

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de RELIZANE
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département: Génie civil et travaux publics



جامعة غليزان
RELIZANE UNIVERSITY

MEMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de MASTER en :
Voies et ouvrages d'art

Intitulé

Etude du comportement statique et dynamique et du flambement des
plaques épaisses en FGM

Présentée par:

Mlle : Beldjilali Sabrina

Mlle : Cheikh ben cheikh Nour el houda

Devant les membres de jury :

Président : Mr.Chemmam Mohamed

MCA.Maître de conférence (B)A(U. Relizane)

Examineur : Mr. Zine Abdallah

.MCA .Maître de conférence (B) A (U. Relizane)

Examineur : Mr. Safer Omar.

MCA. Maitre de conférence (B) A (U.Relizane)

En cadreur : Mr. SEKKAL Mohamed.

MCA. Maitre de conférence (B) A (U.Relizane)

Année universitaire :2024/2025

Dédicace

JE dédie ce modeste travail à:

Nos chers parents et nos frères, en témoignage de leur amour inconditionnel, de leur soutien indéfectible et des précieux sacrifices consentis tout au long de notre parcours. Cet accomplissement n'aurait jamais été possible sans eux.

À nos fidèles amis, pour leur présence constante, leurs encouragements sincères et leur patience, qui nous ont apporté un soutien inestimable.

À nos professeurs et encadrants respectés, pour leur accompagnement précieux, leurs conseils éclairés et leur bienveillance exigeante, qui nous ont permis de grandir, d'évoluer et de progresser.

Cheikh ben cheikh nour el houda.
Beldjilali sabrina.

Remerciements

Nous remercions ALLAH qui nous a donné la force et la patience pour terminer ce travail.

Nous exprimons nos sincères remerciements :

A nos parents pour leur contribution pour chaque travail que nous avons effectué.

A notre encadreur **SEKKAL.MOHAMED** pour les orientations et les conseils qu'il a su nous prodiguer durant l'évolution de mon projet.

Que tous les membres du jury trouvent ici l'expression de nos profonds respects pour avoir pris la peine d'examiner le manuscrit.

Mes remerciements vont également à tous ceux qui de près ou de loin nous ont apportés aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

Résumé :

Dans ce travail on présente une théorie hyperbolique de déformation de cisaillement pour l'analyse des plaques fonctionnellement graduée.

Dans cette théorie, les contraintes de cisaillement transversales sont distribuées d'une façon hyperbolique à travers l'épaisseur tout en satisfaisant les conditions de la nullité de la contrainte de cisaillement dans la surface supérieur et inférieur de la plaque. En considérant l'hypothèse supplémentaire, la présente théorie contient seulement quatre inconnues et par conséquent, le nombre d'équations de mouvement est réduit.

Les équations de mouvement sont déterminées à partir du principe d'Hamilton et la solution analytique de Navier est utilisée pour des plaques simplement appuyées. Les propriétés matériels sont distribuées d'une façon continue à travers l'épaisseur de la plaque selon une loi de puissance ; sigmoïde ou exponentielle.

Les résultats numériques sont présentés dans ce travail pour montrer les effets de la composition matérielle et des rapports géométriques sur les flèches, la charge critique du flambement et les fréquences naturelles.

Mots-clés :

Plaques fonctionnellement graduées – flexion – flambement- vibration.

Abstract

This paper presents a new higher-order hyperbolic shear deformation theory for analysis of functionally graded plates. In this theory, the transverse shear stresses account for a hyperbolic distribution and satisfy the free-traction boundary conditions on the top and bottom surfaces of the plate. By making a further assumption, the present theory contains only four unknowns and its governing equations is therefore reduced. Equations of motion are derived from Hamilton's principle and Navier-type analytical solutions for simply-supported plates are compared with the existing solutions to verify the validity of the developed theory. The material properties are continuously varied through the plate thickness by the power-law and exponential form. Numerical results are obtained to investigate the effects of the power-law index and side-to-thickness ratio on the deflections, stresses, critical buckling load and natural frequencies.

Keywords :

Functionally graded plates -Bending -Buckling –Vibration.

ملخص

في هذا المشروع نقدم نظرية القطعي من تشوه القص لتحليل لوحات متدرج وظيفيا. في هذه النظرية، توزع الضغوط مستعرضة بطريقة القطعي عبر سمك حين استيفاء شروط الإنعدام من إجهاد القص في السطح العلوي والسفلي من لوحة. وبالنظر إلى فرضية إضافية، النظرية الحالية تحتوي على أربعة مجاهيل فقط ، وبالتالي يتم تقليل عدد من معادلات الحركة . يتم تحديد معادلات الحركة من حيث المبدأ هاميلتون والحل التحليلي للنافي يستخدم. في لوحات المدعومة ببساطة خصائص المواد يتم توزيعها بطريقة مستمرة من خلال سمك لوحة وفقا لقانون السيني أو الأسي . النتائج الرقمية التي قدمت في هذا العمل لإظهار الآثار المترتبة على تركيب المواد نسب هندسية على الأسهم، والحمل الحرج من التواء والترددات الطبيعية.

كلمات البحث:

لوحات متدرج وظيفيا - الانحناء - اهتزاز - التواء .

Table des matières

TABLE DES MATIERS

Résumé	I	
Abstract	II	
ملخص	III	
Table des matières		
Liste des figures		
Liste des tableaux		
Liste des notations		
Introduction générale	01	
 Chapitre I Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés		
I.1	Introduction	03
I.2	Concept des matériaux à gradient de propriétés	03
I.3	Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés	06
I.4	Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés	08
I.4.1	Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)	08
I.4.2	Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)	09
I.4.3	Compaction sèche des Poudres	09
I.4.4	Projection plasma	09
I.4.5	Frittage et Infiltration	10
I.5	Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés	10
I.6	Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	11
I.6.1	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	13

I.6.2	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	13
I.6.3	Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM	15
I.7	Conclusion	15

Chapitre II THEORIE DES PLAQUES

II.1	Introduction	16
II.2	Les modèles analytiques des plaques FGM	16
II.2.1	La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	16
II.2.2	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	17
II.2.3	La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	18
II.3	Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé	20

Chapitre III Formulations théoriques

III.1	Introduction	24
III.2	Equations constitutives	24
III.3	Equation de mouvement	26
III.4	Solution de Navier pour des plaques rectangulaires simplement appuyée	29
III.5	Solution analytique	29

