

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de RELIZANE
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département: Génie civil et travaux publics



MEMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de MASTER en :

Génie des matériaux

Intitulé

Comportement thermomécanique d'une plaque poreuse (FGM)

Présenté par:

Mr : Bouloufa Bouamrane

Devant les membres de jury :

Président : Mr Tounsi abdeljebbar

Maître assistant (B)A (U. Relizane)

Encadreur : Mr Ait Atmane Redhwane

Maître de conférence (B) A (U. Relizane)

Co Encadreur : Mr Belabbaci abdelmadjid

Maître assistant (B)A (U. Relizane)

Examineur : Mr Houari ali

Maître assistant (A) A (U. Relizane)

Année universitaire : 2024/2025

Dédicace

À l'âme de mon cher grand-père, Qui a quitté ce monde, mais sa présence ne quittera jamais mon cœur...

J'aimerais que tu sois là maintenant, Mon succès est le résultat de vos efforts, de vos prières et de votre amour. Que Dieu ait pitié de vous et fasse du Paradis votre demeure.

À ma mère et à mon père, La source de tendresse et de soutien éternel, Après Dieu, je vous dois à tous les deux le mérite de ce que j'ai accompli. Merci pour vos sacrifices et vos prières qui m'ont accompagné à chaque étape du chemin.

À mes chères sœurs, Source de joie et de soutien. . . Tu as toujours été là pour moi, tellement d'amour et d'appréciation pour toi.

À mon ami et frère Shams El Din, Qui a été mon compagnon de route, merci pour cela

Remerciements

Il est difficile de trouver les mots justes pour exprimer toute la gratitude que je ressens aujourd'hui.

Ce travail est l'aboutissement d'un parcours jalonné de doutes, d'efforts, mais surtout de belles rencontres et de soutiens inestimables.

À mes parents, vous qui avez toujours cru en moi, même lorsque la fatigue prenait le dessus. Merci pour votre amour inconditionnel, vos encouragements silencieux et vos sacrifices que je mesure un peu plus chaque jour. Votre présence a été ma plus grande force.

À Monsieur Ait Atmane Redhwane , je tiens à vous exprimer toute ma reconnaissance pour votre patience, votre écoute et vos conseils avisés. Votre accompagnement bienveillant a été essentiel dans la réalisation de ce travail et m'a permis de progresser tant sur le plan académique que personnel.

Je remercie également ma famille et mes proches pour leurs mots rassurants, leurs gestes réconfortants et leur soutien indéfectible dans les moments de doute. Vous avez su rendre ce parcours plus doux.

Enfin, une pensée sincère à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont croisé mon chemin durant cette aventure. Chacun de vous a contribué, d'une manière ou d'une autre, à l'accomplissement de ce projet.

Ce mémoire n'est pas seulement le fruit d'un travail personnel, mais aussi le reflet de tout l'amour, la confiance et l'accompagnement que j'ai reçus.

Merci, du fond du cœur.

Résumé

Résumé

Résumé

Dans le cadre de cette thèse, nous visons à mieux comprendre l'effet du gradient thermique sur le comportement mécanique des structures en matériaux composites avancés, dont les propriétés varient progressivement suivant l'épaisseur. La distribution des propriétés des matériaux suit des lois spécifiques.

Ce travail se divise en deux parties principales :

Dans la première partie, le comportement dynamique des poutres à propriétés graduellement variables, reposant sur des fondations élastiques variables, a été étudié en utilisant une théorie du cisaillement d'ordre supérieur. Cette théorie ne comporte que trois variables inconnues grâce à l'utilisation de l'intégrale indéfinie, ce qui permet de réduire le nombre d'équations de mouvement par rapport aux théories classiques du premier et du second ordre. Les poutres FGM sont supposées reposer sur des fondations de type Winkler–Pasternak, dont le module de Winkler varie le long de la poutre.

Dans la deuxième partie, une nouvelle formulation de la distribution du gradient thermique est proposée. Sur cette base, une étude paramétrique a été menée afin d'analyser l'effet de ce gradient sur le comportement au flambement et les vibrations des poutres imparfaites.

Les équations d'équilibre sont dérivées à l'aide du principe de Hamilton, et sont résolues analytiquement en utilisant la méthode de Navier. Les résultats numériques obtenus ainsi que les validations réalisées confirment la précision de la méthode développée pour prédire les effets des fondations sur le comportement statique et dynamique des plaques non homogènes.

Dans un second temps, une attention particulière est portée à l'étude du flambement thermique des plaques poreuses en matériau FGM. Une formulation analytique est développée pour intégrer à la fois l'effet du gradient thermique à travers l'épaisseur et l'effet de la porosité du matériau. Des solutions analytiques sont obtenues pour différentes conditions aux limites, permettant d'évaluer les températures critiques de flambement.

Enfin, une validation approfondie des résultats est effectuée dans le dernier chapitre, à travers des comparaisons avec les travaux antérieurs et des simulations numériques. Une étude paramétrique complète est menée pour examiner l'influence de la porosité, de l'indice de gradation, de la géométrie et des paramètres de fondation sur le comportement global des structures. Les résultats obtenus soulignent l'importance de prendre en compte ces paramètres dans la conception des structures en FGM soumises à des gradients thermiques.

Summary

Summary

Summary

In this thesis, we aim to gain a better understanding of the effect of thermal gradient on the mechanical behavior of structures made of advanced composite materials whose properties vary progressively through the thickness. The distribution of material properties follows specific and predefined laws.

This work is divided into two main parts:

In the first part, the dynamic behavior of functionally graded beams resting on variable elastic foundations is investigated using a higher-order shear deformation theory. This theory involves only three unknowns due to the use of an indefinite integral, which reduces the number of governing equations compared to classical first- and second-order theories. The beams are assumed to lie on Winkler–Pasternak foundations where the Winkler modulus varies along the beam length.

In the second part, a new formulation of the thermal gradient distribution is proposed. Based on this, a parametric study is conducted to analyze the influence of thermal gradient on the buckling and vibration behavior of imperfect beams.

The equilibrium equations are derived using Hamilton’s principle and solved analytically via Navier’s method. The numerical results, along with validation tests, confirm the accuracy of the proposed methodology in predicting the impact of elastic foundations on the static and dynamic response of nonhomogeneous plates.

A further section focuses on the thermal buckling analysis of porous FGM plates, where an analytical formulation is developed to incorporate both the thermal gradient effect and the material porosity. Closed-form solutions are obtained for various boundary conditions to evaluate the critical buckling temperatures.

Finally, in Chapter IV, the analytical models are validated through comparisons with results from previous studies and numerical simulations. A comprehensive parametric study is carried out to assess the effects of porosity, gradient index, geometry, and foundation parameters on the global mechanical behavior of the plates. The results demonstrate the importance of considering these parameters in the design of FGM structures subjected to thermal loading.

ملخص

ملخص

في إطار هذه الأطروحة، نسعى إلى فهم أفضل لتأثير التدرج الحراري على السلوك الميكانيكي للمنشآت المصنوعة من مواد مركبة متقدمة، والتي تتغير خصائصها تدريجياً عبر السمك. حيث يتم توزيع الخصائص الفيزيائية والمادية لهذه المواد وفق قوانين معينة ومدروسة.

ينقسم هذا العمل إلى جزأين رئيسيين:

◆ في الجزء الأول، تم دراسة السلوك الديناميكي للعوارض ذات الخصائص المتدرجة، الموضوع على قواعد مرنة متغيرة، بالاعتماد على نظرية قص من الدرجة العليا تحتوي على ثلاث متغيرات فقط، بفضل استخدام التكامل غير المحدد، مما يساهم في تقليل عدد معادلات الحركة مقارنةً بالنظريات الكلاسيكية من الدرجة الأولى والثانية. كما اعتُبر أن العوارض المصنوعة من مواد ذات تدرج وظيفي (FGM) موضوعة على أسس من نوع وينكلر-باسترناك (Winkler-Pasternak) ذات معامل مرونة متغير على طول العارضة.

◆ في الجزء الثاني، تم اقتراح صيغة جديدة لتوزيع التدرج الحراري عبر السمك. وُبنِي على أساسها نموذج تحليلي تم من خلاله إجراء دراسة تحليلية بارامترية بهدف تقييم تأثير هذا التدرج على سلوك الانبعاج (الخصوع) والاهتزازات في العوارض غير المثالية.

تم اشتقاق معادلات التوازن بالاعتماد على مبدأ هاملتون، وحُلَّت بشكل تحليلي باستخدام طريقة نافير (Navier). وقد أظهرت النتائج العددية المُتحصَّل عليها، بالإضافة إلى عمليات التحقق من الصحة، دقة

المنهجية المطورة في التنبؤ بتأثير الأساسات على السلوك الساكن والديناميكي للصفائح غير المتجانسة. وفي فصل لاحق، تم التطرق بتفصيل إلى دراسة الانبعاج الحراري للصفائح المسامية المصنوعة من مواد FGM، حيث طُورت صياغة تحليلية تأخذ بعين الاعتبار كلاً من تأثير التدرج الحراري وتوزيع المسامية. وقد أُجريت حلول تحليلية لحالات حدودية مختلفة لتحديد درجات الحرارة الحرجة للانبعاج.

أخيراً، تم تخصيص الفصل الأخير لعملية التحقق من صحة النتائج ومقارنتها مع دراسات سابقة، مدعومة بمحاكاة رقمية. كما أُجريت دراسة بارامترية واسعة لتقييم تأثير كل من المسامية، ومعامل التدرج، والأبعاد الهندسية، ومعاملات الأساس المرن على السلوك العام للصفائح. وقد بيّنت النتائج أهمية هذه العوامل في التصميم الصحيح للهياكل المصنوعة من مواد متدرجة وظيفياً والمُعرضة لتدرجات حرارية.

Sommaire

Sommaire

Sommaire

<i>Dédicace</i>	-
<i>Remerciements</i>	-
<i>Sommaire</i>	-
Liste des Figures.....	-
Liste des Tableaux.....	-
Introduction Générale :	1
Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux Composites Avancés -FGM-	
I.1.Introduction :	6
I.2. L'historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués :	7
I.3. Les propriétés matérielles des plaques FGM :	9
I.3.2 Loi de mélange exponentielle (E-FGM):.....	11
I.3.3 Loi de mélange sigmoïde (S-FGM) :	13
I.4.Les propriétés thermiques des plaques FGM :	14
I.4.1.Variation constante et linéaire :	14
I.4.3. Distribution polynomiale :	16
I.5.Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) :	16
I.5.1. La métallurgie des poudres (Powder Metallurgy) :	17
I.5.2.La compaction sèche des poudres :	17
I.5.3. Le coulage centrifuge (Centrifugal Casting) :	18
I.5.4.Le coulage par barbotine (Slip Casting) :	19
I.5.5.Le coulage en bande (Tape Casting) :	21
I.5.6.Le frittage (Sintering) :	21
I.5.7.La projection plasma (Plasma Projection) :	22
I.6.Les branches d'applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) :	22
I.6.1L'aérospatiale :	23
I.6.2.La médecine :	23
I.6.3.L'électronique :	23
I.6.4.L'énergie :	24
I.6.5.L'automobile :	24
I.6.6.La défense :	24
I.6.7.Outils de coupe :	24
I.8.la porosité dans les (FGM):	26

Sommaire

I.9.Conclusion:	27
Chapitre II : Etat de l'art sur le comportement thermique des plaques –FGM-	
II.1.Introduction :	29
II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles :.....	29
II.2.1. Approche monocouche équivalente :	29
II.2.1.1. Théorie classique des plaques :	31
II.2.1.2. Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre FSDT :.....	33
II.2.1.3. Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDT :	35
II.2.2. Approche par couche :	38
II.2.2.1. Les modèles zig-zig :	40
II.3. Une revue de littérature des études sur les structures FGM :	41
II.3.1. Les études sur les contraintes résiduelles dans les structures FGM.....	41
II.3.2. Les études sur l'analyse thermo élastique des structures FGM :	43
II.3.3. Les études sur l'analyse du flambement des structures FGM :.....	45
II.3.4. Les études sur l'analyse statique et dynamique des structures FGM	47
II.4. Conclusion:	49
Chapitre III : Analyse d'une plaque poreuse sous l'effet double thermique et flambement	
III.1. Introduction :	51
III.2.Formulations théoriques :	52
III.2.1.Champ de déplacement et déformation.....	52
III. 2.2 Relations constitutives :	53
III.3 Équations de stabilité :	54
III.4 Solution de Navier pour le flambement thermique des plaques FGM :	57
III.5 Flambement des plaques FGM sous température uniforme :	59
III.6.Flambement des plaques FGM soumise à une variation de température graduée à travers l'épaisseur :	59
III.3. Conclusion :	59
Chapitre IV: Validation et comparaison des résultats	
IV.1 Introduction :	62
IV.2.Validation des résultats des charges critiques :	62
IV .3.Conclusion :	73
Conclusion Générale.....	75
Référence bibliographique	76

Listes

Liste des Figures

- Figure I.1** Concept des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)
- Figure I.2** Géométrie d'une plaque fonctionnellement graduées (FGM)
- Figure I.3** Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM
- Figure I.4** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM
- Figure I.5** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM...
- Figure I.6** Le coulage centrifuge des poudres mixtes.....
- Figure I.7** Principe du coulage par barbotine
- Figure I.8** Principe du coulage en bande
- Figure I.9** Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma...
- Figure II.1** Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff
- Figure II.2** Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin
- Figure II.3** La distribution constante des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSDT
- Figure II.4** Illustration de la cinématique de la plaque d'ordre élevé
- Figure II.5** La distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie HSDT
- Figure II.6** Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique.
- Figure II.7** Champ de déplacements des modèles zig-zig, approche cinématique
- Figure II.8** Champ de déplacements des modèles zig-zig du premier ordre
- Figure II.9** Champ de déplacements des modèles zig-zig d'ordre supérieur.
- Figure IV.1** Variation des températures critiques de flambement t_{cr} en fonction du rapport (a / b) de la plaque FGM pour différentes valeurs d'indice de gradient du matériau P sous chargement thermiques uniforme, linéaires et non linéaires

Listes

Figure IV .2 Variation des températures critiques de flambement en fonction du rapport (a / b) suivant l'épaisseur de la plaque FGM sous chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire.

Figure IV .3 Variation des températures critiques de flambement en fonction du rapport (a / h)

Liste des Tableaux

- Tableau I.1** Caractéristiques des différentes couches des matériaux FGM
- Tableau I.2** Les propriétés des FGM et leurs applications significatives
- Tableau IV.1** Hypothèses cinématiques pour différentes théories de plaques
- Tableau IV.2** Variation des températures critiques de flambement de la plaque FGM soumise à un chargement thermique uniforme, en fonction de différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance p et du rapport (a / b) avec $a / h = 100$
- Tableau IV.3** Variation des températures critiques de flambement d'une plaque carrée en FGM soumise à un chargement thermique uniforme, pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance p et du rapport (a / h) .
- Tableau IV.4** Variation des températures critiques de flambement d'une plaque à matériau à gradient fonctionnel (FGM) soumise à un gradient thermique linéaire, en fonction de l'indice de la loi de puissance p et du rapport (a / b) avec $a / h = 100$
- Tableau IV.5** Variation des températures critiques de flambement d'une plaque carrée en matériau à gradient fonctionnel (FGM) soumise à un gradient thermique linéaire, en fonction de l'indice de la loi de puissance p et du rapport (a / h) .
- Tableau IV. 6** Variation des températures critiques de flambement de la plaque FGM sous chargement de température non linéaire pour différents valeurs d'indice de loi de puissance p et du rapport (a / b) et l'indice de température γ avec $a / h = 10$.
- Tableau IV. 7** Variation des températures critiques de flambement de la plaque FGM sous chargement de température non linéaire pour différents valeurs d'indice de loi de puissance p et le rapport (a / b) et l'indice de température γ avec $a / h = 5$.

Listes

Liste des notations

- $E(z)$: Module de Young en fonction de la coordonnée z
- E_m : Module de Young du métal
- E_c : Module de Young de la céramique
- $G(z)$: Module de cisaillement en fonction de z
- $\nu(z)$: Coefficient de Poisson en fonction de z
- ν : Coefficient de Poisson (constant ou moyen)
- $\rho(z)$: Densité du matériau en fonction de z
- ρ_m : Densité du métal
- ρ_c : Densité de la céramique
- $V(z)$: Fraction volumique de la céramique selon l'épaisseur
- $\lambda(z), \mu(z)$: Coefficients de Lamé dépendants de z
- k : Paramètre du gradient fonctionnel (indice de gradation)
- a : Longueur de la plaque ou de la poutre
- b : Largeur de la plaque
- h : Épaisseur de la plaque ou de la poutre
- u_0, v_0, w_0 : Composantes de déplacement sur le plan moyen
- u_b, v_b, w_b : Déplacements dus à la flexion
- u_s, v_s, w_s : Déplacements dus au cisaillement
- u, v, w : Déplacements dans les directions x, y et z
- θ_x, θ_y : Rotations autour des axes x et y
- $q(x)$: Charge transversale appliquée le long de la poutre
- $Q(x)$: Effort tranchant longitudinal
- $M(x)$: Moment fléchissant longitudinal
- k_1 : Coefficient de raideur du sol (modèle de Winkler)
- k_2 : Coefficient de cisaillement de la fondation (modèle de Pasternak)
- z : Coordonnée selon l'épaisseur
- $\phi(z)$: Fonction de forme dans la théorie de cisaillement
- ω : Fréquence propre (de vibration libre)

Listes

$T(z)$: Température selon l'épaisseur

$\alpha(z)$: Coefficient de dilatation thermique selon z

Introduction Générale

Introduction Générale :

Le développement technologique est lié à l'amélioration continue des caractéristiques des matériaux tout en leur donnant un nouvel élan concernant leur composition selon des classes et des types innovants. Habituellement, ce qui donne naissance à de nouvelles gammes de matériaux émergent en raison de la nécessité d'améliorer l'efficacité structurelle et les performances. De plus, en règle générale, les nouveaux matériaux eux-mêmes offrent à leur tour de nouvelles opportunités pour développer des structures et des technologies mises à jour, ce qui pose un défi à la science des matériaux avec de nouveaux problèmes. L'une des meilleures manifestations de ce processus interdépendant dans le développement des matériaux, des structures et de la technologie est associée aux matériaux composites avancés et aux éléments structurels.

Les matériaux à gradient de propriétés en tant que composite avancé ont été initialement conçus comme matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs à fusion et maintenant ils sont également considérés comme des matériaux structurels potentiels et récemment, ils sont de plus en plus pris en compte dans diverses applications. pour maximiser les forces et les intégrités de nombreuses structures d'ingénierie.

L'augmentation spectaculaire de l'utilisation des matériaux et structures à gradient de propriétés dans tous les types de structures d'ingénierie (par exemple, le génie civil, l'aérospatiale, l'automobile et les structures sous-marines, ainsi que dans les prothèses médicales, les cartes de circuits électroniques et les équipements sportifs) et le nombre de revues et les documents de recherche publiés au cours des deux dernières décennies attestent qu'il y a eu un effort majeur pour développer des systèmes de matériaux composites et pour analyser et concevoir des composants structuraux fabriqués à partir de matériaux composites.

Les structures composites avancées considérées dans ce travail sont des structures bidimensionnelles continuellement variables suivant la plus petite direction de la structure, intégrant plusieurs couches, par alternance, aux propriétés mécanique différentes. En tant que structures bidimensionnelles, nous considérons celles dont la dimension, généralement l'épaisseur, est négligeable par rapport aux deux autres dans les directions planes. Les structures bidimensionnelles typiques sont les plaques et les coques. Dans notre étude actuelle, nous nous concentrerons sur les plaques de différentes épaisseurs, c'est-à-dire les plaques minces, les

Introduction Générale

plaques moyennement épaisses et les plaques épaisses. Les plaques sont supposées sans courbure suivant les deux directions dans leur plan. Dans le cas des plaques, un système de référence cartésien est utilisé.

Le concept de structures composites avancées, telles que les structures à gradient de propriétés, a été proposé comme matériau de barrière thermique et mécanique à plus haute résistance. Par conséquent, le problème thermomécanique dans les FGM est un sujet majeur d'intérêt actuel. De nombreuses études ont été menées pour prédire et évaluer le comportement mécanique des structures à gradient de propriétés en utilisant diverses théories de modélisation. [1] a présenté la formulation théorique et les modèles d'éléments finis pour les plaques FGM par le biais de la théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre. Les formulations tiennent compte du thermo-couplage, de la dépendance temporelle et de la non-linéarité géométrique des plaques FGM de type Von Karman. En divisant le déplacement transversal en parties flexionnelle, de cisaillement et d'étirement d'épaisseur. [2] ont étudié la vibration libre et le flambage des poutres sandwich à gradient de propriétés en tenant compte d'une nouvelle théorie du cisaillement d'ordre supérieur en quasi-3D. Le comportement dynamique des plaques et des poutres FGM a été étudié, en utilisant diverses théories de déformation de cisaillement, par [3],[4],[5],[6].

Les fondations sont des éléments ou des systèmes physiques importants en raison de leur large éventail d'application dans différents domaines scientifiques et techniques, y compris la mécanique, le civil, l'électricité, la nanotechnologie. En fonction des applications du système structural considéré, les chercheurs ont proposé plusieurs types de modélisation pour les fondations. Ils sont très attractifs pour les chercheurs en raison de leurs applications cruciales dans différents systèmes. L'un des principaux objectifs des chercheurs est d'étudier le comportement dynamique et statique de l'interaction structures-fondations.

