive si :*
1. $V(x^*, y^*) = 0$,
2. $V(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \in D$ avec $(x, y) \neq (x^*, y^*)$

Exemple 2.18. *La fonction suivante est définie positive sur $\mathbb{R}^2$:*

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

puisque elle est nulle à l'origine et strictement positive ailleurs.

Théorème 2.1. ***(Lyapunov)*** *Soit (x^*, y^*) un point d'équilibre du système (2.3) soit D un voisinage de (x^*, y^*) , $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 tel que :*

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y},$$

alors
1. Si $\dot{V} < 0$, $\forall (x, y) \in D \setminus (x^*, y^*)$ alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable,
2.Si $\dot{V} \leq 0$, $\forall (x, y) \in D \setminus (x^*, y^*)$ alors le point d'équilibre est stable,
3.Si $\dot{V} > 0$, $\forall (x, y) \in D \setminus (x^*, y^*)$ alors le point d'équilibre est instable.

Exemple 2.19. ***1.*** *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3, \\ \dot{y} = -y^3. \end{cases}$$

Cherchons les point d'équilibre :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x^3 = 0 \\ -y^3 = 0 \end{cases}$$

D'où l'origine est l'unique point d'équilibre. La matrice Jacobienne est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -3x^2 & 0 \\ 0 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

ce qui donne à l'origine :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, le point $(0,0)$ *est un point non hyperbolique et la linéarisation n'apporte donc aucune information sur la stabilité de l'origine, considérons la fonction de Lyapunov suivante :*

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

qui est définie positive. Calculons la dérivée de la fonction V *:*

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} = -(x^4 + y^4)$$

qui est une fonction définie négative. De plus $\dot{V} < 0$*, on peut donc conclure que l'origine est asymptotiquement stable. Cela veut dire que quelle que soit la condition initiale prise dans le plan, la trajectoire tend vers l'origine lorsque* $t \to +\infty$.

2. *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy^2 \\ \dot{y} = y - x^2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x - xy^2 = f(x,y) \\ \dot{y} = y - x^2 y = g(x,y) \end{cases}$$

Les points d'équilibre :

$$\begin{cases} f(x^*,y^*) = 0 \\ g(x^*,y^*) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^* - x^*y^{*2} = 0 \\ y^* - x^{*2}y^* = 0 \end{cases} \begin{cases} x^*(1-y^{*2}) = 0 \\ y^*(1-x^{*2}) = 0 \end{cases} \begin{cases} x^* = 0 \;\; \text{où} \;\; 1 - y^{*2} = 0 \\ y^*(1-x^{*2}) = 0 \end{cases}$$

si $x^* = 0 \;\; \Rightarrow y^* = 0$ *d'après* $(y^*(1-x^{*2}) = 0)$
si $1 - y^{*2} = 0 \;\; \Rightarrow y^* = \pm 1$
$y^* = 1 \;\; \Rightarrow \;\; 1 - x^{*2} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x^* = \pm 1$
$y^* = -1 \;\; \Rightarrow \;\; -1 + x^{*2} = 0 \;\; x^* = \pm 1$
Alors : les points d'équilibre sont

$$(0,0); (1,1); (-1,1); (1,-1); (-1,-1).$$

La linéarisation :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - y^2 & -2xy \\ -2xy & 1 - x^2 \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \det(J(0,0)) = 1 > 0 \\ tr(J(0,0)) = 2 > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

donc : $(0,0)$ *est un origine nœud dégénéré instable .*

$$J(-1,-1) = J(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \det(J(-1,-1)) = \det(J(1,1)) = -4 \\ tr(J(-1,-1)) = tr(J(1,1)) = 0 \\ \Delta = 16 > 0, \end{cases}$$

donc : $(-1,-1)$, $(1,1)$ *sont des points selles.*

$$J(1,-1) = J(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \det(J(1,-1)) = \det(J(-1,1)) = -4 < 0 \\ tr(J(1,-1)) = tr(J(-1,1)) = 0 \\ \Delta = 16 > 0, \end{cases}$$

donc : $(1,-1)$, $(-1,1)$ *sont des points selles.*

3. *Utiliser la fonction de Lyapunov définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $V(x,y) = x^2 + y^2$ *pour étudier la stabilité du système* $\begin{cases} \dot{x} = y - x(x^2+y^2), \\ \dot{y} = -x - y(x^2+y^2). \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ *Etudions la fonction* V *:*