Chapitre IV Résultats Et Discussion

IV.1	Introduction	31
	Conclusion générale	38
	Références bibliographiques	

Liste des figures

Liste des figures

CHAPITRE I

Figure I.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.	05
Figure I.2 : Protection thermique.	06
Figure I.3 : Principe de la méthode coulage en bande [Lostec, 1997].	08
Figure I.4 : Les principaux domaines d'application des FGM.	11
Figure I.5 : Géométrie d'une plaque en FGM.	12
Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.	13
Figure I.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.	14
Figure I.8 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.	15

CHAPITRE II

Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy, 1997].	17
Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy, 1997].	18
Figure II.3 : Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy, 1997].	19

CHAPITRE III

Figure III.1 : Plaque FGM reposant sur une fondation élastique	25
---	----

CHAPITRE IV

Figure IV.1 : L'effet de l'indice matériel « p » sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho c h / D_c}$) de plaque P-FG sans la fondation élastique ($K_0=K_1=0$)	35
Figure IV.2 : L'effet de l'indice matériel « p » sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho c h / D_c}$) de plaques P-FG posées sur une fondation élastique a) $K_1=10$, b) $K_0=100$.	36
Figure (IV- 3b) : L'effet du paramètre matériel « γ » sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho_m h / D_m}$) de plaques E-FG posées sur une fondation élastique a) $K_1=10$, b) $K_0=100$.	37

Liste des tableaux

Liste des tableaux

CHAPITRE I

Tableau I.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	04
---	----

CHAPITRE II

Tableau II.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM	23
--	----

CHAPITRE IV

Tableau IV.1 : Comparaison des six premières fréquences naturelles des plaques FG rectangulaires Al/Al_2O_3	$\Omega = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$	33
--	---	----

Tableau IV.2 : comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ isotrope plaque carrée	34
---	----

Tableau (IV-3) : Comparaison de la flèche non-dimensionnelle (w) des plaques carrée E-FGM (Al/Al ₂ O ₃)	35
---	----

Tableau (IV-4) : Comparaison de la flèche non-dimensionnelle (w) des plaques carrée S-FGM (Al/Al ₂ O ₃)	36
---	----

Tableau (IV-5) : la comparaison de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle(B) des plaques Carrées P-FGM (Al/ZrO ₂)c	37
---	----

Tableau (IV-6) : comparaison des trois premières fréquences fondamentales (ω) des plaques carrée P-FGM (Al/Al ₂ O ₃)	38
---	----

Tableau (IV-7) : Fréquences naturelles non-dimensionnelles (ω) des plaques carrées P-FGM (Al/Al ₂ O ₃)	39
---	----

Tableau (IV-8) : comparaison de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle () des plaques carrée S-FGM (Al/ZrO ₂)	40
---	----

Tableau (IV-9) : comparaison des trois premières fréquences fondamentales (ω) des plaques carrée S-FGM (Al/Al ₂ O ₃)	41
---	----

Tableau (IV-10) : comparaison de la charge critique du flambement (N_{cr}) des plaques carrées P-FGM (Al/SiC) ($a/h=10$) 42

Tableau (IV-11) : Comparaison de la charge critique du flambement (N_{cr}) des plaques P-FGM (Al/Al₂O₃) 43

Tableau (IV-12) : comparaison de la charge critique du flambement (N_{cr}) des plaques carrées S-FGM (Al/SiC) ($a/h=10$) 44

Introduction Général

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM S) : sont des matériaux composites avancés où les compositions matériels varient selon une performance exigée. Ils sont produits par une variation graduelle et continue des fractions volumiques des constituants (Koizumi. 1997) , les FGMS sont ainsi appropriés pour plusieurs applications, telle que :les barrières thermiques ,les turbines à gas ,les réacteurs nucléaires, optique, biomédicale , génie civil, mécanique Etc

Dans ces dernières années ; plusieurs structures plaques ont été utilisées dans les domaines d'engineering et cela a avancé, le développement de différentes théories de plaque afin de prédire correctement les comportements en flexion ; en flambement et en vibration des plaques FG (Jha et al .2013). La théorie classique des plaques (CPT) connue comme la théorie la plus simple, néglige l'effet de déformation de cisaillement transversale (Feldman et Aboudi (1997) ; Javaheri et Eslami (2002) ;Mahdavian (2009) ;Mohammadi et al (2010) ; Chen et al 2006 ;Befarani et al 2011). Cette théorie (CPT)donne des résultats convenables seulement pour les plaques minces .Pour des plaques épaisses et modérément épaisses , la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) a été utilisée par différents chercheurs (Praveen et Reddy 1998 ;Croce et Venini 2004 ; Efraim et Eisenberger .2007 ;Zhao et al . 2009a,b ;Hosseini-Hashemi et al. 2011 ;Naderi et Saidi 2010) .Dans une telle approche

PP

,les déplacements axiaux sont variés linéairement à travers l'épaisseur et n'exigent pas un facteur de correction de cisaillement pour corriger la variation irréelle des contraintes et déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur . Afin de contourner le problème rencontré dans la (FSDT) (théorie de 1er ordre), les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDTS) avec des variations d'ordre supérieur des déplacements ont été développées pour les plaques FG (Reddy .2000 ;Pradyumna et Bandyopadhyay .2008 ;Jha et al .2013 ;Neves et al .2012,2012,2013 ;Reddy 2011 ;Talha et Singh.. 2010 ;Zenkour .2006,2013 ; Chen et al. 2009; Mantari et Soares. 2012, 2013;Matsunaga .2008; Thai .2013) .Ces théories peuvent prédire d'une façon plus exacte les comportements

des plaques FGS épaisses et modérément épaisses, et aucun facteur de correction n'est exigé . Cependant, certain HSDTs ont un temps de calcul couteux à cause du nombre de variables additionnelles introduites dans ces théories (Pradyumna and Bandyopadhyay 2008; Jha et al. 2013; Neves et al. 2012, 2012, 2013 Reddy 2011; Talha and Singh. 2010). Par conséquent, une théorie simple de déformation de cisaillement

d'ordre élevé est nécessaire à développer dans ce mémoire.