La première et la plus simple présentation d'une fondation a été proposée par Winkler. Ce modèle est connu sous le nom de modèle élastique linéaire de Winkler. Les modèles à deux paramètres sont appelés mécanismes selon lesquels une couche relie les extrémités supérieures de l'élément de la fondation entre elles. En conséquence, les fonctions force-déplacement pour ce type de fondation sont continuées car les extrémités supérieures des éléments sont reliées par une couche de cisaillement.

Introduction Générale

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier l'effet de la porosité sur le comportement statique et dynamique des structures non homogènes sur assises à raideurs variables. Pour une fondation élastique, nous cherchons à utiliser les différentes approches et la précision de la modélisation du comportement des sols. Dans la plupart des recherches, la fondation élastique est censée avoir une réponse uniforme, cependant, en fait, les couches de sol sont hétérogènes ; nous nous concentrons sur ce point et son effet sur le comportement mécanique des structures. Cette théorie actuelle n'a que quatre inconnues contre d'autres théories qui ont cinq inconnues ou plus. Les propriétés des matériaux des plaques fonctionnellement graduées sont supposées varier continuellement à travers l'épaisseur selon différents modèles de distribution. Les équations d'équilibre des plaques, reposant sur la fondation élastique, sont dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels appelé, aussi, principe d'Hamilton.

Le travail est organisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre de ce travail consiste à donner une vue générale sur les matériaux non-homogènes FGM. Tout d'abord, l'histoire, le développement et la définition générale des matériaux à propriétés graduellement variables sont présentés.

Le second chapitre présente une étude bibliographique sur la porosité dans les poutres et plaques et les théories de modélisation de structures non-homogènes reposant sur fondations élastiques. Les théories monocouches équivalentes, les théories de Zigzag et formulation unifiée de Carrera (CUF) sont présentées. Nous nous sommes concentrés sur des théories monocouches équivalentes. Pour les approches de modélisation de la fondation élastique visant à représenter le sol, le model Winkler Pasternak est utilisé.

Le troisième chapitre s'intéresse au développement d'une formulation mathématique pour étudier l'effet double de la variation de la raideur de la fondation et de la porosité sur le comportement dynamique et statique des poutres FGM basées sur une théorie d'ordre supérieur et considérant l'effet de cisaillement.

Enfin, la formulation actuelle sera validée par une étude paramétrique détaillée.

Le quatrième chapitre consiste à une présentation des résultats pour une validation des modèles analytiques poutres FGM posée sur des fondations élastiques variables. Puis une étude paramétrique concernait l'effet de variabilité de la raideur des fondations et de la porosité suivant

Introduction Générale

l'épaisseur de la poutre sur le comportement statique et vibratoire des poutres confectionnées en FGM.

Nous terminerons la thèse par une conclusion générale reflétant le contenu de la thèse, ainsi que des perspectives pour de futurs chercheurs inspirées au cours de ce travail.

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux Composites Avancés - FGM-

I.1.Introduction :

Dans le domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial, les parois des navettes spatiales et des avions hypersoniques sont soumises à des températures extrêmement élevées. Des éléments comme le nez de l'appareil, les bords d'attaque des ailes ou encore certaines surfaces inférieures peuvent atteindre des températures allant jusqu'à 1800°C en atmosphère. Par conséquent, les matériaux utilisés doivent être capables de supporter un gradient thermique pouvant atteindre 1300°C sur une épaisseur de quelques millimètres. Cependant, aucun matériau monolithique n'est capable de résister à de telles conditions[7]. La solution a été de concevoir un matériau combinant deux faces aux propriétés différentes : une face externe en céramique, résistante aux très hautes températures et à l'oxydation, et une face interne métallique, offrant une bonne conductivité thermique, une résistance mécanique élevée et une meilleure ténacité. Toutefois, une simple liaison entre ces deux matériaux entraîne rapidement des ruptures à cause des contraintes thermiques à leur interface, en raison de leurs propriétés thermiques contrastées. Pour éviter ces défaillances, l'idée a émergé de créer une transition progressive entre les deux matériaux, éliminant ainsi toute interface nette. C'est dans ce contexte qu'est né, dans les années 1980, le concept des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), développé par une équipe de chercheurs du laboratoire national aérospatial (STA) au Japon. Les FGM sont généralement composés de plusieurs couches combinant des matériaux tels que les céramiques et les métaux, afin d'exploiter la résistance thermique des céramiques et la solidité mécanique des métaux. Les vides ou porosités sont également considérés comme une composante essentielle, conférant aux FGM une structure globalement non homogène[8]. Le changement progressif de la composition entraîne donc une variation continue de la microstructure figure I.1. Dans certains cas, un FGM peut même être constitué d'un seul matériau, mais avec une microstructure qui évolue graduellement[9].

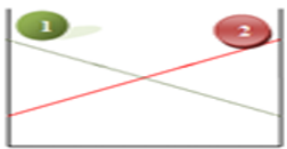
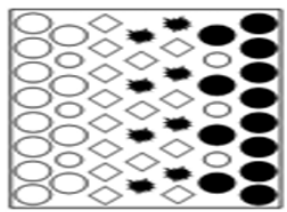
Propriétés	 <p>1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique</p>	
Structure	<p>Eléments constitutants:</p> <p>Céramique ○ Métal ● Microporosité ◊ Fibre ◆</p>	
Matériaux	Exemple	FGM

Figure I.1 : Concept des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

I.2. L'histoire du développement des matériaux fonctionnellement gradués :

Le concept des « Matériaux à Gradient Fonctionnel » (FGM) a été introduit en 1984 au laboratoire national de recherche aérospatiale de Sendai, situé sur l'île de Honshū au Japon, par M. Niino et ses collaborateurs. Cette innovation visait à concevoir des matériaux servant de barrières thermiques dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion[7]. Ces matériaux se distinguent par une variation continue de leur composition, de leur microstructure et même de leur porosité, ce qui entraîne un gradient progressif de propriétés physiques telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique[10]. Cette nouvelle génération de matériaux composites ouvre la voie à de nombreuses applications, notamment les revêtements thermiques pour moteurs en céramique, les turbines à gaz, ainsi que les couches minces dans les dispositifs optiques[11]. En 1987, le gouvernement japonais a lancé un vaste projet national intitulé « Recherche sur les technologies de base pour le développement des matériaux à gradient fonctionnel et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'objectif principal de ce programme était de développer des matériaux aux propriétés thermiques avancées, adaptés aux besoins du secteur aérospatial. Dix-sept laboratoires de recherche nationaux, des universités et des entreprises industrielles ont participé activement à ce projet[10]. Trois critères essentiels ont été définis pour concevoir un matériau capable de résister à une température de surface de 1800 °C et à un gradient thermique pouvant atteindre 1300 °C : Une résistance thermique et une tenue à l'oxydation à haute température de la surface du matériau, Une bonne ténacité du matériau du

côté soumis aux basses températures, Une relaxation efficace des contraintes thermiques à travers le matériau. Afin de satisfaire à ces exigences, le principe des FGM a été mis en œuvre pour créer un matériau composite combinant les avantages des céramiques (résistance aux hautes températures) et des métaux (résilience mécanique à basse température). À l'issue de la première phase (1987–1989), les chercheurs ont réussi à produire des prototypes expérimentaux de petite taille (1 à 10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre), capables de supporter des températures allant jusqu'à 2000 K en surface et un gradient thermique de 1000 K. Quatre techniques principales ont été utilisées pour fabriquer ces matériaux à gradient de composition et de structure : Le système SiC/C par dépôt chimique en phase vapeur (CVD), Le système PSZ/Mo par compactage à sec des poudres, Le système TiB₂/Cu par synthèse auto-propagée à haute température (SHS), Le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torche[12]. La deuxième phase du projet (1990–1991) visait la fabrication de pièces plus volumineuses et de formes géométriques plus complexes. Durant les années 1990, les domaines d'application des FGM se sont considérablement élargis, couvrant non seulement les matériaux structurels à haute température, mais aussi les technologies biomédicales, les capteurs optiques et d'autres systèmes avancés[12]. En 1992, les efforts de recherche se sont orientés vers l'amélioration de l'efficacité des FGM dans les systèmes de conservation d'énergie, notamment dans les domaines de l'énergie photovoltaïque, thermoélectrique et thermonucléaire[13]. Ces avancées ont conduit, en 1993, au lancement d'un nouveau programme national intitulé « Recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie à structure fonctionnellement graduée », couramment appelé « FGM phase II ». Ce programme ambitionnait d'appliquer les technologies FGM afin d'optimiser le rendement énergétique des systèmes solaires, nucléaires, photovoltaïques et thermoélectriques

I.3. Les propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont constitués de deux matériaux ou plus, possédant des propriétés structurales et fonctionnelles différentes, combinés de manière à obtenir une transition continue et progressive au niveau de la composition, de la structure, ainsi que de la distribution des porosités. Cette approche permet d'optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure globale. Les FGM se distinguent par une microstructure non homogène, mais présentent des propriétés macroscopiques continues dans l'espace. Cette continuité est généralement décrite par la variation des fractions volumiques des constituants à travers l'épaisseur du matériau. Pour modéliser cette variation, plusieurs lois de mélange sont utilisées, notamment : ---

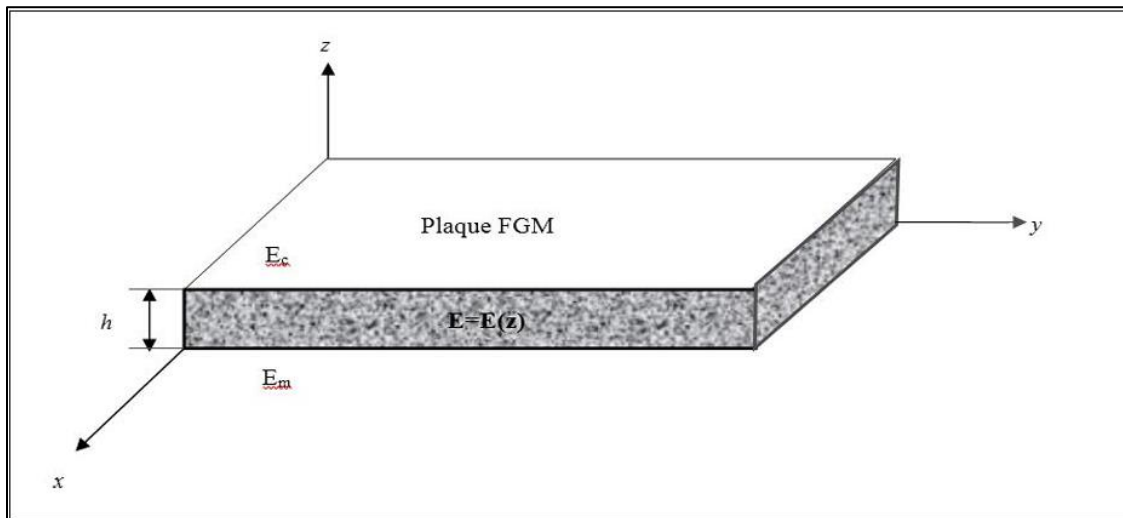


Figure I.2: Géométrie d'une plaque fonctionnellement graduées (FGM).

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z , perpendiculaire à la surface moyenne, correspond à la direction de l'épaisseur. Les propriétés mécaniques de la plaque, telles que le module de Young et le coefficient de Poisson, peuvent différer entre les faces supérieure et inférieure, selon les besoins de conception. Toutefois, ces propriétés varient généralement de manière continue le long de l'épaisseur, suivant l'axe z , soit : $E=E(z)$, $\nu=\nu(z)$. Le module de Young dans une plaque à gradient fonctionnel (FGM) dépend des lois de mélange adoptées. Selon la nature de ces lois, on distingue les plaques P-FGM, E-FGM ou S-FGM. Ces

lois, bien que simples et pratiques, ne tiennent pas compte de la taille, de la forme ni de la distribution des particules à l'échelle microscopique. Pour pallier cette limitation, plusieurs modèles ont été développés afin d'estimer les propriétés globales des matériaux. Parmi eux, on retrouve le modèle basé sur le schéma de Mori et Tanaka, ainsi que la méthode auto-cohérente de Hill (méthode self-consistent).

Tableau II.1 : Caractéristiques des différentes couches des matériaux FGM [48]

Couches	Matériaux	Les propriétés mécaniques
La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique - Bonne résistance à l'oxydation - Faible conductivité thermique
« Couches intermédiaires » Continuité du matériau d'un point à l'autre	Céramique-métal	- Élimination des problèmes de l'interface - Relaxer les contraintes thermiques
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique - Conductivité thermique élevée - Très bonne ténacité

I.3.1 Loi de mélange en puissance (P-FGM) :

Dans les matériaux fonctionnellement gradués de type P-FGM, l'évolution continue des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur est modélisée par une loi de puissance appliquée à la fraction volumique du constituant céramique. Cette dernière est exprimée selon la relation mathématique suivante :

$$V(z) = \left(\frac{z+h/2}{h} \right)^k$$

(I.1)

Sur la base de cette distribution volumique, les propriétés effectives du matériau, notamment le module d'Young, sont évaluées à l'aide du modèle de mélange pondéré [15]

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_m + (\mathbf{E}_c - \mathbf{E}_m) V(z) \quad \textbf{(I.2)}$$

Il en résulte une variation lisse et maîtrisée des propriétés le long de l'épaisseur, éliminant les discontinuités abruptes caractéristiques des composites stratifiés. En particulier, pour des valeurs de $k < 1$, la transition est accentuée vers le métal, tandis qu'un $k > 1$ privilégie la phase céramique en surface. **figure I.3** illustre cette variation de la fraction volumique pour différentes valeurs de k . Cette modulation des propriétés permet d'optimiser le comportement mécanique et thermique des structures FGM soumises à des gradients sévères

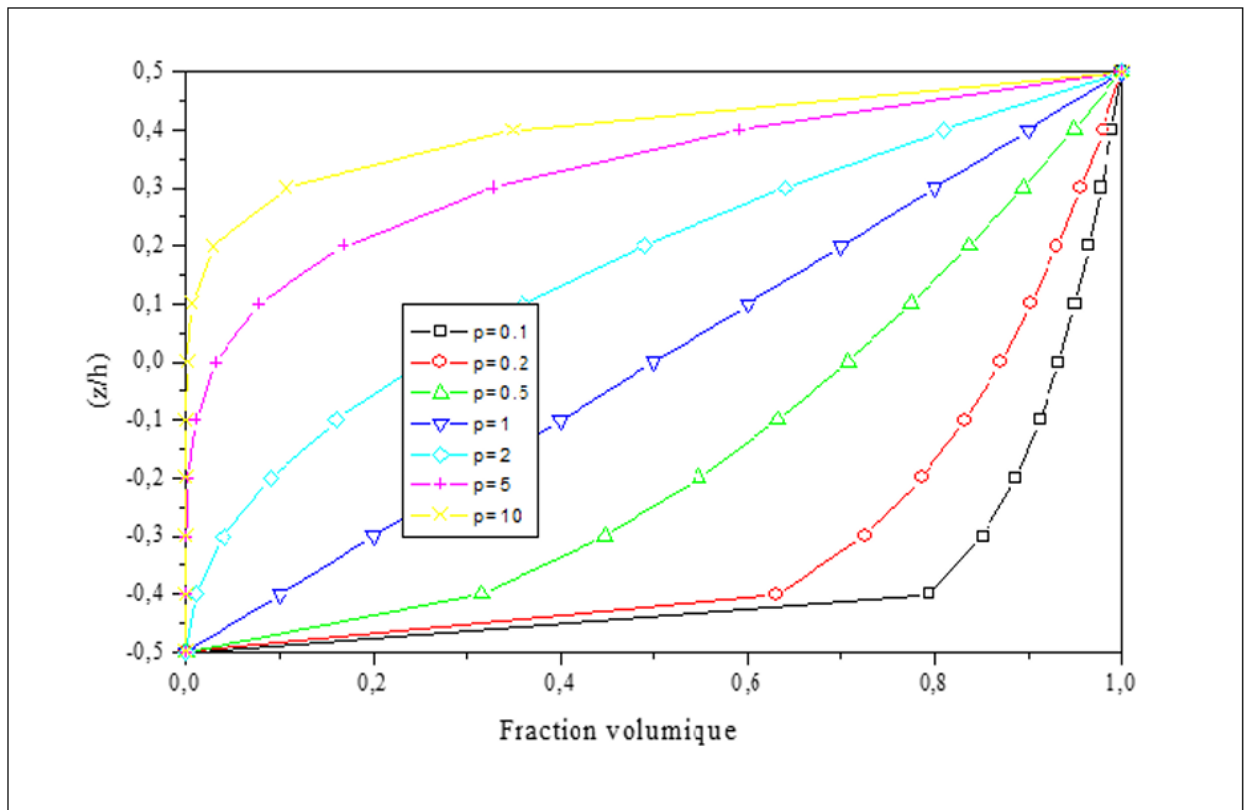


Figure I.3 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM. [48]

I.3.2 Loi de mélange exponentielle (E-FGM):

La loi de mélange exponentielle est une approche alternative visant à représenter la variation progressive des propriétés matérielles dans les matériaux fonctionnellement gradués. Dans ce modèle, la propriété considérée — par exemple, le module d'Young — évolue selon une fonction exponentielle de la forme [16] :

$$E(z) = E_m e^{B(z+\frac{h}{2})}$$

(I.3.a)

E_m : est le module d'Young du métal, z : est la coordonnée dans la direction de l'épaisseur, h : l'épaisseur totale de la plaque, et B est un paramètre d'ajustement défini par :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \quad (\text{I.3.b})$$

Avec E_c représentant le module d'young de la ceramique. La distribution exponentielle du module d'young est representee dans la **figure I.4**.

Ce type de loi permet de capturer des transitions exponentielles des propriétés mécaniques, particulièrement utiles dans les cas où un renforcement rapide vers la surface céramique est souhaité. Comparée à la loi de puissance, elle offre un profil plus accentué ou plus progressif en fonction de la valeur de B , permettant ainsi un ajustement fin du comportement fonctionnel du matériau.