(a) On a $V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ *et* $V(x,y) = x^2 + y^2 > 0$ *pour tout* $(x,y) \neq (0,0)$ *.*

(b) Pour toute solution $(x,y) \neq (0,0)$ *, on a*

$$\begin{aligned} V'(x,y) &= \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} \\ &= 2x[y - x(x^2+y^2)] + 2y[-x - y(x^2+y^2)] \\ &= -2(x^2+y^2)^2 < 0. \end{aligned}$$

Alors : le système est asymptotiquement stable.

Chapitre 3

Résultats d'existence et de stabilité

3.1 Résultats d'existence pour une équation différentielle

Dans cette section, nous établissons le résultat d'existence suivant du problème (1.16) en utilisant le théorème 1.15.

Théorème 3.1. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue, alors si $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$ sont donnés, le problème (1.16) admet au moins une solution x de classe C^1 définie sur un certain intervalle dans I de la forme $[t_0 - h, t_0 + h]$ avec $h > 0$.*

Démonstration. :
Cylindre de sécurité :
Comme I et Ω sont des ouverts, il existe un cylindre

$$S_0 = [t_0 - h_0, t_0 + h_0] \times \overline{B}(x_0, r_0)$$

de longueur $2h_0$ et de rayon r_0 assez petit, tel que $S_0 \subset I \times \Omega$. L'ensemble est fermé borné dans $\mathbb{R}^{n+1}$, donc S_0 est compact. Alors, f est bornée sur S_0 par une constante M, c'est-à-dire

$$M = \max_{(t,x)\in S_0} \|f(t,x)\|.$$

Soit $h \leq h_0$ et x une solution du problème (1.16) définie au moins sur $I_0 \subset [t_0 - h, t_0 + h]$. Considérons un cylindre

$$S = [t_0 - h, t_0 + h] \times \overline{B}(x_0, r_0) \subset S_0,$$

au temps $\tau \in [t_0 - h, t_0 + h]$, alors par continuité,

$$r_0 = \|x(\tau) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} x'(s)\, ds \right\| \leq hM.$$

Donc, si $h \leq \min\left(h_0, \frac{r_0}{M}\right)$ alors toute solution définie sur $I_0 \subset [t_0 - h, t_0 + h]$ reste dans la boule $\overline{B}\,(x_0, r_0)$. On nommera cylindre de sécurite l'ensemble

$$[t_0 - h, t_0 + h] \times \overline{B}\,(x_0, r_0)\,.$$

Application du théorème 1.15 :
On note : $E = C\left([t_0 - h, t_0 + h] \times \mathbb{R}^n\right)$ et $S = C\left([t_0 - h, t_0 + h] \times \overline{B}\,(x_0, r_0)\right)$.
Alors, E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé et S est un convexe fermé non vide, pour $x \in S$, on définie l'application T sur $[t_0 - h, t_0 + h]$ comme suit :

$$Tx\,(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\,(s, x\,(s))\,ds,$$

par convergence dominée T est continue puis comme $Mh \leq r_0$, on a

$$\|Tx\,(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f\,(s, x\,(s))\|\,ds \leq M\,|t - t_0| \leq Mh \leq r_0.$$