Le but de ce travail est de développer une théorie simple de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse de la flexion statique ,de la vibration libre et du flambement des plaques FGs .En considérant une hypothèse supplémentaire au théorie existante de déformation de cisaillement d'ordre élevé , la théorie proposée aura seulement quatre inconnues et ces équations de mouvement sont par conséquent réduites . Le principe d'Hamilton est utilisé pour déterminer les équations de mouvement et les solutions analytiques de type Navier pour des plaques simplement appuyée sont comparées avec les solutions existantes afin de vérifier la validité de la théorie développée. Les propriétés matérielles sont variées d'une façon continue à travers l'épaisseur de la plaque selon une loi de puissance, exponentielle, sigmoïde .Les résultats numériques sont obtenus pour examiner les effets de l'indice matériel et du rapport géométrique sur la flèche, la charge critique du flambement, les fréquences naturelles

Chapitre I

Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés

I.1. Introduction :

De nombreux milieux naturels présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques. Les tissus vivants, la croûte terrestre, les océans ou encore l'os cortical en font partie. Tirant leur inspiration de la Nature qui les entoure, les scientifiques (chercheurs et ingénieurs), se sont penchés sur les avantages que présentent ce type de matériaux en terme de comportement mécanique et c'est ainsi que l'on vit apparaître, dans les années 1980, les matériaux à gradients de propriétés (Functionally Graded Materials « FGM »). Ils permettent par exemple de reproduire les propriétés structurales et matérielles des tissus biologiques tels que l'os à différentes étapes de son évolution (croissance, vieillissement ou pathologie).

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont considérés comme des matériaux composites, produits par un changement non interrompu de leurs fractions volumiques dans la direction de leur épaisseur. Ce type de matériau a récemment suscité un grand intérêt de la communauté scientifique, en raison des avantages qu'il offre, par la diminution de la disparité dans les propriétés réduisant ainsi les contraintes thermiques [Zhong, 2007]. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également leurs applications dans le domaine de la biomédicale [Baron, 2008].

I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés :

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont souvent soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux constituant les parois de ces pièces doivent être capables de supporter sur une dizaine de millimètres un chargement thermique induit par des températures d'atmosphère environnant les 1800°C. Il n'y a aucun matériaux monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique [Koizumi, 1992].

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face

exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes sollicitations thermiques et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les « FGM » sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kokini, 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Tableau I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les

propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch, 1986].