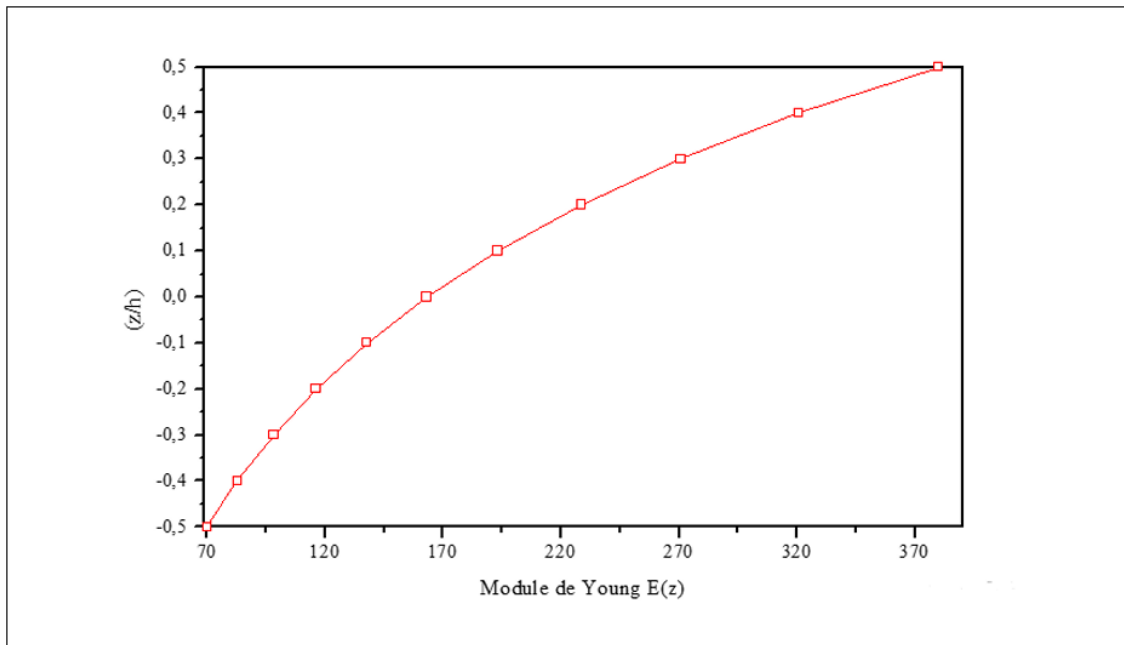


Figure I.4 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM. [14]

I.3.3 Loi de mélange sigmoïde (S-FGM) :

Lorsqu'une plaque en matériau à gradient fonctionnel (P-FGM), définie par une simple fonction de loi de puissance, est ajoutée à une plaque composite multicouche, des concentrations de contraintes apparaissent aux interfaces où le matériau reste continu mais subit un changement rapide de ses propriétés [15]. En conséquence, Chung et Chi [17] ont défini la fraction volumique de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance, afin d'assurer une bonne répartition des contraintes à travers toutes les interfaces. Ces deux fonctions de loi de puissance sont définies comme suit :

$$V_1(z) = 1/2 \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{h/2} \right)^k \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$V_2(z) = 1 - 1/2 \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{h/2} \right)^k \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La propriété mécanique souhaitée (par exemple, le module d'Young) est alors exprimée selon la loi de mélange classique sur chaque sous-domaine :

$$\mathbf{E}(z) = V_1(z)\mathbf{E}_c + [1 - V_1(z)]\mathbf{E}_m \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.5.a})$$

$$\mathbf{E}(z) = V_2(z)\mathbf{E}_c + [1 - V_2(z)]\mathbf{E}_m \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.5.b})$$

La figure I.5 montre que la variation de la fraction volumique dans les équation (I.5.a) et (I.5.b) représente les distributions sigmoïde

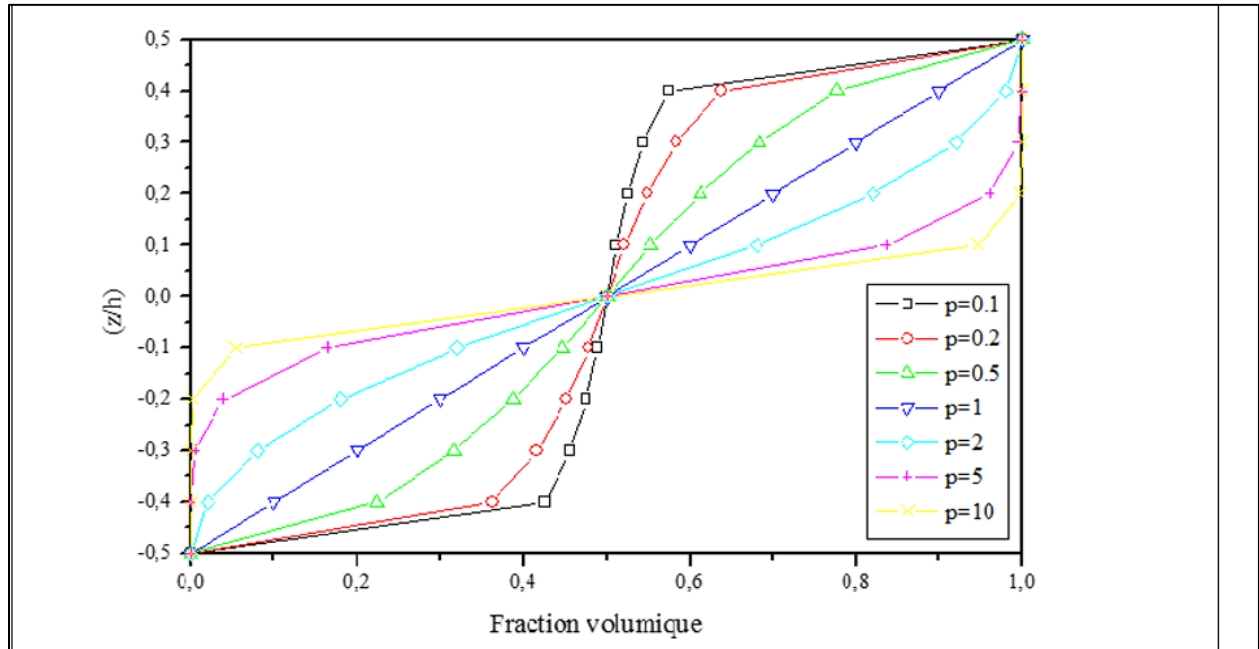


Figure I.5 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.4. Les propriétés thermiques des plaques FGM :

Les propriétés thermiques des plaques réalisées en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont étudiées à l'aide de modèles tenant compte de la variation des propriétés à travers l'épaisseur. Ces matériaux présentent une non-uniformité dans la direction de l'épaisseur, tout en restant homogènes dans le plan. Par conséquent, la distribution de température est généralement supposée dépendre uniquement de l'axe z , perpendiculaire au plan de la plaque. Plusieurs approches sont utilisées pour modéliser cette variation thermique, comme les distributions constantes, linéaires ou polynomiales.

I.4.1. Variation constante et linéaire :

Ce profil de répartition de la température a été adopté par de nombreux chercheurs [18,19,20,21] dans le cadre de l'analyse des plaques et des coques en matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Dans le cas d'une distribution constante, il est supposé que la température au sommet (T_1) et à la

base (T0) est identique, tandis qu'une distribution linéaire présente une variation. En tenant compte de la variation d'épaisseur, la température peut alors être exprimée comme suit :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{T}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{T}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})_1 + \mathbf{T}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \left(\frac{z}{h} \right) \quad (I.17)$$

Où, $T(x,y,z)$ est la température est habituellement obtenue à partir de la direction de coordonnées z .

I.4.2. Équation de conduction thermique :

La distribution non linéaire de la température est couramment déduite de la résolution de l'équation de la conduction thermique.

$$\mathbf{K}_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathbf{K}_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial k_z}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + \mathbf{K}_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mathbf{q} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.18)$$

Où q représente la source de chaleur interne ou le flux thermique. L'analyse statique, avec ou sans présence de q , peut être réalisée en négligeant la variation de la température au cours du temps, c'est-à-dire en supposant que $\partial T / \partial t \approx 0$.

La majorité des recherches en thermoélasticité bidimensionnelle se sont appuyées sur une équation de conduction thermique à une seule dimension [22,23,24], en raison de l'hypothèse selon laquelle le matériau est homogène dans le plan de la plaque et ne présente une variation que selon l'épaisseur. L'équation statique en régime thermique sans présence de flux est présentée en (II.19).

La résolution de l'équation de conduction thermique, qu'elle soit unidimensionnelle ou tridimensionnelle, repose sur l'application de conditions aux limites adéquates ainsi que sur les températures imposées aux surfaces. Cela permet d'évaluer la variation de la température selon l'épaisseur pour diverses modélisations des propriétés du matériau, comme abordé dans les sections précédentes.

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(Kz \frac{\partial Tz}{\partial z} \right) = 0$$

I.4.3. Distribution polynomiale :

Grâce à des recherches récentes, le profil de température $T(x,y,z)$ le long de l'épaisseur a été déterminé en fonction de la description progressive du champ de déplacement. Les termes de plus haut ordre du champ de déplacement sont également pris en compte pour refléter l'impact de la distribution non linéaire. La variation de la température à travers l'épaisseur de la plaque peut ainsi être exprimée sous forme polynomiale.

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{T}_1(x,y) + \frac{z}{h} \mathbf{T}_2(x,y) + \frac{f(z)}{h} \mathbf{T}_3(x,y)$$

I.5. Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) :

Le processus de fabrication constitue l'un des axes majeurs de la recherche sur les matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Une attention particulière a été portée au développement des techniques de production et de traitement de ces matériaux. La majorité des procédés adoptés reposent sur des variantes de méthodes classiques bien établies. Parmi les procédés capables d'intégrer une gradation, on retrouve notamment la métallurgie des poudres [25] ainsi que les techniques de compaction sèche des poudres

De manière générale, les procédés d'élaboration les plus couramment employés comprennent le coulage centrifuge [26], le coulage par barbotine, le coulage en bande [27], ainsi que le frittage et la projection plasma. Le choix du procédé le plus adapté repose essentiellement sur la nature des matériaux à combiner, le type de loi de mélange souhaitée, ainsi que la géométrie de la pièce à concevoir.

I.5.1. La métallurgie des poudres (Powder Metallurgy) :

La métallurgie des poudres figure parmi les techniques les plus largement utilisées, en raison de son contrôle étendu sur la composition, la microstructure et la mise en forme. Elle présente plusieurs avantages, notamment des coûts réduits, une disponibilité accrue des matières premières, des équipements de traitement simplifiés, une consommation énergétique moindre et des temps de traitement plus courts. Dans ce procédé, le gradient fonctionnel est généralement obtenu par le mélange de poudres en proportions variables, ensuite empilées en couches distinctes d'épaisseurs comprises entre 0,2 mm et 1 mm. Diverses méthodes sont employées pour la préparation des poudres, telles que les réactions chimiques, le dépôt électrolytique ou encore le broyage, permettant une production en masse et un contrôle précis de la taille des particules. Le succès du traitement dépend essentiellement de la rigueur apportée à la pesée des composants et à la dispersion homogène des mélanges, ces paramètres ayant un impact direct sur les propriétés structurales des matériaux. Lors des étapes ultérieures, les opérations de formage sont réalisées à température ambiante, tandis que le frittage s'effectue à pression atmosphérique, évitant ainsi toute réaction indésirable liée à des températures élevées. Des études biomécaniques ont montré que les FGM utilisés dans les prothèses articulaires, avec des couches inférieures à 1,0 mm, présentent une résistance à l'usure limitée [28]. En revanche, ceux élaborés par projection plasma, frittage et infiltration, avec des épaisseurs supérieures à 2 mm, affichent de meilleures performances mécaniques et tribologiques, en raison d'une porosité réduite et d'une densité quasi totale des échantillons [29].

I.5.2. La compaction sèche des poudres :

Ce procédé est particulièrement adapté à la fabrication de pièces aux formes complexes. Il repose sur le dépôt successif de différentes poudres dans des moules en acier. Après chaque ajout de poudre, une légère compression est appliquée. Une fois toutes les couches empilées, un compactage global est réalisé, généralement suivi d'une pression isostatique et d'une étape de déliantage, avant de procéder à la densification finale [30].

I.5.3. Le coulage centrifuge (Centrifugal Casting) :

Le coulage centrifuge constitue l'une des techniques les plus performantes pour l'élaboration des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), en raison de sa capacité à contrôler efficacement la composition et la microstructure. Cette méthode est principalement utilisée pour la fabrication de pièces cylindriques. Deux types principaux de machines sont employés : les modèles horizontaux, tournant autour d'un axe horizontal, et les modèles verticaux, tournant autour d'un axe vertical. Les machines horizontales sont couramment utilisées pour produire des éléments tels que des tubes, des douilles ou des cylindres de géométrie simple. Le procédé consiste à introduire du métal fondu dans un moule en rotation (à des vitesses variant généralement entre 700 et 1300 tr/min). La force centrifuge générée par la rotation pousse le métal vers la paroi du moule, entraînant ainsi une répartition contrôlée du matériau. La distribution graduelle obtenue dans les FGM par cette méthode dépend de plusieurs paramètres : la densité relative entre les particules et le métal, la taille des particules, la viscosité du métal fondu, la fraction volumique moyenne des particules, l'épaisseur du noyau, ainsi que le temps de solidification [31]. Afin de surmonter les limites de la coulée centrifuge traditionnelle, notamment dans le traitement des particules de taille nanométrique, une méthode alternative dite "centrifuge de poudres mixtes" a été développée, illustrée par la figure I.12 [32].

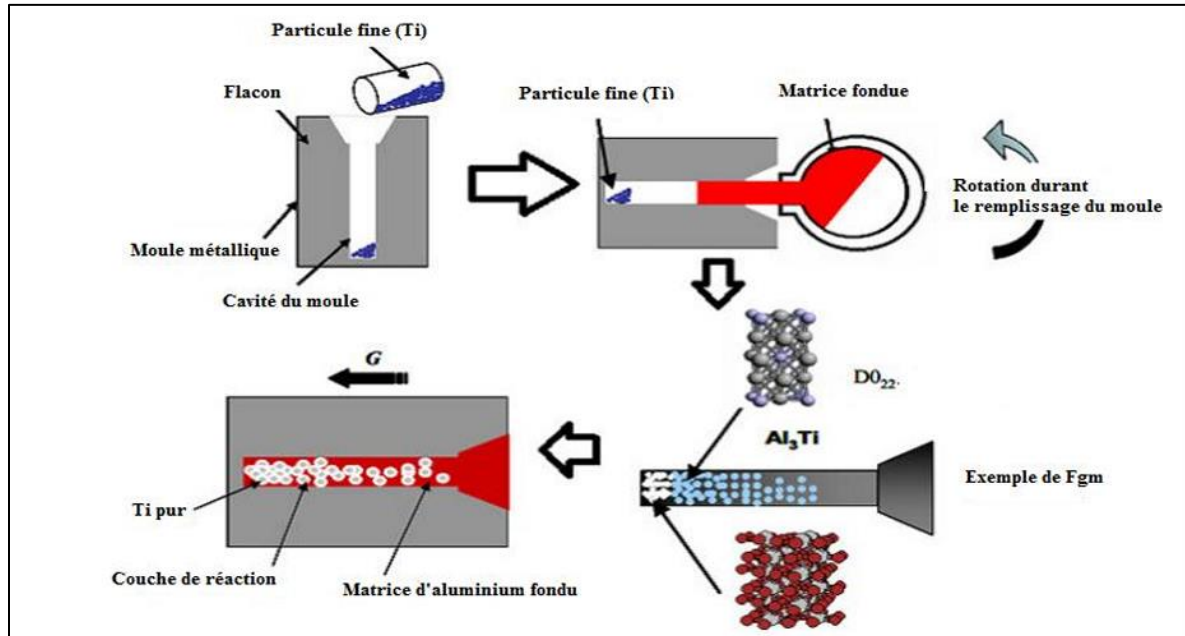


Figure I.6 : Le coulage centrifuge des poudres mixtes

I.5.4. Le coulage par barbotine (Slip Casting) :

Le coulage par barbotine constitue une méthode de fabrication largement utilisée dans le domaine des matériaux céramiques, et s'est progressivement adaptée à la réalisation des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) en raison de sa grande flexibilité dans le contrôle de la composition au cours du moulage. Cette technique repose sur l'utilisation d'une suspension aqueuse, appelée barbotine, composée de particules fines de céramique et/ou de métal, mélangées avec un liant et éventuellement des additifs pour stabiliser la viscosité. Le procédé débute par la préparation de différentes barbotines, dont la composition varie selon la proportion des constituants. Ces suspensions sont ensuite coulées successivement dans un moule en plâtre poreux. Ce dernier joue un rôle actif dans le procédé puisqu'il absorbe lentement l'eau de la barbotine par capillarité, ce qui entraîne la consolidation progressive des particules à la surface du moule et la formation d'une couche solide. Pour obtenir un gradient fonctionnel, la composition de la barbotine est modifiée progressivement au cours du processus de remplissage. Par exemple, on commence par une barbotine fortement chargée en céramique, puis on introduit des mélanges intermédiaires, jusqu'à atteindre une formulation riche en métal. Cette transition

contrôlée permet de produire une pièce dont les propriétés varient continuellement dans la direction de coulée. Contrairement aux procédés en couches, cette méthode permet une transition fluide et sans discontinuité nette entre les zones. Une fois la pièce formée, elle est démoulée avec précaution puis séchée à l'air libre ou en étuve pour éliminer l'humidité résiduelle. Enfin, un traitement thermique de frittage est appliqué pour assurer la cohésion définitive du matériau et améliorer sa densité et sa résistance mécanique. Le coulage par barbotine présente de nombreux avantages : simplicité de mise en œuvre, coût relativement faible, et possibilité de fabriquer des pièces complexes en termes de forme. De plus, il permet un contrôle fin de la microstructure finale, en fonction du taux de solidification, de la vitesse de drainage de l'eau, et des propriétés rhéologiques de la suspension. Cependant, cette technique exige une maîtrise rigoureuse des paramètres physico-chimiques : la viscosité de la barbotine, la vitesse de sédimentation des particules, la stabilité colloïdale du mélange, ainsi que le taux d'absorption du moule. Une mauvaise gestion de ces facteurs peut entraîner des défauts tels que des gradients mal définis, des porosités localisées ou des fissurations lors du séchage. En somme, le coulage par barbotine reste une méthode très efficace pour la fabrication de FGM à base céramique, notamment lorsqu'un bon compromis entre complexité géométrique, coût et performance est recherché

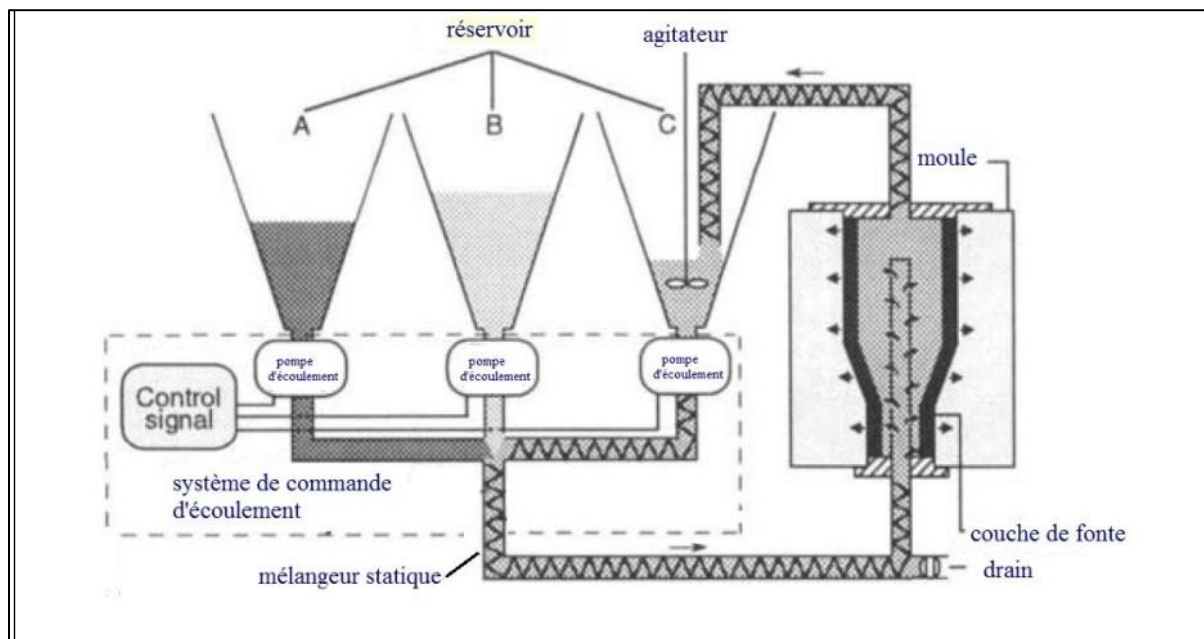


Figure I.7 : Principe du coulage par barbotine

I.5.5. Le coulage en bande (Tape Casting) :

Le coulage en bande est une technique de formage en phase liquide qui consiste à étaler une barbotine, composée de particules fines en suspension, sur une surface plane sous forme de couches minces et régulières. Ce processus est réalisé par le déplacement d'un réservoir ou sabot, permettant à la suspension de s'écouler entre une lame et le support, comme illustré à la figure II.14. L'épaisseur uniforme de la bande est contrôlée par la hauteur de la lame par rapport au support [33].

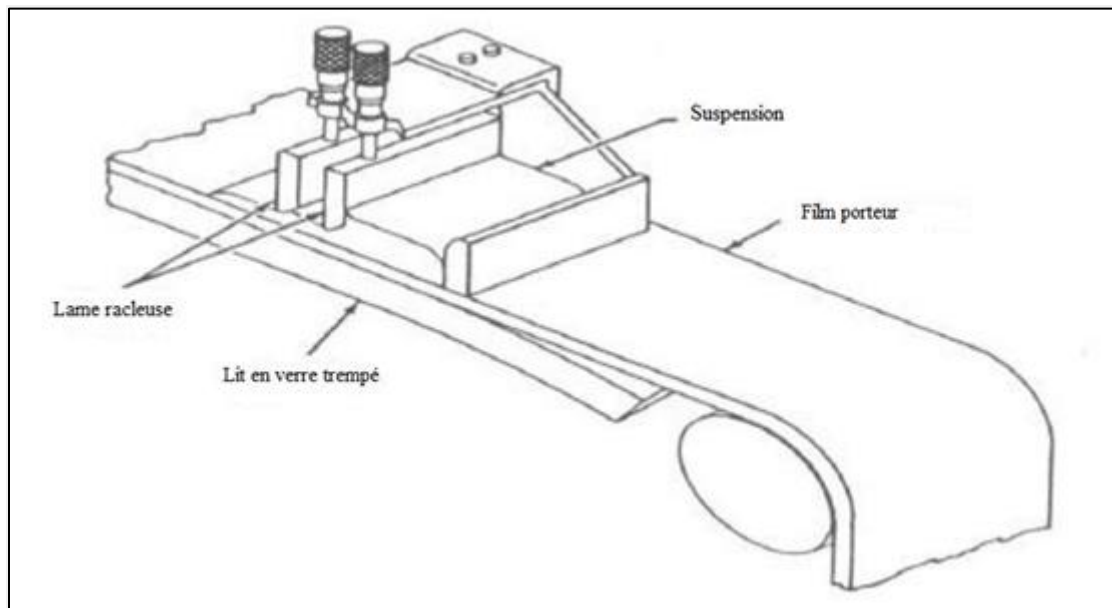


Figure I.8 : Principe du coulage en bande

I.5.6. Le frittage (Sintering) :

Cette méthode repose sur deux phases principales : d'abord, la fabrication d'une matrice frittée à partir d'un matériau à haute température de fusion, présentant un gradient de porosité ; ensuite, l'infiltration de ces pores avec un second matériau à l'état fondu. Cette technique se révèle très efficace pour atténuer les contraintes thermiques [34]. Elle convient particulièrement à la réalisation de composites fonctionnellement gradués à base de matériaux chimiquement stables, même lorsque leurs températures de fusion diffèrent fortement

I.5.7. La projection plasma (Plasma Projection) :

Cette méthode consiste à exposer un gaz à une température élevée, le transformant ainsi en état ionisé (plasma), ce qui génère une grande quantité de chaleur. Lorsqu'une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond entièrement ou partiellement, permettant ainsi son dépôt sur un substrat. La projection plasma des particules provenant de divers matériaux est désormais largement utilisée dans la fabrication des FGM.