Ainsi $Tx\,(t) \in \overline{B}\,(x_0, r_0)$ pour tout t, donc $T\,(S) \subset S$, et $T\,(S)$ est uniformément borné dans E.
D'une autre coté, soit $x \in S$, $t_1,\ t_2 \in [t_0 - h, t_0 + h]$, alors

$$\begin{aligned} \|Tx\,(t_1) - Tx\,(t_2)\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} f\,(s, x\,(s))\,ds \right\| \\ &\leq M\,|t_1 - t_2|\,. \end{aligned}$$

Il est clair que, le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro indépendamment de x lorsque $t_1 - t_2 \longrightarrow 0$. Donc, $T\,(S)$ est équicontinue.
Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, $T\,(S)$ est relativement compact dans E.
Ainsi, $T : S \longrightarrow S$. est compact.
D'après le théorème 1.15, l'application T possède un point fixe.
D'où, le problème (1.16) admet au moins une solution. □

3.2 Équation du pendule

L'équation différentielle régissant le mouvement est

$$\theta'' = -\sin(\theta) - F\,(\theta')\,, \tag{3.1}$$

où :

— θ est l'angle du pendule,

— $F \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ est une fonction de frottement vérifiant $F(0) = 0$ et $F'(0) > 0$.

1) On réécrit l'équation différentielle (3.1) en un système d'ordre 1 :

$$X = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}, \quad X' = f(X) = \begin{pmatrix} \theta' \\ -\sin(\theta) - F(\theta'). \end{pmatrix}$$

Puisque $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, d'après le théorème de Cauchy il existe une unique solution maximale pour toute condition initiale $X(t_0) = X_0$.
2) Points d'équilibre : Les points d'équilibre vérifient $X' = 0$,

$$\begin{cases} \theta' = 0 \\ -\sin(\theta) - F(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta' = 0 \\ \sin(\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta' = 0 \\ \theta = k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Les points d'équilibre sont $(k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. Stabilité des points d'équilibre :
La matrice jacobienne de f en $(k\pi, 0)$:

$$Jac(f)(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & -F'(0) \end{pmatrix}.$$

i) Si k est pair :

$$Jac(f)(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -F'(0) \end{pmatrix} = A.$$

On a $\det(A) = 1 > 0$, $trc(A) = -F'(0) < 0$ et $\Delta = (F'(0))^2 - 4$
donc on distingue deux cas selon le signe du discriminent .
1) Si $\Delta \geq 0$, la matrice A admet deux valeurs propres réelles négatives donc le point d'équilibre est un nœud stable.
2) Si $\Delta < 0$, la matrice A admet deux valeurs propres complexes à partie réelle négative donc le point d'équilibre est un foyer stable.
ii) Si k est impair :

$$Jac(f)(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -F'(0) \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(A) = -1$, les valeurs propres sont nécessairement réelles, non nulles, de signe opposé. L'une des deux est strictement positive. Par la remarque, $(k\pi, 0)$ est donc un point d'équilibre instable.

Bibliographie

[1] H. AMANN, Ordinary Differential Equation : An Introduction to Nonlineair Analysis. Degruyter Studies in Mathematics,Walter De Guyter Inc, (1990).

[2] S. Banach, Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrals. Fundamenta Mathematicae, 3 (1922), 133-181.

[3] H. Brezis : Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris, (1983).

[4] J. P. Demailly, Analyse numérique et équations diffé- rentielles. EDP sciences, (2006).

[5] H. Djourdem, Espaces vectoriels normés, Université Ahmed-ZABANA, Relizane, (2020). http ://dspace.univ-relizane.dz/home/handle/123456789/628.

[6] F. Dugundji and A. Granas : Fixed Point Theory, Springer, New York, (2003).

[7] H. Adib, Stabilité des systèmes di¤érentiels. Université Mohamed Kheider, Biskra, (2018).

[8] P. Hartman, Ordinary differential equations. Wiley 1964.

[9] T. Lelièvre, Equations différentielles ordinaires Notes du cours Modéliser, Simuler, Programmer (MoPSI)(Cours de deuxieme année de l'ENPC, 2007).

[10] M.Nadir, Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila 2004.