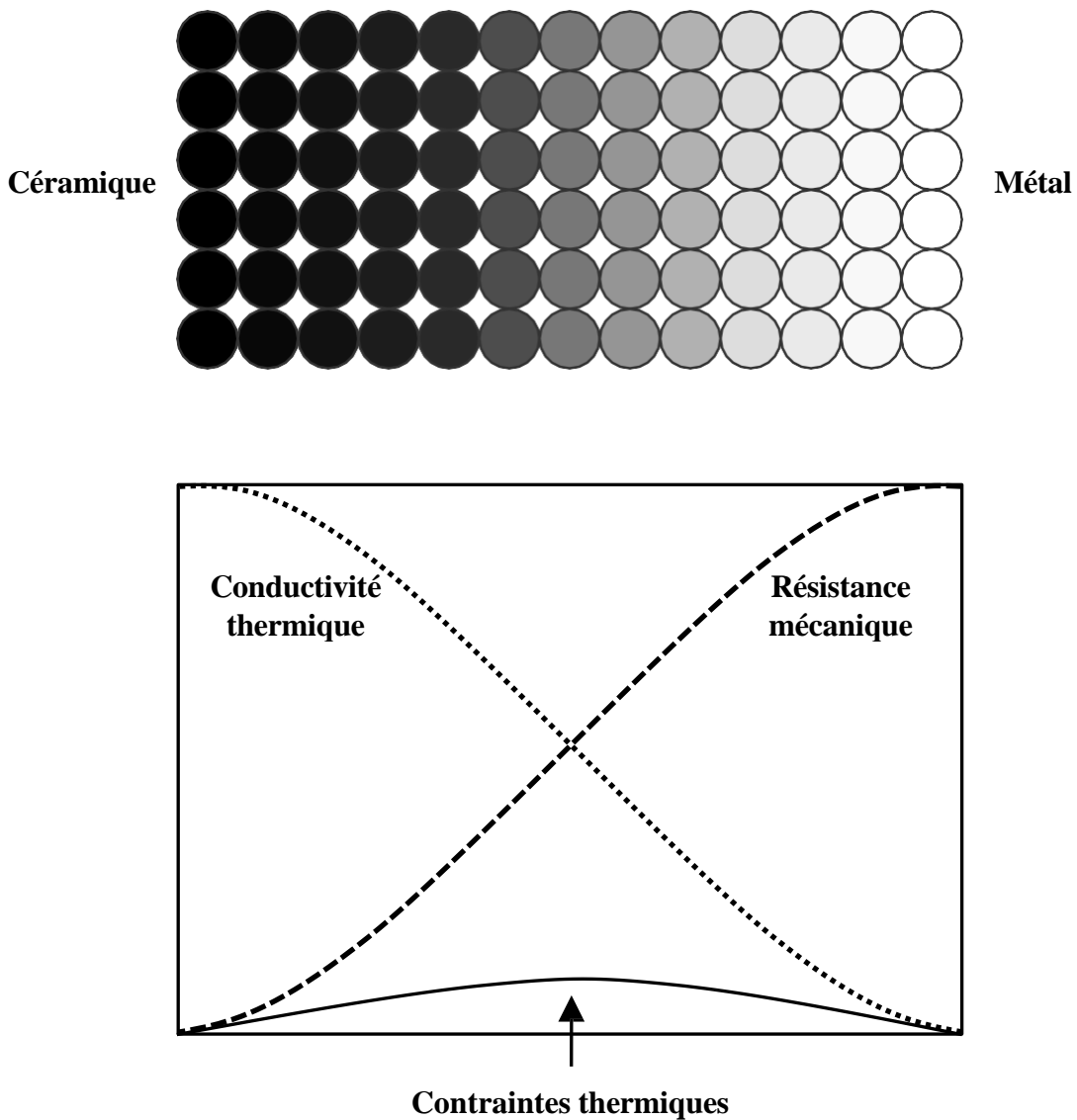


Figure I.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

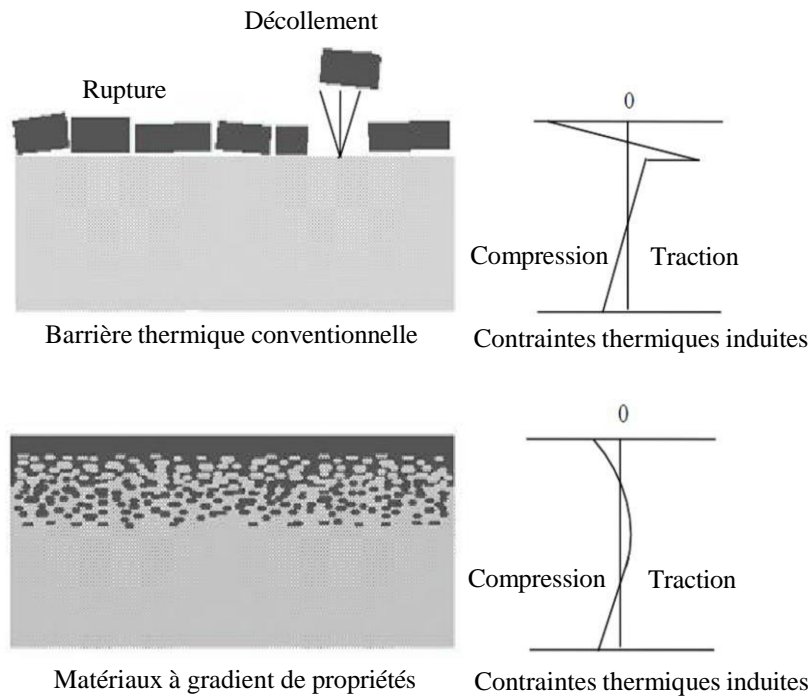


Figure I.2 : Protection thermique.

I.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés :

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Koizumi, 1992]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique [Koizumi, 1997]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, [Croce, 2004].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [Koizumi, 1997].

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un

gradient de température de l'ordre de 1300 °C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques [Koizumi, 1992].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température.
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des F.G.M a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [Okamura, 1991].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique, [Okamura, 1991].

Le concept des matériaux à gradient de propriétés tient son intérêt non seulement dans l'élaboration des nouveaux matériaux réfractaires performants pour leurs éventuelles utilisations dans le domaine aérospatial, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, employés dans les domaines de l'optique et de l'électronique. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en qualité de matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise développer la technologie des FGM dans le but d'améliorer leur efficacité énergétique pour des applications dans le nucléaire, photovoltaïque et thermoélectrique.

I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés :

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.3), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [Lostec, 1997]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

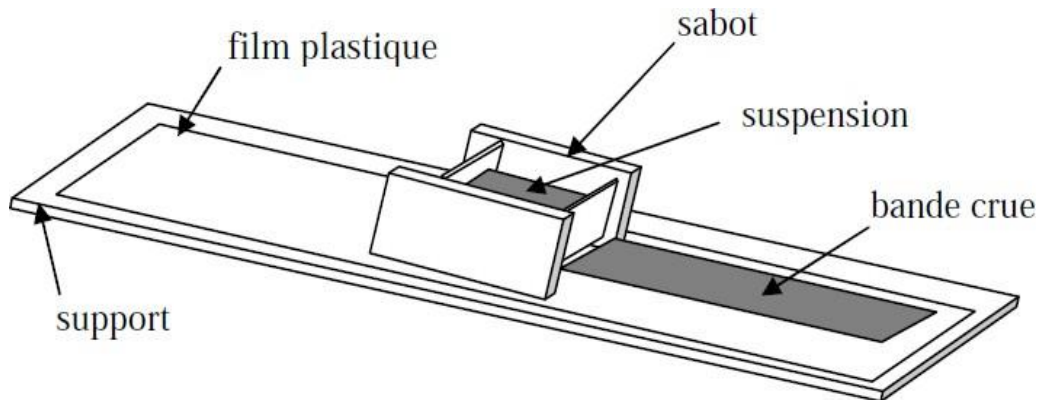


Figure I.3 : Principe de la méthode coulage en bande [Lostec, 1997].

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par

Mistler [Mistler, 1973] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [Boch, 1986].

I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) :

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise".
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique [Moya, 1992]).
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.4.3. Compaction sèche des Poudres :

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliant âge. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop, 1993].

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.4.4. Projection plasma :

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens, 1990].

1.4.5. Frittage et Infiltration :

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi, 1990].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

1.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés :

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.4. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