Les principaux avantages de cette technique sont l'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie complexe, les bonnes performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux [35].

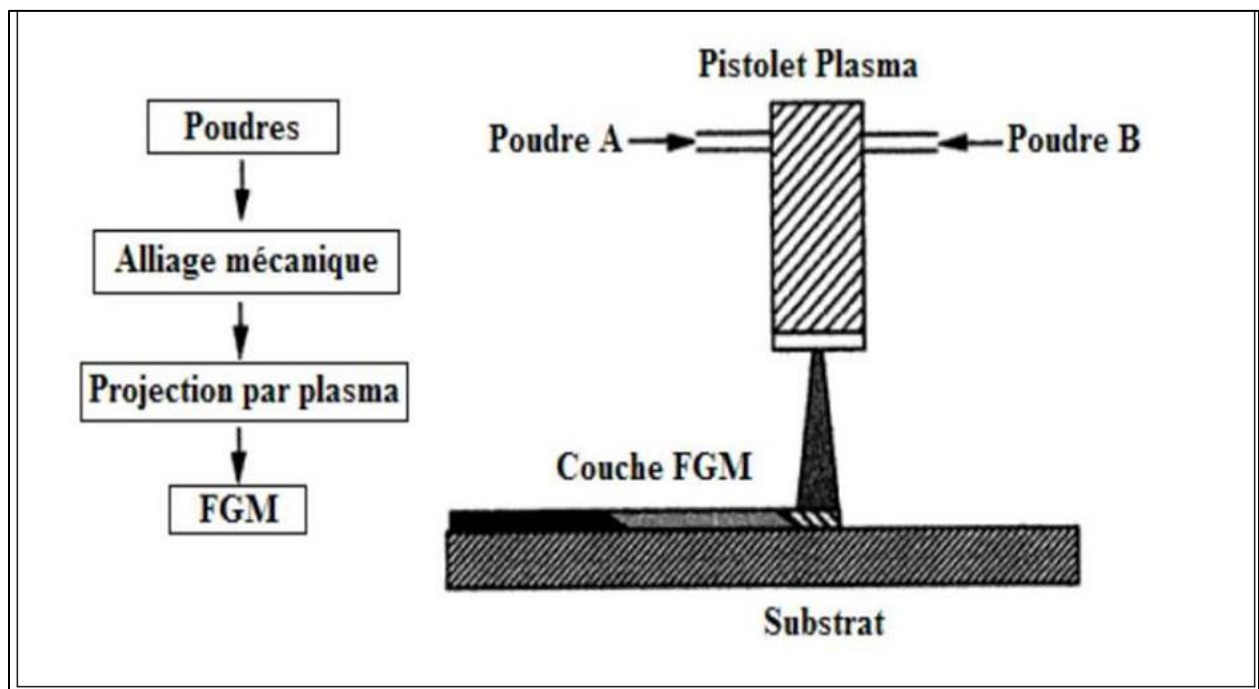


Figure I.9 : Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma

I.6. Les branches d'applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) :

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) trouvent leur utilité dans un large éventail de domaines technologiques grâce à leur capacité à combiner des propriétés mécaniques et

thermiques variables dans une même structure. Cette particularité permet de répondre à des exigences spécifiques dans des environnements extrêmes ou complexes. Bien que leur application industrielle soit encore en phase de développement, de nombreuses recherches démontrent leur potentiel dans divers secteurs, allant de l'aérospatiale à la biomédecine. ---.

I.6.1L'aérospatiale :

Le concept des matériaux à gradient fonctionnel a été développé à l'origine pour le secteur aéronautique, en raison de leur aptitude à supporter de forts gradients thermiques. Cette caractéristique les rend particulièrement appropriés pour les structures des véhicules spatiaux ainsi que pour les composants des moteurs de fusée [36]. Grâce à leur fort potentiel, les FGM présentent également des perspectives d'utilisation élargies dans l'ensemble du domaine aérospatial.

I.6.2.La médecine :

Les matériaux FGM ont trouvé de nombreuses applications dans les domaines de la chirurgie dentaire et orthopédique, car les tissus biologiques tels que les os et les dents sont naturellement considérés comme des matériaux à gradient fonctionnel [37]. Pour les remplacer, il est donc essentiel d'utiliser des matériaux compatibles, d'où l'intérêt croissant pour les matériaux fonctionnellement gradués.

I.6.3.L'électronique :

Dans les technologies électroniques, les FGM sont employés pour leur conductivité thermique contrôlée et leur stabilité mécanique. On les retrouve dans les substrats de circuits imprimés, les composants optoélectroniques, ou encore les disques de stockage. Leur capacité à dissiper efficacement la chaleur améliore les performances et la longévité des dispositifs. ---

I.6.4.L'énergie :

Les matériaux fonctionnellement gradués sont employés dans les systèmes de conversion d'énergie. Ils jouent également le rôle de barrière thermique et servent de revêtement protecteur sur les pales des turbines dans les moteurs à gaz [30]. De plus, les parois internes des réacteurs nucléaires sont souvent fabriquées à partir de FGM à base de céramique et de métal.

I.6.5.L'automobile :

Dans le secteur automobile, les FGM permettent d'améliorer la performance des moteurs et de réduire l'usure de certains composants. Par exemple, les cylindres peuvent être conçus avec une surface interne céramique résistante à la chaleur, tandis que l'extérieur reste métallique pour garantir une bonne robustesse structurelle. ---

I.6.6.La défense :

L'une des propriétés majeures des matériaux fonctionnellement gradués est leur capacité à freiner la propagation des fissures. Cette caractéristique les rend particulièrement utiles dans le domaine militaire, notamment pour le renforcement des blindages et la fabrication de gilets pare-balles [38].

I.6.7.Outils de coupe :

Les matériaux fonctionnellement gradués sont utilisés dans les outils de coupe en raison de leur excellente résistance thermique. Alors que, dans les outils conventionnels, les fissures apparaissent généralement au niveau de l'interface entre la pointe et la tige, les outils en FGM permettent une redistribution des contraintes, réduisant ainsi la concentration et retardant l'apparition des fissures [39].

FGM	Propriétés	Application
Al₂O₃ / Alliage d'aluminium	Barrière thermique et anti-usure	Buse à fusée, ailes et pièces moulées
Fibre de verre / Epoxy	Résistance à la dureté et à l'amortissement	Rotors de frein, dômes solaires, systèmes de tuyauterie composite
Carbone / Epoxy	Légers et de bonnes propriétés d'amortissement	Composants d'hélicoptères, portes de trains d'atterrissage, panneaux d'échangeurs de chaleur, pièces de moteur
TiAl / SiC	Revêtements résistants aux températures et aux chocs	Panneaux d'échange de chaleur, buse de fusée, structure de vaisseau spatial, panneaux solaires, réflecteurs et lames de roue de turbine
SiC / C	Revêtements résistants aux températures et aux chocs	Idem précédent
Graphite / Epoxy	Rapport résistance / raideur élevé, bonne résistance au rayonnement et réduit les distorsions thermiques	Coques de pression cylindriques, télescopes spatiaux, réservoirs cryogéniques, antennes satellites
Alliage d'aluminium / CNT	Légèreté et haute rigidité	Ligaments artificiels, pièces de rechange pour scanner IRM, lunettes de verre et pièces de dentisterie
SiCw / Alliage d'aluminium	Résistance thermique, inertie chimique, dureté et ténacité	Cylindres de stockage, pistons de moteurs diesel, cadres de vélo et véhicules de course
WC / Co	Propriété de résistance à la chaleur, à l'usure et à la déchirure	Machines et outils de formage, outils de coupe, os artificiels
Al / SiC	Dureté et ténacité	Chambres de combustion, garnitures de cylindre moteur, volants
BaTiO₃ / Si	Contrôle de perte de signal à haute fréquence	Moteurs diélectriques

Tableau I.2 : Les propriétés des FGM et leurs applications significatives.

I.8.la porosité dans les (FGM):

Dans le développement des matériaux avancés, les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) s'imposent comme une solution innovante grâce à leur capacité à assurer une transition continue des propriétés mécaniques et thermiques entre deux matériaux de nature différente, typiquement une céramique et un métal. Toutefois, la présence de porosité au sein de ces structures pose de réels défis en termes de performance mécanique et de durabilité dans des environnements extrêmes. Alors que la porosité peut, dans certains cas, être exploitée comme un paramètre de conception visant à alléger la structure ou à moduler la conductivité thermique, elle peut également se comporter comme un facteur de fragilisation susceptible de compromettre l'intégrité du matériau, notamment sous des sollicitations mécaniques combinées ou à haute température. Ce double rôle soulève une problématique centrale : la porosité dans les FGM doit-elle être considérée comme une fonctionnalité maîtrisable ou comme une imperfection structurelle à limiter ? Cette question devient d'autant plus complexe que la répartition de la porosité au sein du matériau est généralement non uniforme, interférant directement avec le gradient de composition et les propriétés visées. De plus, le contrôle précis de la taille, de la forme et de la distribution des pores à travers les différentes techniques de fabrication reste une difficulté technique majeure, nécessitant des modèles de simulation avancés et des méthodes d'optimisation adaptées.

I.9.Conclusion:

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) représentent une avancée significative dans le domaine des matériaux d'ingénierie moderne. En combinant progressivement les propriétés de deux ou plusieurs matériaux, ils offrent une réponse efficace aux contraintes mécaniques et thermiques souvent incompatibles dans les matériaux classiques. Leur principale caractéristique réside dans la variation continue de leurs propriétés (comme le module d'Young, la conductivité thermique ou la porosité) selon une direction définie, généralement l'épaisseur. Cette transition graduée permet non seulement de limiter les concentrations de contraintes, mais aussi de concevoir des structures optimisées pour des environnements extrêmes. Tout au long de ce chapitre, nous avons présenté une vue d'ensemble des FGM, en abordant leur origine, les lois de distribution utilisées pour modéliser leur comportement, les différentes techniques de fabrication, ainsi que leurs nombreuses applications. Malgré les défis encore présents, notamment en matière de coût de production et de maîtrise des procédés, les FGM ouvrent des perspectives prometteuses dans de nombreux secteurs industriels et technologiques.

**Chapitre II : Etat de l'art sur
le comportement thermique
des plaques –FGM–**

II.1.Introduction :

La structure FGM est assimilée à un corps hétérogène, caractérisé, dans le cas des plaques, par une faible épaisseur au regard de ses autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes, présentant une anisotropie marquée — notamment un faible rapport entre le module de cisaillement transverse de l'âme et le module d'élasticité longitudinal des peaux, comme observé dans les structures sandwich — requiert des théories avancées capables de représenter fidèlement les effets de cisaillement transverse. Des revues complètes des divers modèles, qu'ils soient fondés sur l'élasticité tridimensionnelle ou sur les théories de plaques, sont disponibles dans [40,41]. Par ailleurs, ces dernières années ont vu l'émergence de nombreux modèles bidimensionnels dédiés à la modélisation des structures multicouches, intégrant explicitement les effets de cisaillement transverse.

II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles :**II.2.1. Approche monocouche équivalente :**

Les théories des couches équivalentes (ESL) sont issues de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle, en s'appuyant sur des hypothèses appropriées concernant la cinématique de déformation ou l'état de contrainte à travers l'épaisseur du stratifié. Nous proposons ici un aperçu des théories monocouches équivalentes. Ces théories considèrent une plaque stratifiée hétérogène comme un équivalent statique, représenté par une unique couche au comportement constitutif isotrope. Ce principe permet de simplifier l'analyse en réduisant un problème tridimensionnel continu à un modèle bidimensionnel. Le développement des théories ESL repose sur l'hypothèse que le champ de déplacement ou de contrainte peut être exprimé sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions inconnues associées aux coordonnées d'épaisseur. La théorie stratifiée la plus simple relevant de l'approche ESL est la théorie classique des plaques laminées (CLPT), qui constitue une extension de la théorie classique de Kirchhoff pour les plaques composites stratifiées.

L'hypothèse de Kirchhoff stipule que les droites initialement perpendiculaires au plan médian de la plaque demeurent droites et orthogonales à la surface moyenne après déformation. Ainsi, les effets du cisaillement transverse ainsi que les déformations transverses normales sont négligés. Dans la majorité des cas, cette hypothèse est valide. Toutefois, pour les stratifiés épais ou présentant un fort degré d'anisotropie, les effets de déformation transverse deviennent significatifs. La théorie suivante dans la hiérarchie des théories de stratifié ESL est celle du premier ordre.

Les théories de déformation de cisaillement (FSDT), qui étendent la cinématique de la théorie classique des plaques laminées (CLPT) en intégrant une déformation de cisaillement transversal dans leurs hypothèses cinématiques, supposent que cette déformation de cisaillement est constante par rapport aux coordonnées de l'épaisseur. L'introduction de cette forme élémentaire de déformation de cisaillement permet d'assouplir la condition de normalité imposée par la théorie classique des stratifiés. La théorie du premier ordre de déformation de cisaillement requiert des facteurs de correction de cisaillement, lesquels sont difficiles à déterminer pour des structures composites stratifiées de manière arbitraire. Ces facteurs dépendent non seulement des paramètres de laminage et des caractéristiques géométriques, mais également des charges appliquées et des conditions aux limites [42].

Les théories de la plaque laminée ESL de deuxième et d'ordre supérieur utilisent des polynômes d'ordre plus élevé dans l'expansion des composantes de déplacement à travers l'épaisseur du stratifié. Ces théories d'ordre supérieur introduisent des inconnues supplémentaires, ce qui rend leur interprétation en termes physiques plus complexe.

En plus de leur simplicité et du faible coût de calcul, les modèles ESL offrent souvent une description suffisamment précise de la réponse globale des stratifiés minces à modérément épais, notamment pour des paramètres comme les flèches brutes, les charges de flambement critique, les fréquences fondamentales de vibration et les formes de mode associées. Parmi ces théories, la théorie FSDT avec l'extensibilité transversale semble offrir une solution à la fois précise, économique et simple. Cependant, les modèles ESL présentent certaines limitations qui les rendent inaptes à résoudre l'ensemble des problèmes liés aux stratifiés composites. En particulier,

leur précision diminue à mesure que l'épaisseur du stratifié augmente. De plus, ces modèles sont souvent incapables de décrire de manière précise l'état de contrainte et de déformation au niveau des plis, notamment dans les zones géométriquement ou matériellement discontinues, ou proches de zones de chargement intense, où une connaissance précise des contraintes est essentielle. Dans de tels cas, il est nécessaire d'utiliser des théories tridimensionnelles ou des modèles basés sur des approches multiples [42].

II.2.1.1. Théorie classique des plaques :

On qualifie une plaque de « mince » lorsque la déflexion due aux déformations en cisaillement est négligeable par rapport à celle provoquée par la courbure. Pour une plaque homogène et isotrope, cette contribution du cisaillement à la déflexion dépend directement du rapport d'élanement (l/h). La théorie classique des plaques minces (CPT) repose sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite initialement normale au plan moyen de la plaque demeure perpendiculaire à ce plan après déformation (voir Figure II.1). Cela revient à négliger les effets du cisaillement transverse. Ce modèle est décrit notamment par Timoshenko et Woinowsky-Krieger [43], ainsi que par [44],[45]. À partir de ces hypothèses, on peut exprimer le champ de déplacement de la plaque de la manière suivante :

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) \tag{II.1}$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z=0$).

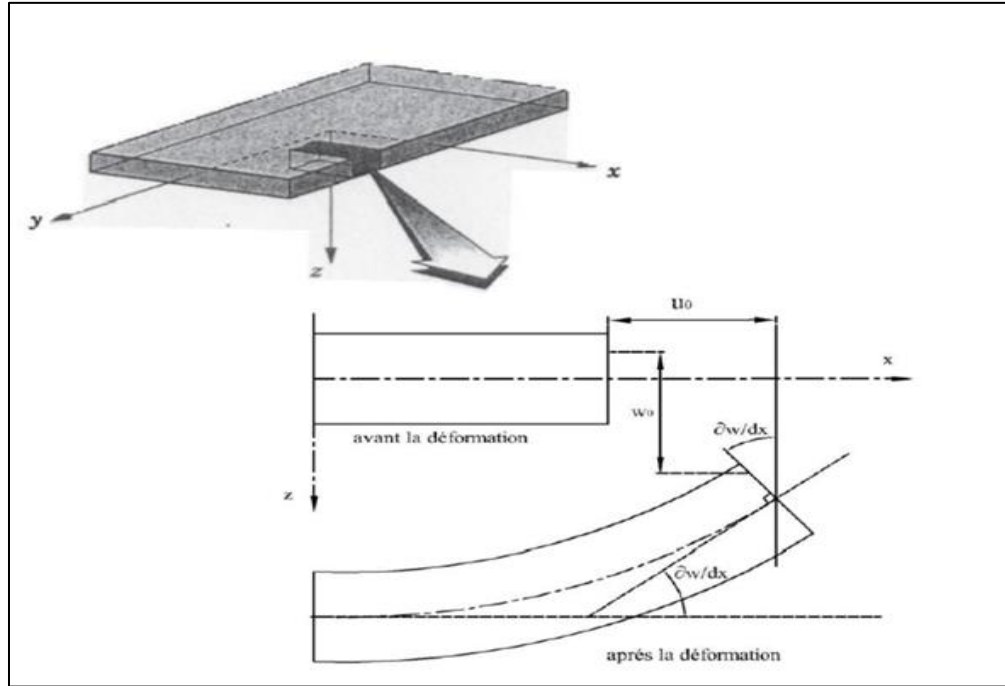


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff [44]

Ce champ se décompose en:

- Déplacement de la membrane $u_0(x,y)$, $v_0(x,y)$
- Déplacement dû à la flexion $Z \frac{\partial w_0}{\partial x}$, $Z \frac{\partial w_0}{\partial y}$
- Déplacement transversal $w_0(x, z)$

Sous ces considérations, les sections droites de la plaque ne subissent aucun glissement, en effet:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.2a})$$

Qui en résulte une contrainte nulle de cisaillement :

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \quad (\text{II.2b})$$

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

II.2.1.2. Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre FSDT :

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre constitue une extension de la théorie classique des plaques, en intégrant l'effet du cisaillement transverse. Elle repose sur l'hypothèse selon laquelle une section droite initialement plane le reste après déformation, tout en cessant d'être perpendiculaire à la ligne moyenne. Ce concept a été développé notamment par [46],[47], donnant naissance au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Des contributions notables ont également été apportées par [43], ainsi que [44],[45].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x,y,z) &= u_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \theta_x(x,y) \\ \mathbf{v}(x,y,z) &= v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \theta_y(x,y) \\ \mathbf{x}(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) et (θ_x, θ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

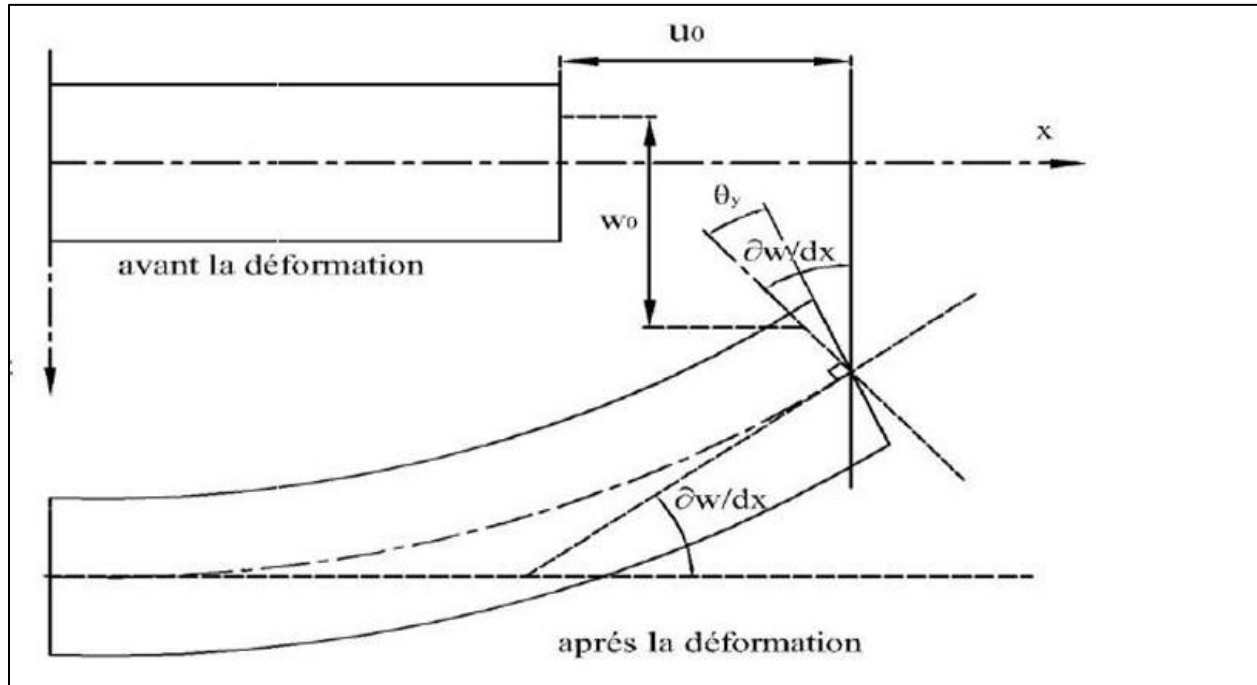


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [44].