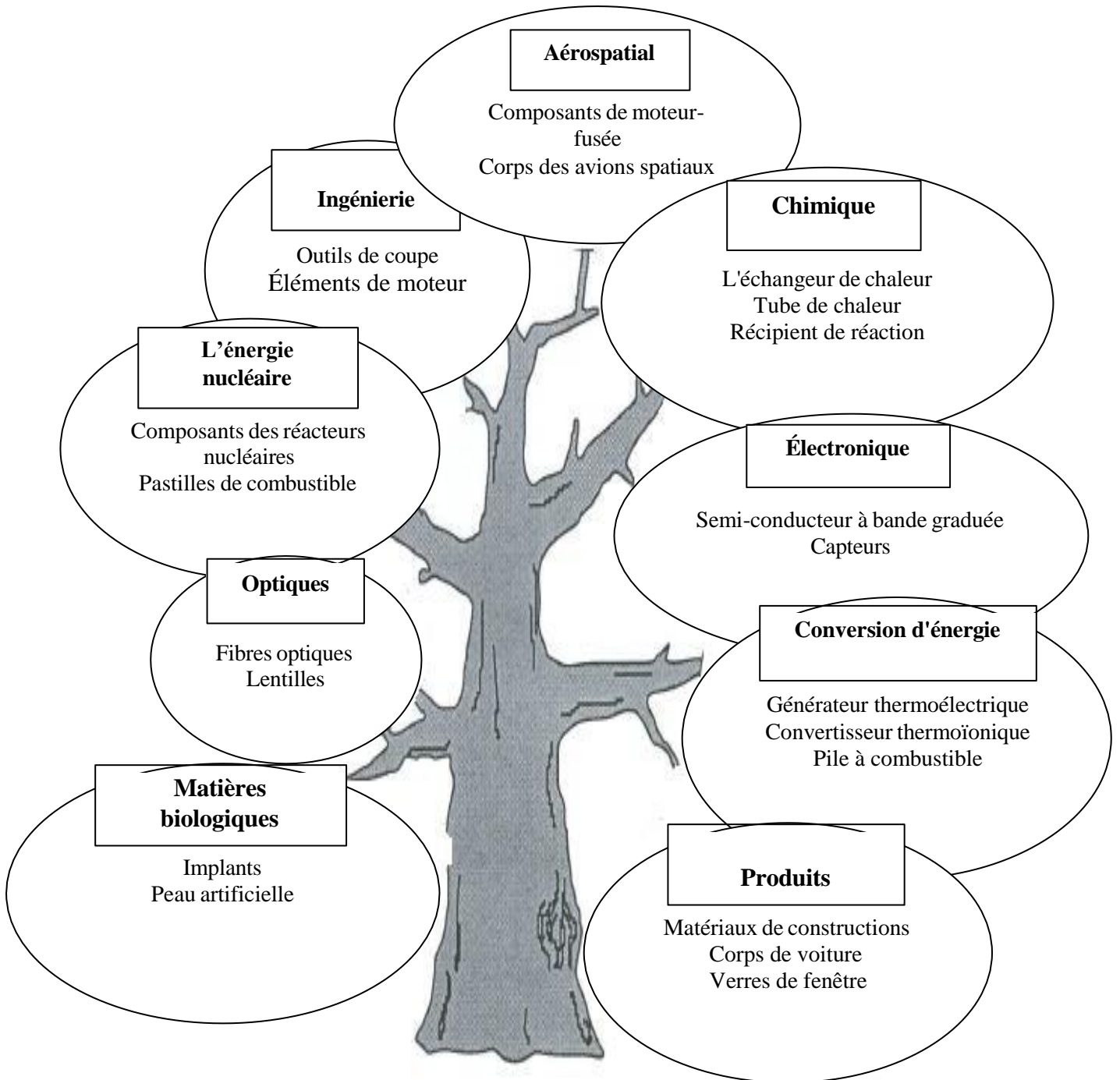


Figure I.4 : Les principaux domaines d'application des FGM.

I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

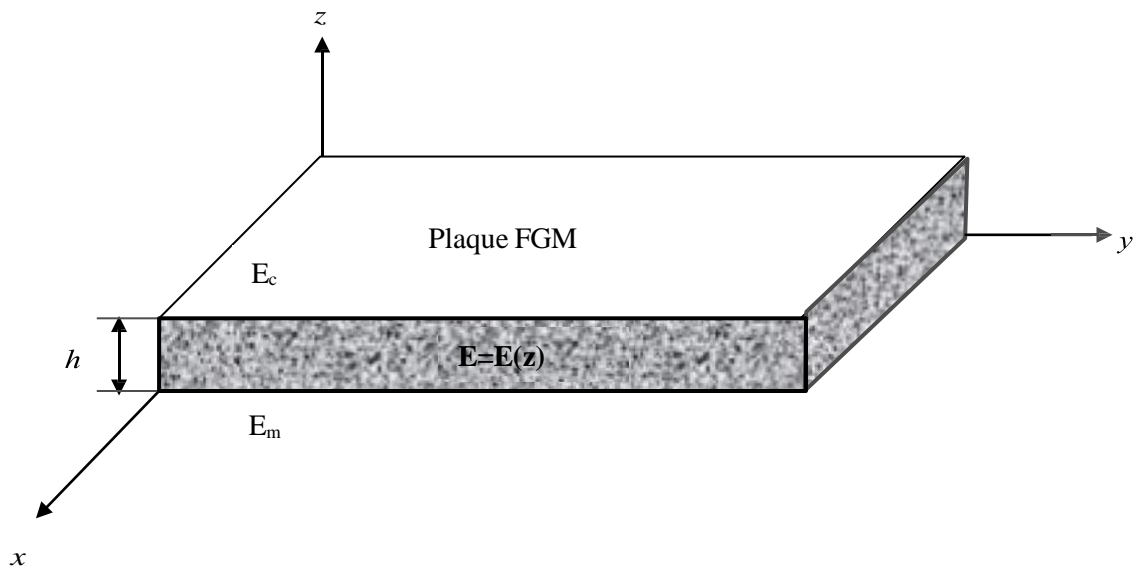


Figure I.5 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit: $E = E(z), \nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \tag{I.1}$$

Où p est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao, 1995] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \tag{I.2}$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h / 2$) et de la surface supérieure ($z = h / 2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.6, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

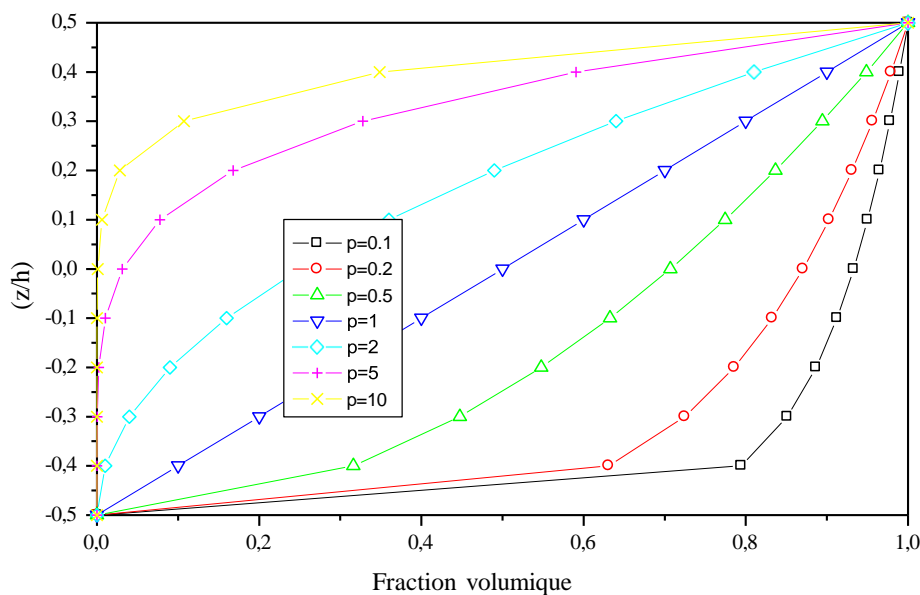


Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur

l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [Bao, 1995]. Par conséquent, Chung et chi [Shyang-ho, 2003] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_c + [1 - V_1(z)]E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_c + [1 - V_2(z)]E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.7 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

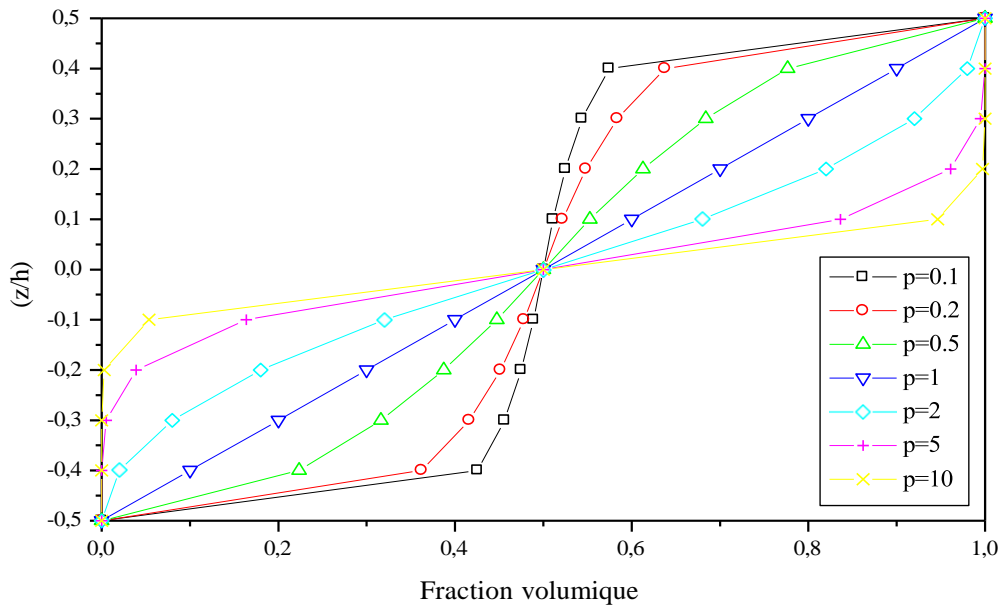


Figure I.7: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.6.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [Delale, 1983] :

$$E(z) = E_c e^{B(z+h/2)} \tag{I.5.a}$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_m}{E_c} \right) \tag{I.5.b}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.8.

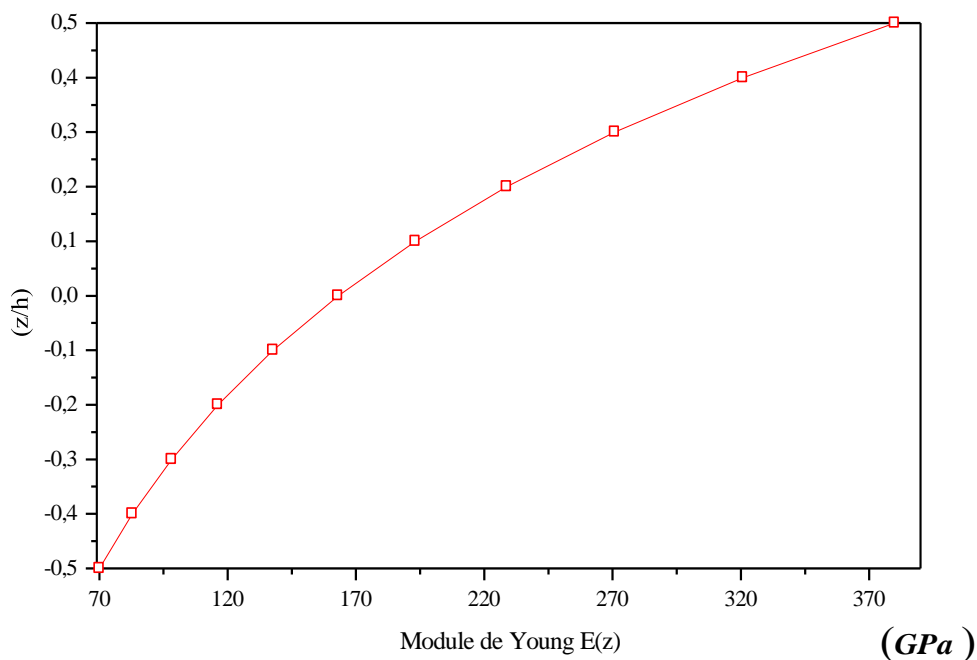


Figure I.8 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.7. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application à savoir les structures spéciales et de génie civil.

Chapitre II

THEORIE DES PLAQUES

Chapitre II : Théorie des plaques

II.1. Introduction :

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

II.2. Les modèles analytiques des plaques FGM :

II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) :

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko, 1959], [Reddy, 1997], [Reddy, 1999],

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.1.c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

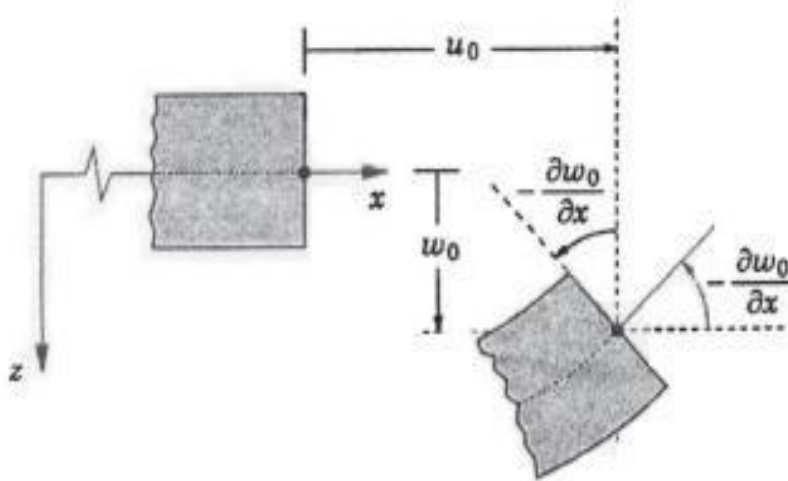


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy, 1997].

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

II.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans [Reissner, 1945],

[Mindlin, 1951] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko, 1959], [Reddy, 1997], [Reddy, 1999].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z\phi_y(x, y) \quad (\text{II.2.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z\phi_x(x, y) \quad (\text{II.2.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.2.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}; \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

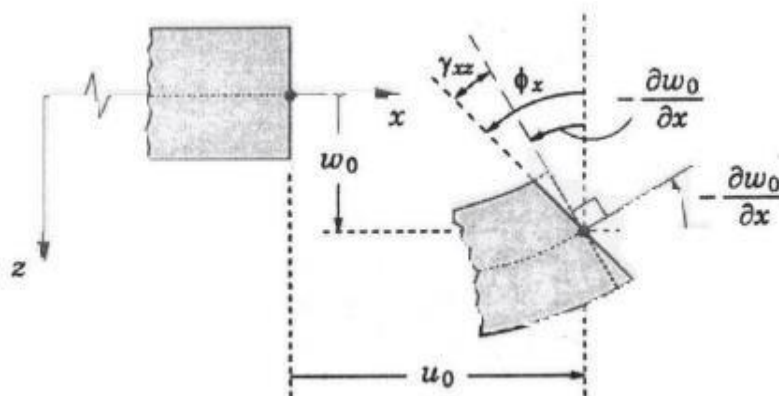


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy, 1997].