Ce champ se décompose en:

- Déplacement de la membrane $u_0(x,y)$, $v_0(x,y)$
- Déplacement dû à la flexion $z \frac{\partial w_0}{\partial x}$, $z \frac{\partial w_0}{\partial y}$
- Déplacement transversal $z \theta_x(x,y)$, $z \theta_y(x,y)$

Si on veut calculer la contrainte de cisaillement :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \frac{\partial w_0}{\partial x} = \theta_x$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \neq 0 \Rightarrow \tau_{xz} = G \cdot \theta_x \quad (\text{II.4})$$

Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui ne représente pas la réalité ; ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction pour régler ce problème.

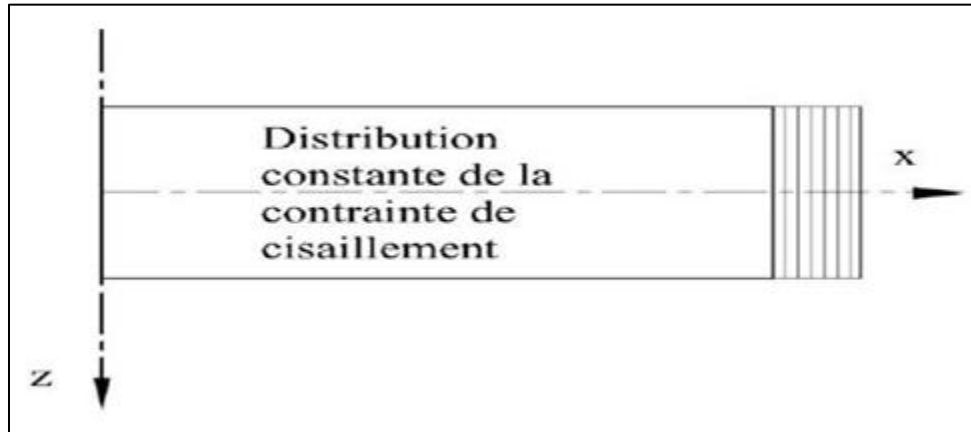


Figure II.3 : La distribution constante des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSDT [44]

II.2.1.3. Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDT :

Contrairement aux théories classiques et à celle de Reissner-Mindlin, qui supposent une distribution linéaire du déplacement selon l'épaisseur, la théorie d'ordre supérieur repose sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Elle permet ainsi de prendre en compte les effets de déformation en cisaillement et/ou en traction transversale, sans nécessiter de facteurs de correction. Des travaux de référence sur ces modèles sont disponibles notamment chez [48],[49],[50],[51],[52]. Le champ de déplacement est généralement exprimé comme suit :

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + f(z) \theta_x(x,y)$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + f(z) \theta_y(x,y)$$

(II.5)

$$x(x,y,z) = w_0(x,y)$$

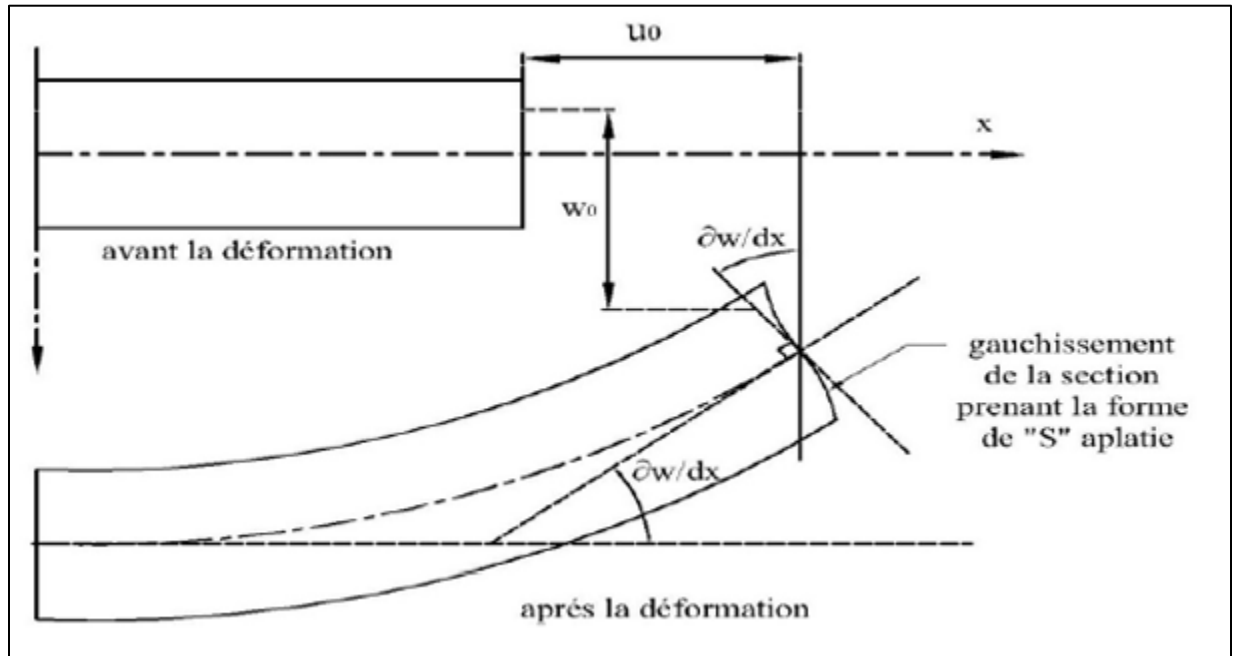


Figure II.4: Illustration de la cinématique de la plaque d'ordre élevé [44].

On retrouve les mêmes composantes que dans les modèles précédents : le déplacement membranaire, le déplacement dû à la flexion et celui lié au cisaillement. Toutefois, dans ce cas, le déplacement axial dû au cisaillement n'est plus linéaire. Ainsi, le terme en « z » utilisé dans les théories classiques est remplacé par une fonction, appelée fonction de gauchissement ou fonction de forme. Cette fonction décrit la déformation de la section transversale, connue sous le nom de gauchissement. Elle doit être impaire pour représenter une forme en « S » aplatie, typique de la déformation des plaques. De plus, cette fonction doit satisfaire les conditions aux limites imposant l'annulation des contraintes tangentielles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque [44].

Donc :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + f'(z) \theta_x \frac{\partial w_0}{\partial x} = f'(z) \theta_x$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \neq 0 \quad \Rightarrow \tau_{xz} = G \cdot f'(z) \theta \quad \Rightarrow f'(\pm h/2) \quad (\text{II.6})$$

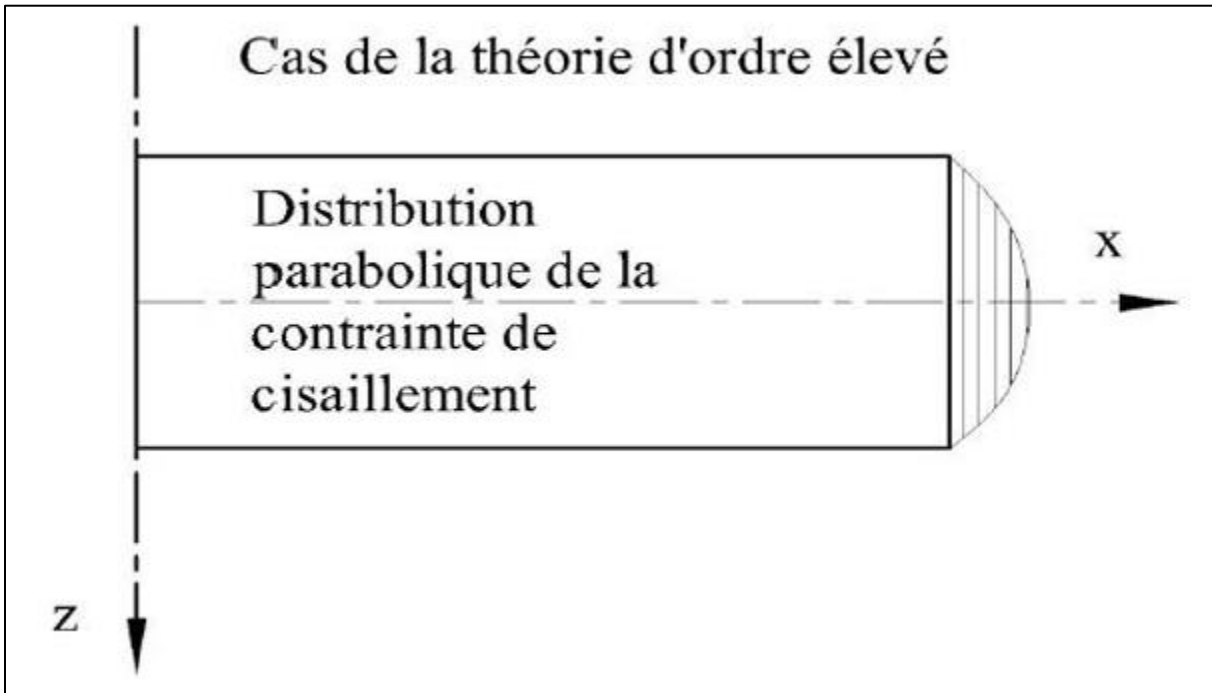


Figure II.5 : La distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie HSDT. [44].

On représente ci-dessous quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

Murthy et Reddy : $f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)$

Ambarsumyan : $f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$

Reissner : $f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - 4 \frac{z^2}{3h^2} \right)$

Touratier : $f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$

$$\text{Ferreira : } \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \sin\left(\frac{\pi\mathbf{z}}{h}\right)$$

$$\text{Karrama : } \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$$

$$\text{Soldatos : } \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{h}\sinh\left(\frac{z}{h}\right) \quad \mathbf{z}\cosh\left(\frac{1}{2}\right)$$

II.2.2. Approche par couche :

Ces méthodes visent à mieux décrire les effets d'interface dans les matériaux composites conventionnels. Les équations (II.3) et (II.4) montrent que cette approche est également applicable aux matériaux FGM. Plusieurs modèles basés sur l'approche par couches ont été proposés [53],[41],[54],[51],[55]. Le modèle multicouche est divisé en sous-structures (qui correspondent à chaque couche ou groupe de couches). À chaque sous-structure, une théorie d'ordre inférieur ou un modèle d'ordre supérieur est appliqué, imposant un champ de déplacement garantissant la continuité des interfaces entre les différentes couches. Ces modèles sont relativement coûteux (le degré des équations de comportement dépend du nombre de couches), mais ils permettent d'obtenir des résultats plus précis, notamment pour le calcul des contraintes hors plan.

En règle générale, les modèles dérivés de l'approche par couches peuvent être divisés en deux groupes : les modèles à couches discrètes, où chaque couche est considérée comme une plaque et où des conditions de continuité sur les déplacements ou les contraintes sont imposées aux interfaces, et les modèles zig-zig, où la cinématique respecte d'emblée les conditions de contact et demeure indépendante du nombre de couches (Figures II.6 et II.7) [56].

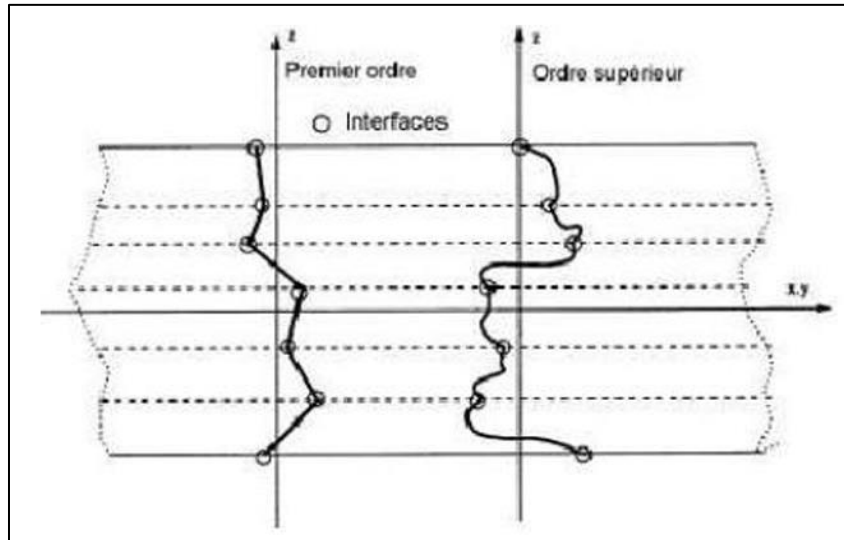


Figure II.6 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique [56]

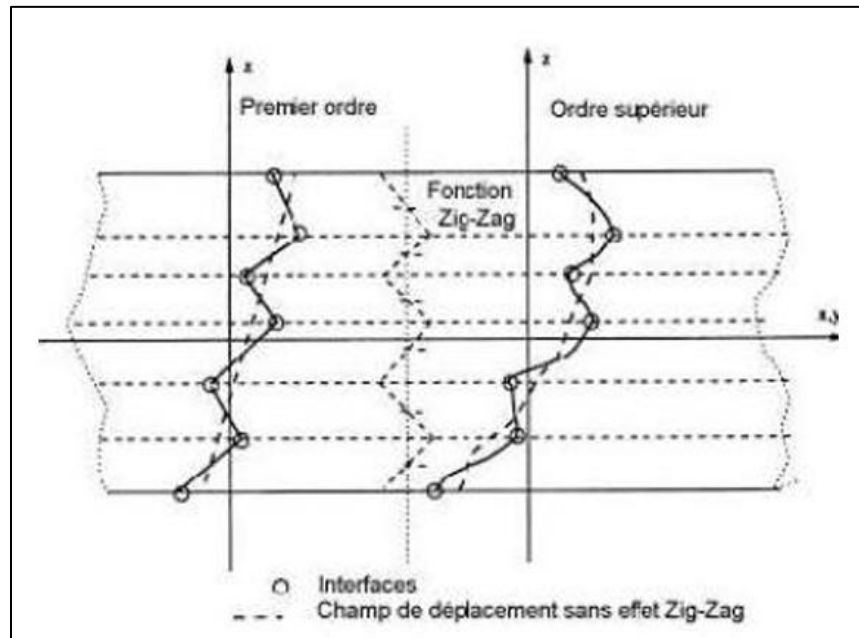


Figure II.7 : Champ de déplacements des modèles zig-zig, approche cinématique [56]

II.2.2.1. Les modèles zig-zig :

Afin de simplifier le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva propose, en 1987, le modèle zig-zig du premier ordre [55]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires résultent de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zig, laquelle utilise la fonction d'Heaviside. La fonction zig-zig permet d'obtenir des déplacements membranaires continus en fonction de la variable z , mais sa dérivée première présente une discontinuité à l'interface (voir Figure IV.) . Par conséquent, les déformations transversales sont discontinues, et la continuité des contraintes de cisaillement transversal aux interfaces est garantie [55].

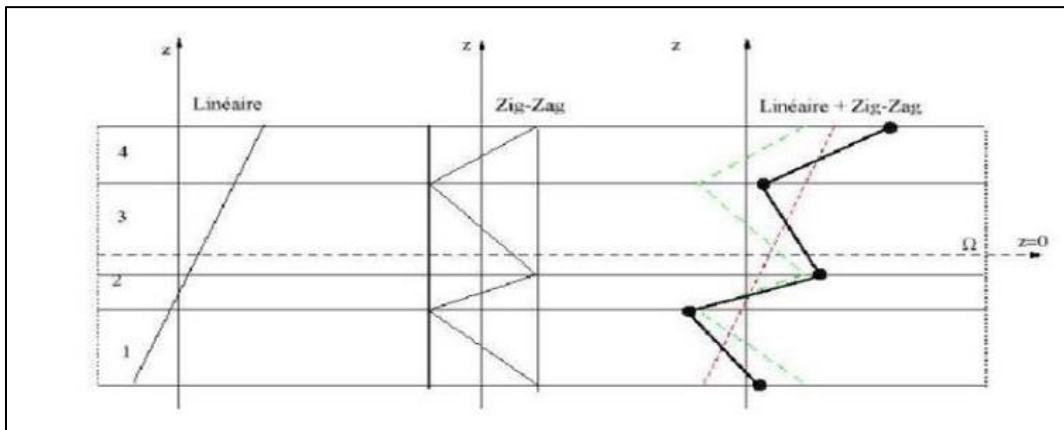


Figure II.8 : Champ de déplacements des modèles zig-zig du premier ordre [56]

L'un des atouts majeurs du champ de déplacement dans les modèles zig-zag réside dans sa capacité à modéliser avec précision la distorsion des normales à la surface déformée, tout en respectant les conditions de continuité, et ce sans qu'il soit nécessaire d'augmenter le nombre ou l'ordre des équations de la théorie du premier ordre. En s'appuyant sur ce concept, plusieurs chercheurs ont apporté des améliorations significatives à ce modèle [56]. L'amélioration principale consiste en l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. Concrètement, le champ de déplacement zig-zag, de nature linéaire par morceaux, est superposé à un champ de déplacement d'ordre supérieur, généralement cubique (voir Figure II.9). Cette

approche permet de satisfaire les conditions de compatibilité aux faces supérieure et inférieure des plaques, tout en réduisant le nombre de paramètres nécessaires [56].

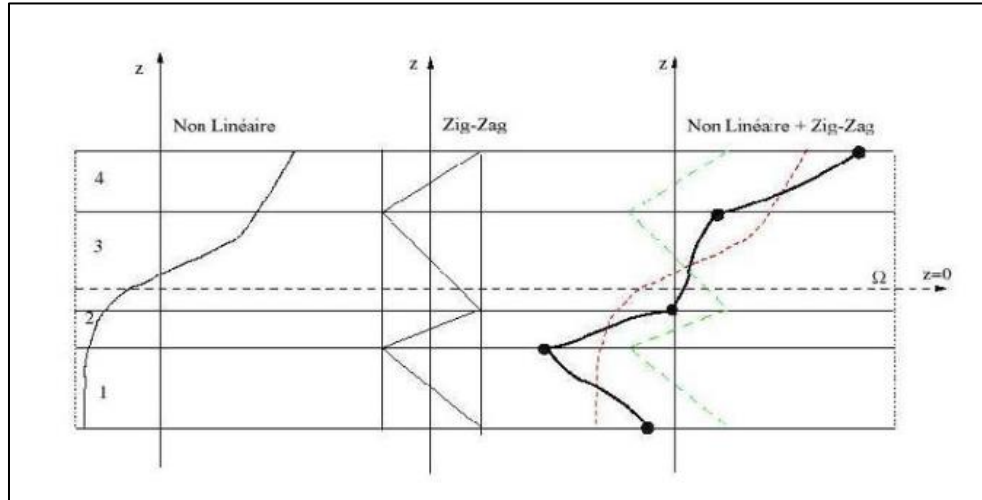


Figure II.9: Champ de déplacements des modèles zig-zig d'ordre supérieur. [56]

Dans les études menées par [57,58] la fonction sinusoidale proposée par [59], est associée à la fonction zig-zag afin d'améliorer la prise en compte des effets de cisaillement. Plus récemment, Afaq et collaborateurs [54], ont combiné le modèle exponentiel avec le comportement zig-zag pour enrichir la description cinématique. Les résultats numériques issus de l'ensemble de ces travaux confirment que le modèle zig-zag offre un compromis satisfaisant entre la précision des résultats et le coût computationnel. Toutefois, ces modèles présentent certaines limites en ce qui concerne leur validation dans le cadre de l'analyse du délaminage.

II.3. Une revue de littérature des études sur les structures FGM :

II.3.1. Les études sur les contraintes résiduelles dans les structures FGM

L'analyse des contraintes résiduelles dans les matériaux à gradients de propriétés, appelés matériaux FGM, constitue l'un des domaines les plus cruciaux en génie et sciences des matériaux, en raison de leurs applications dans des secteurs industriels majeurs tels que les réacteurs nucléaires, les réacteurs de fusion, les navettes spatiales et le génie civil.

Les contraintes résiduelles peuvent apparaître lorsque deux matériaux ayant des coefficients de dilatation thermique différents sont assemblés pour former un composite à deux phases. Des contraintes résiduelles importantes dans une structure FGM peuvent potentiellement réduire la capacité de ce dernier à résister à une charge d'impact future lorsqu'il est utilisé sur une plateforme aérospatiale.

Comme dans de nombreux problèmes d'assemblage et de composites, l'effet des contraintes résiduelles, qu'elles résultent d'un traitement ou de variations de température en service, joue un rôle essentiel. La détermination de l'état thermique optimal des contraintes doit prendre en compte les propriétés thermiques et mécaniques des matériaux constitutifs, ainsi que leurs variations.

L'optimisation des contraintes résiduelles constitue un objectif crucial dans la conception et une force motrice dans la recherche sur les matériaux FGM. En effet, plusieurs études théoriques et expérimentales ont été menées pour évaluer ces contraintes dans les FGM [60], L'impact de la composition sur les contraintes thermiques résiduelles a été étudié pour les cas élastique et élastico-plastique [61,62,63], Abualnour [64], ont déterminé les contraintes résiduelles dues aux sollicitations mécaniques et thermiques dans les structures FGM, en vue d'optimiser leur valeur en fonction des propriétés du matériau selon une fonction de loi de puissance (P-FGM). Dans cette étude, tous les problèmes ont été traités dans le cadre de l'élasticité linéaire sur un disque FGM, à une température de traitement de 1373 K. Les calculs ont pris en compte ces deux paramètres du matériau (E , α), tant indépendants que dépendants de la température. Les résultats ont montré que la distribution et l'ampleur des contraintes résiduelles dans un disque FGM peuvent être ajustées en maîtrisant le gradient de la composition, appelé paramètre du matériau (p), et en choisissant une combinaison appropriée en fonction de la géométrie, notamment en présence de régions monolithiques. Une gradation linéaire des constituants conduit à un affaiblissement notable des contraintes résiduelles après un traitement à haute température.

Jamaludin [65], ont analysé les contraintes thermiques résiduelles dans la conception de plaques FGM en hydroxyapatite-titane, en tant que solution aux problèmes liés aux interfaces pointues. La méthode des éléments finis (MEF) a été utilisée pour réaliser une étude paramétrique afin

d'examiner la corrélation entre certains paramètres et la performance de la structure FGM. Les valeurs des contraintes thermiques résiduelles calculées ont été validées par comparaison avec les résultats précédemment établis. Ils ont conclu que la méthode des éléments finis est applicable pour la conception et l'évaluation des contraintes thermiques résiduelles élastiques d'une structure FGM.

II.3.2. Les études sur l'analyse thermo élastique des structures FGM :

Avec l'essor de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (FGM), il devient nécessaire de développer de nouvelles méthodologies permettant non seulement de caractériser ces matériaux, mais aussi d'analyser et de concevoir des composants structurels qui en sont constitués. Bien que certaines recherches aient abordé l'analyse thermoélastique des composants structurels en FGM, elles restent relativement limitées. Noda [66] a proposé une revue approfondie englobant divers aspects, allant des phénomènes thermoélastiques jusqu'aux problématiques associées. Il a mis en évidence l'influence significative des propriétés thermodépendantes sur les contraintes mécaniques, en soulignant la nécessité de prendre en compte les variations des propriétés des matériaux pour parvenir à une analyse plus rigoureuse. Par ailleurs, Tanigawa [67] a réalisé une revue exhaustive consacrée à l'analyse thermoélastique des FGM.

Une analyse approfondie de la littérature révèle qu'au cours de la dernière décennie, les recherches se sont principalement orientées vers l'étude du comportement thermoélastique des cylindres en matériaux à gradient de propriétés (FGM) supposés de longueur infinie. Toutefois, lorsque le rapport entre la longueur et le rayon du cylindre diminue, l'influence des conditions aux limites devient significative. Dans de telles configurations, la distribution des déplacements et des contraintes le long de l'axe longitudinal du cylindre devient non uniforme et doit impérativement être prise en compte dans l'analyse.

La réponse thermoélastique des structures en matériaux à gradient de propriétés (FGM) soumises à des charges thermiques et mécaniques a été examinée à l'aide de théories simplifiées adoptant diverses approches. Par ailleurs, certaines études ont tenté d'analyser cette réponse dans des

structures FGM tridimensionnelles. L'intégration d'une couche de protection thermique (céramique) et d'une structure mécanique porteuse (métal) en une seule entité constitue l'un des atouts majeurs des FGM. Pour être retenu dans une application donnée, un système FGM doit démontrer sa capacité à supporter simultanément des charges thermiques et mécaniques. Dans le cadre du présent travail, les FGM étudiés ont été exposés à des environnements à température ambiante, afin de restreindre la portée du projet. Néanmoins, pour envisager une utilisation réelle dans diverses applications, il est essentiel d'examiner leur comportement sous l'effet des sollicitations thermiques, car les propriétés des matériaux, tout comme la géométrie de l'élément structurel, peuvent varier en fonction des changements de température. Les variations significatives des propriétés et de la configuration des FGM peuvent influencer leur capacité à résister à des charges d'impact provenant d'objets étrangers. Par ailleurs, la réponse quasi-statique de tout élément structurel soumis à une charge sur une plateforme aérospatiale doit être analysée en priorité, avant d'aborder les effets dynamiques induits par les conditions de vol.

Les premières contributions majeures à l'étude du comportement thermoélastique non linéaire des plaques rectangulaires en matériaux à gradient de propriétés (FGM) ont été réalisées par Praveen [68]. Ces auteurs ont essentiellement adapté la théorie des plaques composites stratifiées en modifiant les paramètres de rigidité du matériau — notamment les matrices $[A_{ij}]$, $[B_{ij}]$, $[D_{ij}]$ — en passant de sommations sur des couches discrètes à des intégrales continues, afin de représenter la variation progressive des propriétés du matériau à travers l'épaisseur de la plaque ou de la coque. Ce cadre a ensuite été repris et enrichi par Larson [69].

Darabseh ont mené une analyse thermoélastique bidimensionnelle d'un cylindre creux à paroi épaisse en matériau à gradient de propriétés (FGM) en utilisant la méthode des éléments finis. Dans leur étude, le cylindre FGM, de longueur finie, est simplement appuyé et soumis simultanément à des sollicitations thermiques et mécaniques, conformément au cadre défini par Hosseini Kordkheili [70].

Zhou et al. [71]. ont analysé la réponse thermoélastique transitoire de plaques rectangulaires en matériaux à gradient de propriétés. Ils ont développé une simulation numérique pour étudier l'évolution transitoire de la température et des contraintes thermiques dans une plaque soumise à

des conditions aux limites spécifiques. Leur étude a montré que, dans le cas d'un choc thermique, la température, les déplacements et les contraintes évoluent rapidement durant la phase transitoire. De plus, l'hétérogénéité des propriétés du matériau a un impact significatif sur l'amplitude et la distribution de ces grandeurs. Ainsi, une conception optimisée des structures en FGM peut être obtenue en sélectionnant judicieusement la forme de distribution des fractions volumiques des constituants du matériau.

II.3.3. Les études sur l'analyse du flambement des structures FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) présentent de nombreux avantages par rapport aux composites classiques. Leurs caractéristiques varient progressivement d'une surface à l'autre, notamment d'un métal vers une céramique. Grâce à cette transition continue de composition, les FGM sont capables de résister à des environnements à haute température tout en conservant leur intégrité structurelle. Dans les applications pratiques, les éléments structuraux tels que les poutres, plaques ou coquilles sont souvent exposés à une élévation thermique uniforme. Lorsque les déplacements sont contraints, cela peut engendrer des contraintes de compression susceptibles de provoquer des instabilités. Le flambement, en particulier dans les structures minces, constitue un mode de défaillance critique qui doit être soigneusement pris en compte dès la phase de conception.

De nombreux chercheurs se sont intéressés au comportement des structures en matériaux à gradient de propriétés (FGM) soumises à des sollicitations thermiques et mécaniques. La littérature rapporte plusieurs travaux approfondis sur le flambement des plaques rectangulaires et circulaires en FGM. Parmi les premières contributions notables, celle de Shen [72] se distingue. Il s'est focalisé sur l'analyse du post-flambement de panneaux cylindriques en FGM soumis à une charge axiale et exposés à un environnement thermique. Les propriétés des panneaux, gradués selon l'épaisseur, ont été modélisées à l'aide de la règle de mélange classique prenant en compte la dépendance à la température. Shen a employé une théorie de déformation au cisaillement d'ordre supérieur appliquée aux coques pour établir l'équation de comportement sous chargement thermomécanique. La validité de son modèle a été vérifiée en le comparant aux

résultats disponibles pour des panneaux cylindriques isotropes, avant de proposer des données de flambement pour divers systèmes de FGM [69]

Le comportement de flambement et de post-flambement des poutres minces soumises à des charges axiales mécaniques et reposant sur des fondations élastiques a été examiné par plusieurs auteurs, notamment Timoshenko et al. [73]. Plus récemment, Vaz [74], ont développé une solution analytique pour évaluer la réponse thermomécanique initiale en post-flambement d'une poutre épaisse posée sur une fondation élastique linéaire, soumise à une élévation uniforme de température sur l'ensemble de sa section transversale. Dans leur approche, la contrainte thermique est supposée croître linéairement avec l'augmentation de la température, tandis que les propriétés des matériaux sont considérées comme constantes, indépendantes des variations thermiques.

Par ailleurs, le modèle considéré s'avère pertinent pour analyser le comportement des poutres courtes, dans la mesure où il intègre les effets des déformations de cisaillement transverse. Les résultats obtenus indiquent une diminution plus marquée de la charge de compression pour des coefficients de cisaillement élevés, particulièrement lorsque la raideur de la fondation augmente. Il est également observé que, pour les modes supérieurs de flambement, la température de déformation devient plus élevée tandis que les déflexions restent relativement faibles. Woo [75], ont examiné le comportement post-flambement de plaques et de coques cylindriques en matériaux à gradient de propriétés (FGM), soumises à des charges de compression extrêmes ainsi qu'à un champ thermique. Dans leur étude, les propriétés des matériaux FGM varient de manière continue à travers l'épaisseur de la coque, selon une distribution suivant une loi de puissance de la fraction volumique des constituants. Les équations fondamentales régissant les coques minces rectangulaires en FGM sont dérivées à l'aide de la théorie de Von Karman, qui tient compte des grandes déflexions transversales, et la solution est formulée sous forme de séries de Fourier. Les résultats mettent en évidence l'influence significative du couplage thermomécanique ainsi que des conditions aux limites sur la réponse des plaques et coques FGM soumises à des charges de compression critiques.

II.3.4. Les études sur l'analyse statique et dynamique des structures FGM

Divers modèles théoriques ont été développés pour analyser le comportement statique et dynamique des structures à matériaux à gradient de propriétés (FGM). En présence d'une fissure ou d'un défaut, plusieurs chercheurs se sont penchés sur l'influence des variations du gradient de propriétés sur les facteurs d'intensité des contraintes sous différentes sollicitations statiques et dynamiques [76,77]. En revanche, en l'absence de fissures, le comportement mécanique des structures FGM a fait l'objet de nombreuses investigations. Toutefois, comparativement aux études portant sur les plaques et les coques à gradient de propriétés, les recherches concernant les poutres FGM restent limitées. À titre d'exemple, une solution exacte en élasticité pour une poutre FGM simplement appuyée a été proposée par Sankar , en considérant une variation exponentielle du module de Young selon l'épaisseur, avec un coefficient de Poisson constant. De leur côté, Zhu [78], ont examiné un problème similaire, mais en supposant une variation polynomiale du module de Young dans la direction de l'épaisseur.

L'étude des vibrations des plaques et des coques cylindriques FGM simplement appuyées a été initiée pour la première fois en 1999 par Loy [79]. Les coques cylindriques en matériaux à gradient de propriétés suscitent un intérêt particulier dans des domaines tels que la construction navale et les systèmes de tuyauterie. Dans leur analyse, les auteurs considèrent une distribution en fraction volumique des constituants selon une loi de puissance, allant de la surface intérieure vers la surface extérieure de la coque. Les propriétés des matériaux sont supposées varier à travers l'épaisseur de la coque conformément à la loi classique des mélanges

Une fois que les relations constitutives ont été formulées, les auteurs ont utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz pour résoudre les fréquences naturelles de la structure de la coque. Les auteurs ont comparé les résultats pour les différentes distributions de fraction de volume d'un système FGM en métal-céramique et ont constaté que les fréquences naturelles pour une coque en FGM s'allongent entre les fréquences naturelles calculées pour une coque en métal pure ou purement en céramique. Une étude qualitative a également été réalisée lorsque la géométrie de la coque a été autorisée à varier [69].

La réponse dynamique des plaques rectangulaires en matériaux à gradient de propriétés (FGM) a été étudiée pour la première fois par Yang [80]. Dans leur travail, ils ont considéré une plaque rectangulaire dont la variation des propriétés à travers l'épaisseur suit une loi de puissance, les caractéristiques des matériaux étant décrites par la règle classique des mélanges. Les configurations de la plaque incluaient des conditions aux limites entièrement encastées, ou partiellement encastées sur deux côtés et simplement appuyées sur les deux autres. De plus, la plaque reposait sur une fondation élastique et était soumise à des contraintes initiales dans le plan, soit uni-axiales, soit bi-axiales, bien que la présence ou l'absence de ces contraintes puisse varier. Yang [80], ont développé une formulation théorique générale permettant d'évaluer la réponse de la plaque de manière semi-analytique sous un chargement quelconque et avec diverses conditions aux limites, conformément aux travaux ultérieurs de Larson [69].

Ramirez [81], ont proposé une approche approximative pour l'analyse statique tridimensionnelle des plaques élastiques anisotropes constituées de matériaux à gradient de propriétés. Cette méthode repose sur la théorie des couches discrètes, combinée à la méthode de Ritz, dans laquelle la plaque est subdivisée en un nombre arbitraire de couches homogènes et/ou de FGM. Deux types de variations des propriétés mécaniques ont été considérés : une variation exponentielle à travers l'épaisseur de la plaque, ainsi qu'une distribution quadratique liée à l'orientation des fibres dans les stratifiés. L'approche permet d'analyser les plaques en FGM en les modélisant sous forme de couches discrètes, dont les propriétés mécaniques sont évaluées comme des moyennes représentatives de chaque couche. La précision des résultats obtenus dépend fortement du nombre de couches adoptées et de la finesse de la gradation des matériaux.

II.4. Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons décrit les différentes théories des plaques, à savoir l'approche monocouche équivalente ainsi que l'approche par couche. Il en ressort que l'approche monocouche équivalente est plus appropriée pour les matériaux à gradient fonctionnel (FGM), car elle tient compte de la variation progressive des propriétés mécaniques, contrairement aux composites conventionnels où les changements brusques entraînent des problèmes inévitables de délaminage. Il apparaît également que les théories d'ordre supérieur offrent une meilleure précision, mais elles restent néanmoins coûteuses en temps de calcul et relativement complexes dans leur formulation.

**Chapitre III : Analyse d'une plaque
poreuse sous l'effet double thermique
et flambement**

III.1. Introduction :

Les matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials - FGM) sont de plus en plus utilisés dans de nombreuses applications d'ingénierie avancée, telles que les réacteurs nucléaires et les industries aérospatiales à grande vitesse. Ces matériaux se caractérisent par une variation progressive et continue de leurs propriétés mécaniques d'une surface à l'autre, ce qui leur confère une performance optimale dans des conditions extrêmes. En général, les FGM sont constitués d'un mélange de céramique et de métal, ou d'une combinaison de matériaux aux propriétés contrastées. La composante céramique assure une résistance élevée aux températures grâce à sa faible conductivité thermique, tandis que la phase métallique ductile permet d'atténuer les risques de fissuration induits par les contraintes thermiques générées par des gradients de température importants sur de courtes périodes.

Dans ce chapitre, une théorie de plaque raffinée à quatre variables est développée pour l'analyse du flambement thermique des plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FGM). Cette théorie présente de nombreuses similitudes avec la théorie classique des plaques, tout en apportant des améliorations significatives. En particulier, elle permet une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui permet de satisfaire naturellement les conditions de nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure, sans recourir à des facteurs de correction du cisaillement.

Une loi de distribution en puissance est utilisée pour modéliser la variation de la fraction volumique des constituants des matériaux fonctionnellement gradués. Les équations d'équilibre et de stabilité sont établies sur la base de la théorie raffinée présentée. Les équations non linéaires de comportement qui en résultent sont résolues pour des plaques simplement appuyées, en tenant compte des conditions aux limites appropriées. Les chargements thermiques sont considérés selon trois profils de distribution à travers l'épaisseur de la plaque : uniforme, linéaire et non linéaire.

L'influence de divers paramètres géométriques et matériaux de la plaque sur la température critique de flambement est examinée en détail. Les résultats montrent que la théorie raffinée des plaques développée dans ce travail permet de prédire avec une grande précision les températures critiques de flambement pour les plaques simplement appuyées en matériaux fonctionnellement gradués.

III.2. Formulations théoriques :

III.2.1. Champ de déplacement et déformation

Considérons une plaque rectangulaire en matériau fonctionnellement gradué (FGM), de longueur a , de largeur b et d'épaisseur h . La théorie de plaque raffinée à quatre variables, proposée par Tounsi et ses collaborateurs, est adoptée pour cette étude. Cette théorie tient compte de la variation parabolique des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque, tout en satisfaisant les conditions naturelles de nullité des contraintes de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure, sans recourir à des facteurs de correction. Le champ de déplacement associé à cette théorie s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ V(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ W(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (III.1)$$

Où u_0 et v_0 représentent les déplacements du plan moyen de la plaque selon les directions x et y , respectivement. Les fonctions w_b et w_s désignent les composantes associées à la flexion, tandis que θ correspond au déplacement dû au cisaillement transversal. La non-linéarité géométrique du modèle est prise en compte à l'aide des relations déformation-déplacement de von Kármán, qui s'expriment comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f k_x^s \\ \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f k_y^s \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f k_{xy}^s \\ \gamma_{xz} = g \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} = g \gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z = 0 \end{array} \right. \quad (III.2)$$

Ou

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right), k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (III.3)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right), k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \\ k_{xy}^b &= -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, f(z) = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{3}z \left(\frac{z}{h} \right) \\ \text{et } g(z) &= \frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^2\end{aligned}$$

III. 2.2 Relations constitutives :

Considérons une plaque en matériau fonctionnellement gradué (FGM), constituée d'un mélange de céramique et de métal, soumise à un chargement thermique. Il est supposé que les propriétés du matériau varient continûment à travers l'épaisseur de la plaque. Cette variation des propriétés matérielles, telles que le module d'élasticité, la conductivité thermique ou le coefficient de dilatation thermique, peut être exprimée par la relation suivante :

$$p^{(n)}(z) = p_b + (p_t + p_b)V_t \quad (\text{III.4})$$

Où p désigne la propriété du matériau, tandis que P_t et P_b correspondent respectivement aux propriétés des faces supérieure et inférieure de la plaque. Par ailleurs, dans l'équation (4), V_t représente la fraction volumique du composant situé sur la face supérieure, et elle suit une loi de puissance simple exprimée comme suit :

$$V_t = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (\text{III.5})$$

Où p ($0 \leq p \leq \infty$) est un paramètre qui définit le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur. Dans cette étude, on suppose que les modules E , G , ainsi que le coefficient de dilatation thermique α , varient conformément à l'équation (III.4), tandis que le coefficient de Poisson ν est considéré comme constant. Les relations constitutives linéaires sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

Et

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ représentent respectivement les composantes de contrainte et de déformation. En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (III.4), les coefficients de rigidité Q_{ij} peuvent être exprimés comme suit :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (\text{III.7a})$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \quad (\text{III.7b})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.7c})$$

III.3 Équations de stabilité :

L'énergie potentielle totale de la plaque FG peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$U = \iiint [\sigma_x(\varepsilon_x - \alpha T) + \sigma_y(\varepsilon_y - \alpha T) + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}] dx dy dz \quad (\text{III.8})$$

Le principe des travaux virtuels appliqué à notre problème s'énonce de la manière suivante :

$$\iint \left[\begin{array}{l} N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b \\ + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s \\ + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta k_{yz}^s + S_{xz}^s \delta k_{xz}^s \end{array} \right] dx dy = 0$$

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x + \sigma_y + \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.10a})$$

$$(S_{xz}^s + S_{yz}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (\text{III.10b})$$

En substituant l'équation (6) dans l'équation (10), les forces résultantes dans la plaque FGM peuvent être reliées aux déformations totales par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}. \quad S = A^s \gamma. \quad (\text{III.11})$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\} \quad (\text{III.12a})$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}, M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}, M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\} \quad (\text{III.12b})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\} \quad (\text{III.12c})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III.12d})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III.12e})$$

$$S = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t, \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}. \quad (\text{III.12f})$$

Où les composants de rigidité de la plaque A_{ij}, B_{ij} , etc sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz. \quad (\text{III.13a})$$

Et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{III.13b})$$

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz. \quad (\text{III.13c})$$

Les forces et moments résultants, N_x^T , N_y^T , ainsi que $M_x^{bt} = M_y^{bt}$ et $M_x^{st} = M_y^{st}$ dus aux charges thermiques, sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.14})$$

Les équations de stabilité de la plaque peuvent être obtenues à partir du critère d'équilibre différentiel. Supposons que l'état d'équilibre de la plaque FGM sous charges thermiques soit défini par les composantes de déplacement $(u_0^0, v_0^0, w_b^0, w_s^0)$. Les composantes de déplacement d'un état voisin stable, notées $(u_0^1, v_0^1, w_b^1, w_s^1)$ correspondent à une petite perturbation par rapport à la position d'équilibre. Par conséquent, les déplacements totaux dans cet état voisin s'expriment comme :

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1, \quad v_0 = v_0^0 + v_0^1, \quad w_b = w_b^0 + w_b^1, \quad w_s = w_s^0 + w_s^1 \quad (\text{III.15})$$

Où le chiffre 1 fait référence à l'état de stabilité et le chiffre 0 à l'état d'équilibre initial. En substituant les équations (2) et (15) dans l'équation (9), puis en procédant à une intégration par parties et en annulant séparément les coefficients $\delta u_0^1, \delta v_0^1, \delta w_b^1, \delta w_s^1$, on obtient les équations gouvernantes de stabilité pour les théories des plaques prenant en compte la déformation par cisaillement, sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^{b1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{b1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{b1}}{\partial x^2} + \bar{N} = 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^{s1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{s1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{s1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_{xz}^{s1}}{\partial x} + \frac{\partial^2 S_{yz}^{s1}}{\partial y} + \bar{N} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.16})$$

Avec

$$\bar{N} = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial y^2} \right] \quad (\text{III.17})$$

Où les termes N_x^0 et N_y^0 représentent les forces de pré-flambement résultantes, définies comme suit :

$$N_x^0 = N_y^0 = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\alpha(z)E(z)}{1-\nu} dz \quad (\text{III.18})$$

Pour une plaque CPT, les équations de stabilité se réduisent aux trois premières équations de l'équation (III.16).