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale

transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [Hildebrand, 1949], [Naghdi, 1957], [Reissner, 1975], [Reddy, 1984], et [Kant, 2002]). Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

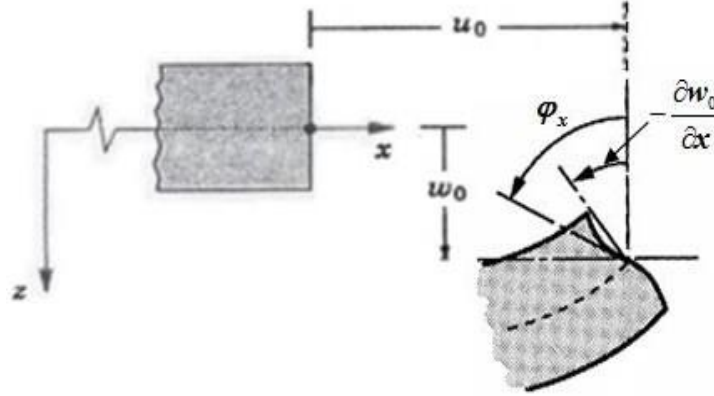


Figure II.3: Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy, 1997].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y) \quad (\text{II.3.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y) \quad (\text{II.3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.3.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement, $\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\Psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(z) = z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) [Reddy, 1997], [Reddy, 1999] sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

[Touratier, 1991] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al.

[Pindera, 1994] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ Et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.6})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par [Ait Atmane, 2010] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(\quad)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.7})$$

II.3. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $\psi(z)$. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans

la configuration déformée (Figure II.3) [Whitney, 1973] ; [Nelson, 1974] ; [Lo, 1977]; [Touratier, 1991]. Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan, 1969] avec ;

$$\psi(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.8})$$

- L'approche de Reissner [Reissner, 1945] avec ;

$$\psi(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.9})$$

- L'approche de Levinson, Murthy [Murthy, 1981] et Reddy Avec ;

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.10})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w , est constant [Reddy, 1984]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène [Duong, 2008].

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur (elle doit être parabolique par couche pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par [Kan, 2002].

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevés puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur [Touratier, 1991]. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{(2n+1)} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3! h^2} + \frac{\pi^4 z^4}{5! h^4} - \frac{\pi^6 z^6}{7! h^6} + \dots \dots \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par

rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy ,1984]. En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par [Polit, 1997] et [Dau, 2006].

Récemment, [Afaq et al, 2003] proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme Suivante:

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \tag{II.12}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) de [Touratier, 1991] ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes [Duong, 2008].

Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

<i>Théorie</i>	<i>intitulé</i>	<i>Fonction de cisaillement $\psi(z)$</i>	<i>Distribution de γ_{xz} et γ_{yz} suivant z</i>	<i>Coefficient de correction de cisaillement</i>	<i>Domaine de validité</i>
CPT.Kirchoff [Kirchoff, 1850a] et [Kirchoff, 1850b]	Théorie classique des plaques	0	Plaques minces
FSDT Midlin [Midlin, 1951]	Théorie de déformation des plques du 1er ordre	z	constante	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumian [Ambartsumian, 1958]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratiques	Non Requis	Plaques minces et moyennement épaisses

Reissner [Reissner, 1975]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4}z(1 - \frac{4z^2}{3h^2})$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
TSDPT, Touratier [Touratier, 1991]	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\Pi} \sin(\frac{\Pi z}{h})$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
ESDPT Karama et al. [Karama, 2003]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$ze^{-2(z/h)^2}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
PSDPT, Levinson [Levinson, 1980], Reddy [Reddy, 1984]	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z(1 - \frac{4z^2}{3h^2})$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Aydogdu [Aydogdu, 2009]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z\alpha^{-\frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha > 0$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Elmeiche, Tounsi et al. [Elmeiche, 2011]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{(\frac{h}{\Pi}) \sin(\frac{hz}{\Pi}) z}{\cosh(\frac{\Pi}{2}) - 1}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Aite atmane et al. [Aite atmane, 2010]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\cosh(\frac{\Pi}{2})}{\cosh(\frac{\Pi}{2}) - 1} z$ $-\frac{\frac{h}{\Pi} \sinh(\frac{\Pi z}{h})}{\cosh(\frac{\Pi}{2}) - 1}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi [Shimpi, 2002]	Théorie raffinée des plaques	$h[\frac{1}{4}(\frac{z}{h}) - \frac{5}{3}(\frac{z}{h})^3]$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses

Tableau II.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM

CHAPITRE III

FORMULATIONS THÉORIQUES

Chapitre III : Formulations théoriques

III.1. Introduction :

Considérons une plaque FG comme est montrée dans la figure (III-1) ayant une épaisseur h et longueur a et largeur b . La plaque FG est constituée par un mélange de céramique et de métal où les propriétés matérielles varient à travers l'épaisseur de la plaque selon des fractions volumiques des constituants.

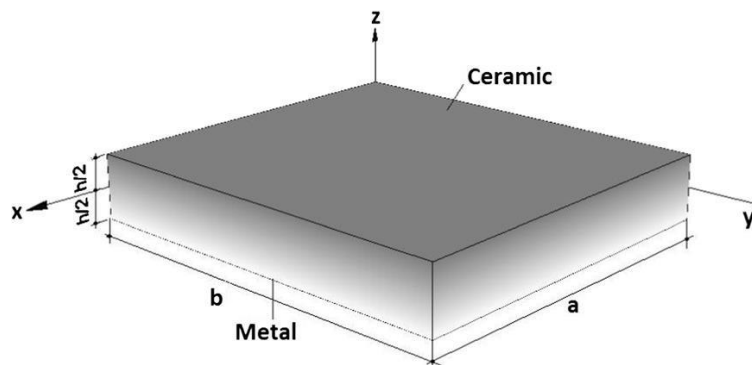


Figure (III-1) : La géométrie d'une plaque FGM

III.2. les propriétés matérielles effectives des plaques FG :