III.4 Solution de Navier pour le flambement thermique des plaques FGM :

Les plaques rectangulaires sont généralement classées selon le type d'appuis employés. Ici, nous nous intéressons à la solution exacte de l'équation (III.16) pour une plaque FGM simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées pour la présente théorie raffinée des plaques à quatre variables, appliquée sur les quatre côtés :

$$v_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial y} = N_x^1 = M_x^{b1} = M_x^{s1} = 0 \quad \text{à } x = 0 \quad (\text{III.19a})$$

$$u_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial x} = N_y^1 = M_y^{b1} = M_y^{s1} = 0 \quad \text{à } y = 0, b. \quad (\text{III.19b})$$

La solution approximative suivante satisfait à la fois les équations différentielles et les conditions aux limites

$$\begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_0^1 \\ w_0^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

où U_{mn}^1 , V_{mn}^1 , W_{bmn}^1 , et W_{smn}^1 sont des paramètres arbitraires à déterminer, $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$ et m et n sont les nombres de mode. En substituant l'équation. (III.20) dans l'équation. (16), on obtient

$$[K]\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{III.21})$$

Où $\{\Delta\}$ représente le vecteur de colonne des inconnus

$$\{\Delta\} = \{U_{mn}^1, V_{mn}^1, W_{bmn}^1, W_{smn}^1\} \quad (\text{III.22})$$

et $[K]$ est la matrice symétrique donnée par

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

Dans laquelle

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\ a_{12} &= -\lambda\mu(A_{11} + A_{66}) \\ a_{13} &= -\lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\ a_{14} &= -\lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\ a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\ a_{23} &= -\mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\ a_{24} &= -\mu[(B_{11}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\ a_{33} &= (D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2) \\ a_{34} &= (D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2) \\ a_{44} &= -(H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^4 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

III.5 Flambement des plaques FGM sous température uniforme :

La température initiale de la plaque est supposée être T_i . Elle augmente uniformément jusqu'à atteindre une valeur finale T_f à laquelle la plaque entre en flambement. La variation de température s'exprime comme suit :

$$\Delta T = T_f - T_i. \quad (\text{III.25})$$

Pour déterminer les charges de flambement thermique, le déterminant de la matrice des coefficients de l'équation (III.21) doit être nul. Cette condition permet d'obtenir la charge critique de flambement thermique, notée ΔT_{cr}

III.6. Flambement des plaques FGM soumise à une variation de température graduée à travers l'épaisseur :

On suppose que la température à la surface supérieure est T_t et qu'elle varie selon une loi de puissance à travers l'épaisseur de la plaque pour atteindre une température T_b à la surface inférieure, à laquelle le flambement se produit. Dans ce cas, la distribution de la température à travers l'épaisseur est donnée par :

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma + T_t \quad (\text{III.26})$$

Où la différence de température de flambement est définie par $\Delta T = T_t - T_b$, et γ désigne l'indice de variation thermique, avec $0 < \gamma < \infty$. Il est à noter que $\gamma = 1$ correspond à une variation linéaire de la température à travers l'épaisseur, tandis qu'une valeur de $\gamma > 1$ indique une variation non linéaire. Comme dans le cas d'une charge uniforme, la variation critique de température de flambement ΔT_{cr} est déterminée en résolvant le système d'équations (III.21).

III.3. Conclusion :

Dans ce chapitre, l'analyse du flambement thermique des plaques FGM (fonctionnellement graduées) simplement appuyées est étudiée à l'aide d'une théorie raffinée à quatre variables. Cette théorie permet de satisfaire les conditions de nullité des contraintes de cisaillement aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque FGM.

Chapitre III : Analyse d'une plaque poreuse sous l'effet double thermique et flambement

On suppose que les propriétés du matériau varient uniquement selon l'épaisseur de la plaque FGM, conformément à une distribution basée sur la loi de mélange. Les équations de stabilité de la plaque FGM sont dérivées à l'aide du principe de l'énergie des travaux virtuels.

Les solutions, exprimées sous forme de charges critiques de flambement, sont obtenues pour les cas de chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire, en résolvant le système d'équations (III.21).

CHAPITRE IV : VALIDATION ET COMPARAISON DES RESULTATS

IV.1 Introduction :

Le chapitre III est consacré à l'élaboration d'une méthode de calcul approché des grandeurs généralisées, fondée sur le système d'équations d'équilibre, de compatibilité ainsi que sur les conditions aux limites imposées sur les bords. Sur cette base, les solutions des équations de stabilité sont obtenues en résolvant les équations aux valeurs propres (équation III.21).

Dans le présent chapitre, plusieurs exemples numériques sont présentés et analysés afin de vérifier la validité de la théorie actuelle (RTSDPT) dans la prédiction du comportement thermique des plaques FGM simplement appuyées. Ces exemples reposent sur différentes formes de fonctions de gauchissement, permettant, d'une part, de prendre en compte l'effet du cisaillement transverse, et d'autre part, d'approximer la distribution de ce dernier selon l'épaisseur de la plaque.

Pour la plaque en FGM Les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont :

- Céramique (P_1 , alumine, Al_2O_3) $E_c = 380GPa$, $\nu = 0.3$,
 $\alpha_c = 7.4 \cdot 10^{-6} / ^\circ C$
- Métal (P_2 , Aluminium, Al) $E_m = 380GPa$, $\nu = 0.3$, $\alpha_m = 23 \cdot 10^{-6} / ^\circ C$

IV.2. Validation des résultats des charges critiques :

Dans cette section, divers exemples numériques sont présentés et analysés afin d'évaluer la précision et l'efficacité de la théorie proposée pour prédire la température critique de flambement des plaques FGM simplement appuyées, soumises à des chargements thermiques uniformes, linéaires et non linéaires à travers l'épaisseur. À des fins de validation, les résultats obtenus à l'aide de la théorie de plaque raffinée à quatre variables (RTSDPT) sont comparés aux données disponibles dans la littérature.

On considère que la plaque FGM est constituée d'un mélange d'alumine et d'aluminium, et que le module d'Young ainsi que le coefficient de dilatation thermique suivent une loi de puissance caractéristique des matériaux P-FGM. Dans le cas d'une distribution de température linéaire ou non linéaire à travers l'épaisseur, la température atteint son maximum à la surface enrichie en métal de la plaque (c'est à dire, $T_m = 5^\circ C$).

Afin de valider la théorie actuelle (RTSDPT), les résultats obtenus pour les plaques FGM ont été comparés à ceux issus de travaux antérieurs, notamment la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation par cisaillement parabolique (PSDPT) et la théorie de déformation par cisaillement sinusoïdal (SSDPT), comme présenté dans le tableau IV.1.

Tableau IV.1 : Hypothèses cinématiques pour différentes théories de plaques

Théories	Hypothèses de déplacements tri dimensionnels
CPT	$U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}$ $V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y},$
SSDPT	$U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi_x(x, y),$ $V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi_y(x, y),$ $W(x, y, z) = w(x, y).$
PSDPT	$U(x, y, z) = u(x, y) + z \phi_x(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$ $V(x, y, z) = v(x, y) + z \phi_y(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right),$ $W(x, y, z) = w(x, y).$
RTSDPT	$U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + \left[z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \frac{\partial w_s}{\partial x}$ $V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + \left[z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \frac{\partial w_s}{\partial y}$ $W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$

Les tableaux IV.2 et IV.3 présentent les résultats de l'analyse du flambement des plaques soumises à un chargement thermique uniforme. Ils comparent les températures critiques de flambement obtenues par la théorie actuelle RTSDPT avec celles issues des théories d'ordre supérieur PSDPT et SSDPT, ainsi que de la théorie classique des plaques (CPT).

Les résultats obtenus avec la présente théorie montrent une très bonne concordance avec ceux des théories PSDPT et SSDPT, tant pour les plaques FGM minces que pour les plaques épaisses.

Le tableau IV.2 montre que la température critique de flambement augmente avec l'augmentation du rapport a/b et diminue lorsque l'indice de la loi de puissance p varie de 0 à 10.

Tableau IV.2 : Variation des températures critiques de flambement de la plaque FGM soumise à un chargement thermique uniforme, en fonction de différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance p et du rapport (a/b) avec $a/h = 100$.

P	Théories	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$	$a/b=5$
0	CPT	17.09	42.75	85.49	145.34	222.29
	PSDPT	17.08	42.68	85.25	144.64	220.66
	SSDPT	17.08	42.68	85.25	144.65	220.67
	RTSDPT	17.08	42.69	85.25	144.65	220.67
1	CPT	7.94	19.86	39.72	67.52	103.27
	PSDPT	7.94	19.83	39.62	67.25	102.63
	SSDPT	7.94	19.83	39.62	67.25	102.63
	RTSDPT	7.94	19.84	39.62	67.25	102.64
5	CPT	7.27	18.16	36.33	61.76	94.45
	PSDPT	7.26	18.13	36.20	61.39	93.60
	SSDPT	7.26	18.13	36.20	61.39	93.60
	RTSDPT	7.26	18.13	36.20	61.39	93.60
10	CPT	7.47	18.67	37.35	63.49	97.10
	PSDPT	7.46	18.63	37.20	63.06	96.12
	SSDPT	7.46	18.63	37.20	63.06	96.11
	RTSDPT	7.46	18.64	37.20	63.07	96.12

Le tableau IV.3 montre que la température critique de flambement diminue avec l'augmentation du rapport de dimensionnement a/h ainsi que de l'indice de la loi de puissance p , variant de 0 à 10. Il est également observé que les températures de flambement des plaques homogènes ($p = 0$) sont nettement plus élevées que celles des plaques FGM ($p > 0$), en particulier pour les plaques plus longues et plus épaisses. Par ailleurs, les températures critiques obtenues à partir de la théorie classique des plaques (CPT) sont supérieures à celles fournies par les théories de

déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Ces écarts deviennent particulièrement significatifs pour les plaques à grande élancement ou de forte épaisseur.

TableauIV.3 Variation des températures critiques de flambement d'une plaque carrée en FGM soumise à un chargement thermique uniforme, pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance p et du rapport (a/h) .

	Théories	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 40$	$a/h = 60$	$a/h = 80$	$a/h = 100$
	CPT	1709.91	427.48	106.87	47.50	26.72	17.10
	PSDPT	1617.48	421.52	106.49	47.42	26.69	17.08
	RTSDPT	1618.82	421.54	106.49	47.42	26.69	17.089
	CPT	794.38	198.59	49.65	22.07	12.41	7.94
	PSDPT	757.89	196.26	49.50	22.03	12.40	7.94
	RTSDPT	758.45	196.27	49.50	22.04	22.04	7.94
	CPT	726.57	181.64	45.41	20.18	11.35	7.27
	PSDPT	678.92	178.53	45.21	20.14	11.34	7.26
	RTSDPT	678.95	178.50	45.21	20.14	11.34	7.26
	CPT	746.93	186.73	46.68	20.75	11.67	7.47
	PSDPT	692.52	183.14	46.45	20.70	11.65	7.46
	RTSDPT	692.54	183.13	46.45	20.70	11.66	7.46

Les tableaux IV.4 et IV.5 présentent les résultats de l'analyse du flambement d'une plaque soumise à une variation linéaire de température à travers son épaisseur. Il est observé que les résultats obtenus à partir de la théorie actuelle sont en excellent accord avec ceux fournis par les méthodes PSDPT et SSDPT

Il en ressort que la température critique de flambement augmente avec le rapport a/b diminue avec l'augmentation de l'indice de la loi de puissance (p), et décroît également avec l'augmentation du rapport de dimensionnement a/h . Par ailleurs, les températures de flambement des plaques homogènes sont nettement plus élevées que celles prédites par la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Ces écarts sont particulièrement significatifs dans le cas des plaques longues et épaisses.

Tableau IV.4 : Variation des températures critiques de flambement d'une plaque à matériau à gradient fonctionnel (FGM) soumise à un gradient thermique linéaire, en fonction de l'indice de la loi de puissance p et du rapport (a / b) avec $a / h = 100$

P	Théories	a/b=1	a/b=2	a/b=3	a/b=4	a/b=5
0	CPT	24.20	75.50	160.99	280.68	434.58
	PSDPT	24.17	75.37	160.50	279.29	431.33
	SSDPT	24.17	75.37	160.51	279.30	431.34
	RTSDPT	24.18	75.38	160.51	279.30	431.35
1	CPT	5.52	27.87	65.11	117.26	184.30
	PSDPT	5.51	27.82	64.93	116.74	183.11
	SSDPT	5.51	27.82	64.93	116.74	183.11
	RTSDPT	5.51	27.82	64.94	116.75	183.11
5	CPT	3.90	22.66	53.93	97.70	153.98
	PSDPT	3.89	22.60	53.71	97.07	152.51
	SSDPT	3.89	22.60	53.70	97.06	152.50
	RTSDPT	3.89	22.60	53.70	97.07	152.50
10	CPT	4.38	24.23	57.32	103.65	163.21
	PSDPT	4.36	24.16	57.06	102.90	161.47
	SSDPT	4.36	24.16	57.06	102.89	161.46
	RTSDPT	4.37	24.16	57.06	102.90	161.47

Tableau IV.5 : Variation des températures critiques de flambement d'une plaque carrée en matériau à gradient fonctionnel (FGM) soumise à un gradient thermique linéaire, en fonction de l'indice de la loi de puissance p et du rapport (a / h) .

P	Théories	$a / h = 10$	$a / h = 20$	$a / h = 40$	$a / h = 60$	$a / h = 80$	$a / h = 100$
0	CPT	3409.82	844.96	203.74	84.99	43.43	24.20
	PSDPT	3224.96	833.03	202.98	84.84	43.38	24.17
	RTSDPT	3227.64	833.09	202.99	84.85	43.39	24.18
1	CPT	1480.45	363.08	83.77	32.01	13.90	5.52
	PSDPT	1412.02	358.69	83.46	31.95	13.88	5.51
	RTSDPT	1413.07	358.72	83.46	31.95	13.88	5.51
5	CPT	1242.04	304.05	69.56	26.13	10.93	3.90
	PSDPT	1160.02	298.69	69.21	26.06	10.91	3.89

	RTSDPT	1160.06	298.66	69.22	26.07	10.91	3.89
10	CPT	1314.74	322.04	73.86	27.91	11.82	4.38
	PSDPT	1218.32	315.67	73.46	27.82	11.79	4.36
	RTSDPT	1218.37	315.66	73.46	27.83	11.80	4.37

Par conséquent, pour obtenir des résultats précis dans le cas des plaques FGM épaisses, il est essentiel de prendre en compte les effets de déformation par cisaillement transverse, en recourant aux théories de déformation de cisaillement. Il convient de souligner que la théorie proposée ne comporte que quatre inconnues, contre cinq pour les théories PSDPT et SSDPT. On peut en conclure que la théorie actuelle se distingue non seulement par sa précision, mais également par sa simplicité, ce qui la rend efficace pour la prédiction de la température critique de flambement des plaques FGM.

Les tableaux IV.6 et IV.7 présentent les variations de la température critique de flambement pour différentes valeurs du rapport de forme, de l'indice thermique et de l'indice de puissance p , sous un chargement thermique non linéaire. L'indice de non-linéarité thermique γ est fixé respectivement à 2, 5 et 10. À la lumière des résultats obtenus, il apparaît que la théorie proposée RTSDPT permet d'estimer avec une meilleure précision la température critique de flambement, en comparaison avec la théorie de déformation au cisaillement d'ordre supérieur.

Tableau IV. 6 : Variation des températures critiques de flambement de la plaque FGM sous chargement de température non linéaire pour différents valeurs d'indice de loi de puissance p et du rapport (a/b) et l'indice de température γ avec $a/h = 10$.

P	Théories	$a/b = 1$			$a/b = 2$			$a/b = 3$		
		$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$
0	CPT	5.11	10.23	18.75	12.81	25.62	46.97	25.63	51.27	93.99
	PSDPT	4.84	9.68	17.75	11.22	22.45	41.16	20.00	40.01	73.35
	SSDPT	4.84	9.68	17.75	11.22	22.45	41.17	20.01	40.03	73.39
	RTSDPT	4.84	9.68	17.75	11.23	22.46	41.17	20.02	40.03	73.39
1	CPT	2.21	4.52	8.58	5.54	11.35	21.53	11.09	22.74	43.12
	PSDPT	2.11	4.31	8.19	4.95	10.14	19.24	8.96	18.38	34.86
	SSDPT	2.11	4.31	8.19	4.95	10.14	19.25	8.96	18.38	34.86
	RTSDPT	2.11	4.32	8.19	4.95	10.15	19.25	8.97	18.39	34.88
5	CPT	1.71	3.05	5.35	4.29	7.66	13.44	8.59	15.33	26.91
	PSDPT	1.59	2.85	5.00	3.65	6.52	11.44	6.37	11.38	19.97
	SSDPT	1.59	2.85	4.99	3.64	6.51	11.43	6.36	11.36	19.93
	RTSDPT	1.60	2.85	4.999	3.65	6.51	11.43	6.36	11.36	19.94
10	CPT	1.81	3.11	5.15	4.54	7.81	12.93	9.10	15.65	25.88
	PSDPT	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.54	11.25	18.61
	SSDPT	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.53	11.24	18.60
	RTSDPT	1.68	2.88	4.77	3.80	6.53	10.80	6.54	11.24	18.60

L'effet de p sur la température critique de flambement est similaire à celui observé dans les cas de distributions de température uniforme et linéaire à travers l'épaisseur. Lorsque l'indice de la loi puissance p augmente, la température critique de flambement diminue initialement, atteignant ainsi des valeurs plus faibles, avant d'augmenter de nouveau — à l'exception des plaques rectangulaires pour certaines valeurs spécifiques de p

On observe également, à partir des tableaux IV.6 et IV.7, que la température critique de flambement T_{cr} augmente avec l'augmentation du paramètre de non-linéarité thermique γ . De manière générale, les valeurs de la température critique obtenues à l'aide des théories de déformation au cisaillement sont inférieures à celles fournies par la théorie classique des plaques, ce qui met en évidence l'influence significative des effets de cisaillement sur le comportement de flambement.

Tableau IV. 7 : Variation des températures critiques de flambement de la plaque FGM sous chargement de température non linéaire pour différents valeurs d'indice de loi de puissance p et le rapport (a/b) et l'indice de température γ avec $a/h = 5$.

P	Théories	a/b=1			a/b=2			a/b=3		
		$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$
0	CPT	20.50	41.00	75.18	51.28	102.56	188.04	102.58	205.16	376.13
	PSDPT	16.73	33.47	61.36	32.86	65.72	120.49	48.53	97.07	177.97
	SSDPT	16.74	33.48	61.38	32.89	65.79	120.62	48.65	97.30	178.39
	RTSDPT	16.74	33.48	61.39	120.63	65.80	120.63	48.65	97.31	178.40
1	CPT	8.87	18.18	34.49	22.20	45.50	86.30	44.41	91.03	172.66
	PSDPT	7.45	15.28	28.98	15.08	30.90	58.62	22.92	46.98	89.11
	SSDPT	7.45	15.28	28.99	15.09	30.93	58.68	22.97	46.08	89.30
	RTSDPT	7.46	15.29	28.997	15.09	30.94	58.68	22.97	47.084	89.31
5	CPT	6.87	12.26	21.52	17.19	30.69	53.86	34.39	61.40	107.75
	PSDPT	5.37	9.59	16.83	10.16	18.15	31.85	14.52	25.93	45.51
	SSDPT	5.37	9.59	16.83	10.16	18.15	31.85	14.52	25.93	45.51
	RTSDPT	5.37	9.59	16.81	10.14	18.11	31.78	14.49	25.87	45.41
10	CPT	7.27	12.51	20.70	18.20	31.32	51.80	36.42	62.65	103.64
	PSDPT	5.54	9.53	15.76	10.24	17.62	29.15	14.34	24.68	40.82
	SSDPT	5.53	9.52	15.75	10.23	17.61	29.13	14.35	24.69	40.85
	RTSDPT	5.54	9.53	15.76	10.24	17.61	29.14	14.36	24.70	40.86

La figure IV.1 illustre la variation de la température critique de flambement t_{cr} en fonction du rapport (a/b) d'aspect de la plaque FGM, pour différentes valeurs de l'indice de gradient du matériau p , sous trois types de chargement thermique : uniforme, linéaire et non linéaire.

D'après cette figure on remarque que lorsque le rapport de la plaque (a/b) augmente, la température critique de flambement augmente de façon constante, quel que soit l'indice de gradient du matériau p .

On constate également que la température critique de flambement d'une plaque entièrement en céramique est supérieure à celle d'une plaque entièrement métallique. Cette différence s'explique par la meilleure résistance thermique du matériau céramique par rapport au métal. En ce qui concerne les plaques à gradient de matériau (FGM), la température critique de flambement t_{cr} diminue à mesure que la fraction volumique de métal augmente dans la composition du matériau.

Les figures IV.2 et IV.3 présentent la variation de la température critique de flambement t_{cr} en fonction du rapport d'aspect (a/b) et du rapport épaisseur-longueur (a/h) de la plaque FGM, sous différents types de chargement thermique. Il ressort de ces figures que, quel que soit le type de chargement thermique appliqué et la valeur de l'indice de la loi de puissance p , la température critique de flambement diminue avec l'augmentation du rapport d'aspect (a/b), et elle décroît également lorsque le rapport (a/h) diminue. Par ailleurs, les températures critiques observées pour les plaques entièrement en céramique sont plus élevées que celles des plaques FGM, en raison de la meilleure résistance thermique des matériaux céramiques comparée à celle des métaux.

On observe aussi que la différence entre les types de chargement thermique diminue avec l'augmentation du rapport (a/h) qui rend la plaque FGM très mince.

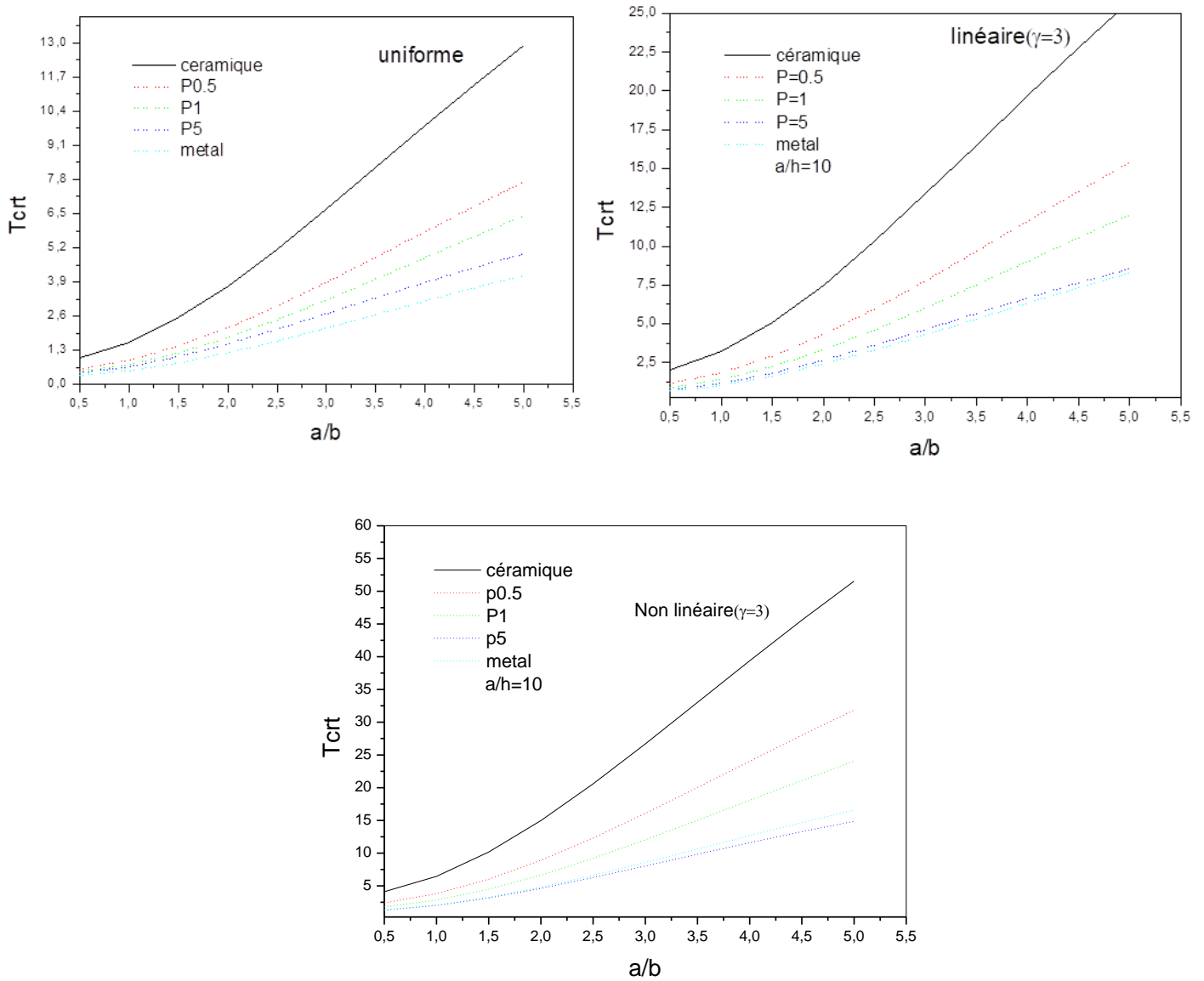


Figure IV.1 : Variation des températures critiques de flambement t_{cr} en fonction du rapport (a/b) de la plaque FGM pour différentes valeurs d'indice de gradient du matériau p sous chargement thermique uniforme, linéaires et non linéaires.

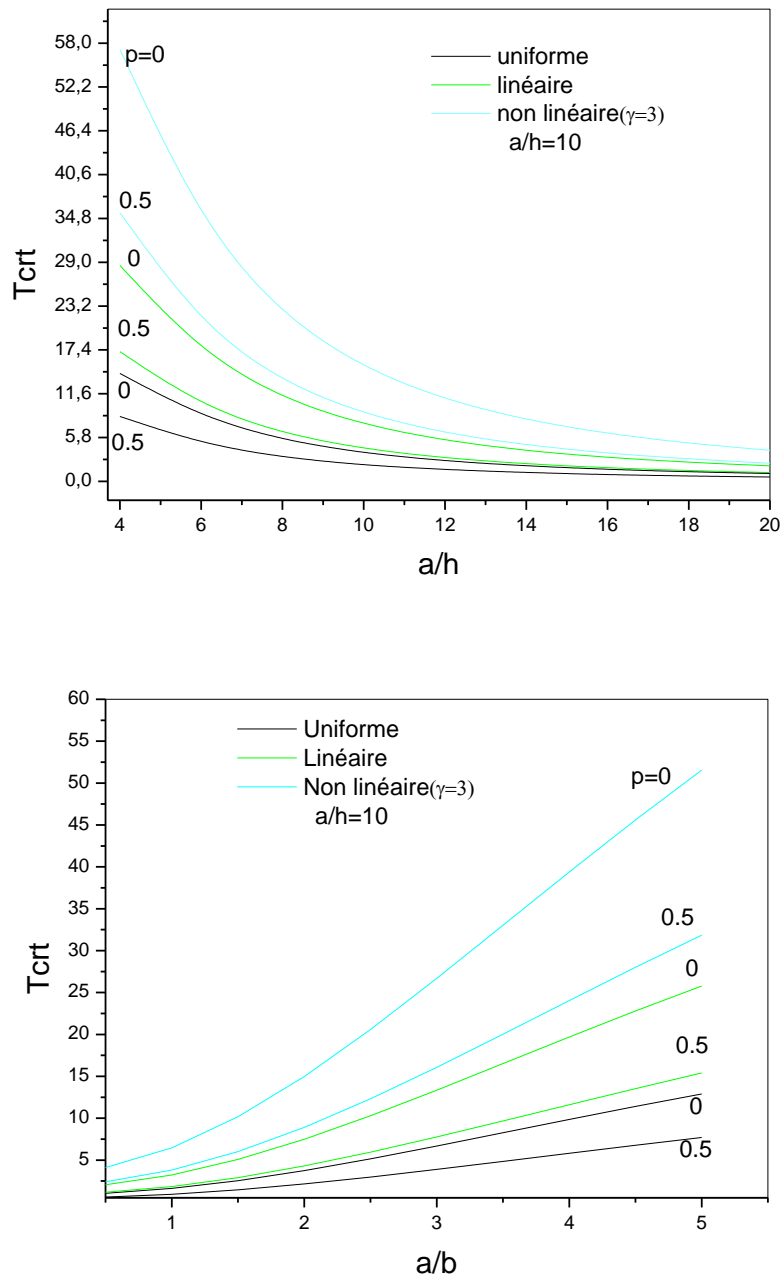


Figure IV .2 : Variation des températures critiques de flambement en fonction du rapport (a / b) suivant l'épaisseur de la plaque FGM sous chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire.

Figure IV .3 : Variation des températures critiques de flambement en fonction du rapport (a/h) suivant l'épaisseur de la plaque FGM sous chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire.

IV .3.Conclusion :

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats numériques relatifs à l'analyse du flambement thermique des plaques à gradient de matériau (FGM) soumises à des chargements thermiques uniformes, linéaires et non linéaires, en utilisant une théorie d'ordre élevé à quatre variables. Une nouvelle théorie de plaques déformables au cisaillement, désignée RTSDPT, est employée avec une fonction de forme innovante afin de modéliser le comportement de flambement des plaques FGM. Cette théorie se distingue par un nombre réduit de variables par rapport aux théories classiques de déformation par cisaillement, qu'elles soient de premier ordre ou d'ordre supérieur. Elle intègre explicitement les effets du cisaillement transversal ainsi que la distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. La précision et l'efficacité de cette approche ont été validées par la comparaison des résultats obtenus avec ceux issus de la théorie classique, ainsi qu'avec les théories d'ordre supérieur PSDPT et SSDPT.

En conclusion, la théorie RTSDPT proposée s'avère à la fois précise et simple pour l'analyse du comportement de flambement des plaques FGM soumises à différents types de chargements thermiques.

Conclusion
générale

Conclusion Générale

Dans ce travail, nous avons étudié le comportement thermo-mécanique des plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FGM), en tenant compte à la fois de la porosité du matériau et de la variation de la raideur de la fondation. L'objectif principal était de développer un modèle analytique capable de prédire avec précision l'effet de ces paramètres sur la stabilité et les vibrations des structures FGM soumises à un gradient thermique.

Nous avons tout d'abord présenté une revue détaillée des matériaux FGM, en abordant leur origine, leurs propriétés matérielles et thermiques, ainsi que les différentes lois de mélange et techniques de fabrication. L'analyse a également mis en évidence l'impact de la porosité comme facteur influent sur les performances mécaniques, posant un double défi entre légèreté structurelle et affaiblissement localisé.

Ensuite, une étude bibliographique approfondie a permis de comparer les différentes théories de modélisation utilisées pour l'analyse des structures FGM, notamment les approches monocouche équivalente et multicouche, ainsi que les modèles de fondation élastique de Winkler et Pasternak.

Sur le plan théorique, nous avons développé un modèle basé sur une théorie de cisaillement d'ordre supérieur, permettant de prendre en compte les effets combinés de la porosité et du double gradient thermique. Les équations d'équilibre ont été formulées à l'aide du principe de Hamilton, et les solutions ont été obtenues analytiquement par la méthode de Navier.

Les résultats obtenus ont été validés par comparaison avec des données issues de la littérature, et une analyse paramétrique a permis de mettre en évidence les effets sensibles de la distribution de porosité et de la variabilité de la raideur de la fondation sur le flambement critique et les fréquences propres de vibration.

Ainsi, ce travail met en lumière l'importance d'une modélisation précise des plaques FGM poreuses reposant sur des fondations non homogènes, et ouvre des perspectives pour l'optimisation de telles structures dans des environnements thermomécaniques sévères.

Référence bibliographique

- [1] M. Koizumi, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, 1992.
- [2] K. Kokini., Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36, 1990.
- [3] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192,1986.
- [4] Koizumi. M, FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21. Japan,1997.
- [5] T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, 2007.
- [6] H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9,1991.
- [7] Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2):81–106, 2003.
- [8] Houari MSA, Analyse des contraintes thermoélastique: lois des puissances. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbès, Algérie, 2011.
- [9] G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [10] P. M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380 1957.
- [11] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- [12] Apalak MK, Gunes R. Thermal residual stress analysis of Ni-Al₂O₃, Ni-TiO₂, and Ti-SiC functionally graded composite plates subjected to various thermal fields. *J Thermoplast Compos Mater*;18:119–52.2005.
- [13] Yang J, Shen HS. Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *Int J Non Linear Mech*; 38:467–82.2003.
- [14] Matsunaga H. Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings. *Compos Struct* ;87:344–57. 2009.

Référence bibliographique

- [15] Shen HS. Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature dependent properties. *Int J Solids Struct*; 41:1961–74. 2004.
- [16] Noda N. Thermal stresses in functionally graded materials. *J Therm Stress*; 22:477–512. 1999.
- [17] Noda N, Ootao Y, Tanigawa Y. Transient thermoelastic analysis for a functionally graded circular disk with piecewise power law. *J Theor Appl Mech*; 50:831–9.2012.
- [18] Jin ZH. An asymptotic solution of temperature field in a strip a functionally graded material. *Int Commun Heat Mass Transf* ; 29:887–95.2002.
- [19] X. Jin, L. Wu, L. Guo, H. Yu, and Y. Sun, “Experimental investigation of the mixed-mode crack propagation in ZrO₂/NiCr functionally graded materials,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 76(12), pp.1800-1810, 2009.
- [20] Torii S., Tanaka S., Yano, T., Watanabe, Y., *J Trans. Phenomena*, 6 189, 2004.
- [21] Yeo J, Jung Y., Choi S., Zirconia-stainless steel functionally graded material by tape casting *J Europ. Ceram. Soci.* 18 1281, 1998.
- [22] Mishina H., Inumaru Y., Kaitoku K., Fabrication of ZrO₂/AISI316L functionally graded materials for joint prostheses *Mat. Sci. & Eng. A* 475 141,2008.
- [23] El-wazery M., El-Desouky A., *J Appl. Fabrication and Characteristics of 8YSZ/Ni Functionally Graded Materials by Applying Spark Plasma Sintering Procedure Sci. & Eng.* 12 313, 2014.
- [24] A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.
- [25] Xiong, H.-P., Kawasaki, A., Kang, Y.-S., and Watanabe, R., “Experimental Study of Heat Insulation Performance of Functionally Graded Metal / Ceramic Coatings and Their Behavior at High Surface Temperature,” *Surf. Coat. Technol.*, vol.194, pp. 203–214.
- [26] Xiong H., Kawasaki A., Kang Y., Watanabe R .Synthesis and characterization of in-situ reinforced Fe-TiC steel FGMs, *Surf & Coat. Technol.* 194 203, 2005.
- [27] L. Lostec, Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l’université de Limoges, 1997.

Référence bibliographique

- [28] M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya, Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Graded Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 129-34, 1990.
- [29] H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Graded Materials-FGM'90 Sendai-Japan; 139-43, 1990.
- [30] L. Marin, “Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two dimensional functionally graded materials,” *Int J Solids Struct*, vol. 42, pp. 4338-4351, 2005.
- [31] S. Matsuo, F. Watari, and N. Ohata, “Fabrication of functionally graded dental composite resin post and core by laser lithography and finite element analysis of its stress relaxation effect on tooth root,” *Dental Mater J*, vol.20(4), pp. 257–274, 2001.
- [32] L. Lu, M. Chekroun, O. Abraham, V. Maupin and G. Villain, “Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer, *NDT & E International*, Volume 44, Issue 2, Pages 169-177, March 2011.
- [33] M. S. EL-Wazery, A. R. EL-Desouky, “A review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials *Mater. Environ. Sci.* 6 (5) 1369-1376. ISSN: 2028-2508,2015.
- [34] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I. (2015). *A refined quasi-3D theory for free vibration analysis of functionally graded beams with porosities*. *Steel and Composite Structures*, 18(2), 425–442.
- [35] Ait Yahia, S., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2015). *A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams with porosities*. *Steel and Composite Structures*, 19(2), 369–384.
- [36] Ayache, A., Hadji, L., Tounsi, A. (2018). *A new quasi-3D shear deformation theory for wave propagation in functionally graded beams with porosity*. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 17(3), 535–550.
- [37] Bennai, A., Hadji, L., Tounsi, A., Bedia, E.A. (2015). *A refined theory for bending analysis of functionally graded plates resting on elastic foundation*. *Alexandria Engineering Journal*, 54(4), 775–785.
- [38] Fourn, B., Mechab, I., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2018). *A new higher order shear deformation theory for functionally graded beams with porosity effect*. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 15(3), e26.

Référence bibliographique

- [39] Reddy, J.N. (1999). *Theory and Analysis of Elastic Plates*. Taylor & Francis, Philadelphia
- [40] Noor, A.K. (1989). Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Applied Mechanics Reviews*, 42(1), 1–12.
- [41] Carrera, E. (2000). An assessment of mixed and classical theories for multilayered plates. *Composite Structures*, 50, 183–198.
- [42] Carlos, I. (1999). Three-dimensional stress analysis of functionally graded plates. [Mentioned in ESL model limitations]
- [43] Timoshenko, S.P. (1959). *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York.
- [44] Reddy, J.N. (1997). *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton.
- [45] Reddy, J.N. (1999). *Theory and Analysis of Elastic Plates*. Taylor & Francis.
- [46] Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12, 69–77.
- [47] Mindlin, R.D. (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18, 31–38.
- [48] Hildebrand, F.B., Reissner, E., & Thomas, G.B. (1949). Notes on the theory of small displacements of orthotropic shells. NASA TN-1833.
- [49] Naghdi, P.M. (1957). On the theory of thin elastic shells. *Quarterly of Applied Mathematics*, 14, 369–380.
- [50] Reissner, E. (1975). On transverse bending of plates, including effects of shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 25(5), 495–502.
- [51] Reddy, J.N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51(4), 745–752.
- [52] Kant, T., & Swaminathan, K. (2002). Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates. *Composite Structures*, 56(4), 329–344.
- [53] Chabot, A. (1997). Analyse des plaques stratifiées par éléments finis: théorie des couches. [Thèse]

Référence bibliographique

- [54] Afaq, K.S. (2003). Zig-zag models for functionally graded materials. *Composite Structures*.
- [55] Di Sciuva, M. (1987). A zig-zag model for laminated plates. *Composite Structures*.
- [56] Nguyen, V.T. (2004). Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques. Thèse de doctorat, ENPC.
- [57] Karama, M. (1998). Refined models for the analysis of composite structures. *Composite Structures*.
- [58] Ossadzow, M. (2001). Gradient mechanical properties in composite materials. [Reference context]
- [59] Touratier, M. (1991). An efficient standard plate theory. *Engineering Structures*, 29(12), 901–916.
- [60] Delfosse, D., Kunzi, H.U., & Ilshner, B. (1992). Experimental determination of residual stresses in graded materials. *Acta Metallurgica*, 40, 2219–2224.
- [61] Rabin, B.H., et al. (1998). Residual strains in alumina joints bonded with graded interlayers: experimental and FEM analysis. *Journal of the American Ceramic Society*, 81, 1541–1549.
- [62] Giannakopoulos, A.E., Suresh, S., Finot, M., & Olsson, M. (1995). Elastoplastic analysis of thermal cycling in graded materials. *Acta Metallurgica et Materialia*, 43(4), 1335–1354.
- [63] Grujicic, M., & Zhao, H. (1998). Optimization of FGM for reduction of thermal residual stresses. *Materials Science and Engineering A*, 252, 117–132.
- [64] Abualnour, A.M. (2015). Thermal and mechanical residual stresses in FGM coatings. [Scientific article]
- [65] Jamaludin, S.N.S. (2013). Review on fabrication techniques of functionally graded ceramic composites. [Journal article]
- [66] Noda, N. (1991). Thermal stress in materials with temperature-dependent properties. *Applied Mechanics Reviews*, 44, 383–397.
- [67] Tanigawa, Y. (1995). Basic thermoplastic problems for nonhomogeneous structural materials. *Applied Mechanics Reviews*, 48, 377–389.

Référence bibliographique

- [68] Praveen, G.N., & Reddy, J.N. (1998). Nonlinear transient thermoelastic analysis of FGM plates. *International Journal of Solids and Structures*, 35(33), 4457–4476.
- [69] Larson, K. (2008). Refined finite element models for composite analysis. [Thesis or article]
- [70] Hosseini Kordkheili, S.A., & Naghdabadi, R. (2007). Nonlinear thermoelastic analysis of FG shells using FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72, 964–986.
- [71] Zhou, D. (2011). Thermoelastic analysis of FGM rectangular plates. [Journal article]
- [72] Shen, H.S. (2002). Postbuckling analysis of FG cylindrical shells in thermal environments. *Composite Science and*
- [73] Timoshenko, S.P., & Gere, J.M. (1961). *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, New York.
- [74] Vaz, M.A., & Bianchini, P.L. (2016). Thermomechanical postbuckling of Timoshenko beams. *Journal of Thermal Stresses*, 39(1), 44–56.
- [75] Woo, J., Meguid, S.A., & Liew, K.M. (2003). Thermomechanical postbuckling of FGM plates. *Acta Mechanica*, 165, 99–115.
- [76] Ozturk, M., & Erdogan, F. (1996). Axisymmetric crack problem in graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33, 193–219.
- [77] Li, X.F., & Fan, T.Y. (2007). Crack dynamics in FGMs between elastic layers. *Composite Structures*, 79, 211–219.
- [78] Zhu, H. (2004). Elastic analysis of simply supported FGM beams. [Journal article]
- [79] Loy, C.T., Lam, K.Y., & Reddy, J.N. (1999). Vibration of functionally graded cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, 41(3), 309–324.
- [80] Yang, J. (2001). Dynamic response of functionally graded plates. [Journal article]
- [81] Ramirez, F. (2006). Three-dimensional static analysis of FGM plates using discrete-layer theory. [Journal article]