Les propriétés matérielles des (FGMs) peuvent être estimées par un modèle continu et un modèle discret. Le premier modèle suppose une distribution matérielle continue suivant la direction de l'épaisseur sans considération de la microstructure, alors que le deuxième modèle prend en compte la microstructure avec des géométries idéales. Pratiquement, dans les deux modèles, les plaques FG sont premièrement homogénéisées avec leurs modules effectifs tels que : le module de Young, coefficient de Poisson, la masse volumique ..., et ensuite leurs propriétés effectives sont obtenues à partir des théories des plaques homogènes. Le modèle continu est le plus utilisé pour étudier les (FGM), parmi ces modèles on peut citer l'approximation [Voigt Hill, 1952] qui est largement utilisée à cause de ses simplifications. Les travaux de [Reiter, 1997] et [Dvorak, 1998] ont montré que le modèle de Mori-Tanaka [Benveniste, 1987] est convenable pour l'estimation des propriétés matérielles effectives des (FGMs). En pratique, le modèle de Mori-Tanaka est plus compliqué

que le modèle de Voight .D'autres approximations des propriétés matérielles effectives peuvent être trouvées dans la référence de [Gasik ,1998] .Dans ce travail, les propriétés matérielles à travers l'épaisseur sont estimées par trois modèles d'homogénéisation :la forme de la loi de puissance ,la forme exponentielle ,la loi sigmoïde .Pour la forme de la loi de puissance ;les propriétés matérielles effectives des plaques FG sont exprimées par [Reddy ,2000] :

$$P(z) = (Pc - Pm)Vc + Pm \quad (III-1)$$

Où Pc et Pm sont le module de young (E), coefficient de poisson (ν) et la masse volumique (ρ) de céramique et de métal localisé respectivement au niveau de la surface supérieure et inférieure de la plaque. La fraction volumique Vc de la céramique est donnée comme suit :

$$Vc(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p \quad (III-2)$$

Où p est l'indice de loi de puissance ; qui est positif et $z \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$, la distribution de la matière céramique à travers l'épaisseur de la plaque est montrée dans la figure (III-2)

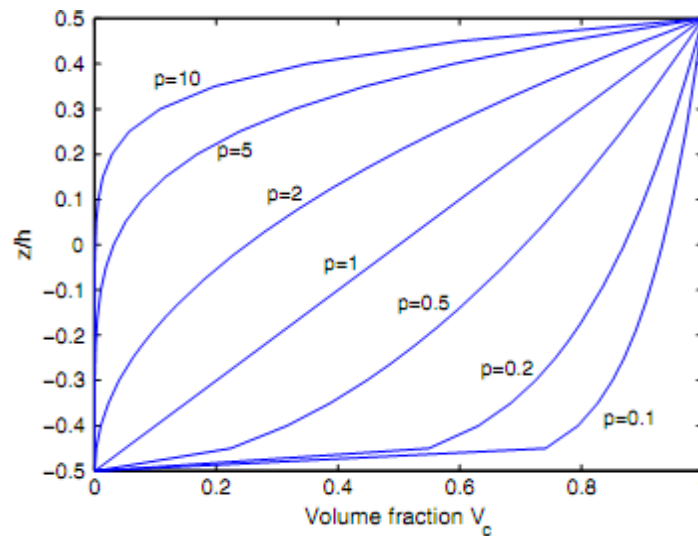


Figure (III-2) : La fraction volumique de la matière céramique

Dans le cas d'une forme sigmoïde (S-FGM), la fraction de volume de la céramique est supposée comme suit :

$$Vm(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z+h}{h}\right)^N & \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \\ \left(\frac{-2z+h}{h}\right)^N & \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \end{cases} \quad Vc(z) = 1 - Vm(z) \quad (III-3)$$

Les propriétés mécaniques seront déterminées dans ce cas, en remplaçant l'équation (III-3) dans l'équation(III-1) .

Dans certains cas ; le module de Young des plaques FG peut être directement calculé selon une loi exponentielle (Zenkour 2007) :

$$E(z) = E_0 e^{p(\frac{z}{h}+0.5)} \quad (III-4)$$

Où E_0 est le module de Young d'un matériau homogène .Pour l'analyse de la vibration, la masse volumique à un point z est variée selon une loi de puissance (équation(III-1))

III.3. Cinématique et déformation :

le champs de déplacement de la HSDT peut être exprimé :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \theta_y(x, y) \end{aligned} \quad (III-5)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

Où u_0 , v_0 , w_0 , θ_x , θ_y sont les déplacements inconnus au niveau de la surface médiane de la plaque ; $f(z)$ représente la fonction de forme définissant la distribution des contraintes et des déformations à travers l'épaisseur .en supposant que $\theta_x = \frac{-\partial \varphi(x,y)}{\partial x}$ et $\theta_y = \frac{-\partial \varphi(x,y)}{\partial y}$, le champs de déplacement de la présente théorie peut être réécrit d'une manière plus simple comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} - f(z) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} - f(z) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (III-6)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

Où la fonction de forme $f(z)$ est choisit selon Mahi et al (2015) .

$$f(z) = \frac{h}{\bar{z}} \tanh\left(2 \frac{z}{\bar{h}}\right) - \frac{4}{3 \cosh^2(1)} \left(\frac{z}{h}\right)^3 \quad (III-7)$$

Il peut être constaté que le champs de déplacement dans l'équation (III-6) contient seulement quatre inconnues (u_0 , v_0 , w_0 , φ). Le champs de déformation associe aux champs de déplacement de l'équation (III-6) exprimé :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (III-8)$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (III-9)$$

Et
$$g(z) = -\frac{df(z)}{dz} \quad (III-10)$$

Les relations linéaires constitutives des plaques FG_s sont exprimées par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (III-11)$$

Où (σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz}) et (ε_x , ε_y , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{xz}) sont respectivement les composantes des contraintes et des déformations.

Les coefficients de rigidité C_{ij} sont exprimés par :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, C_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (III-12)$$

III.4. Equations de mouvement:

Le Principe d'Hamilton est utilisé dans ce cas pour déterminer les équations de mouvement:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (III-13)$$

Où δU , δV , δK sont respectivement les variations de l'énergie de déformation, de travail des forces extérieures et l'énergie cinétique de la plaque. La variation de l'énergie de déformation est calculée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz \\ &= \int [N_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_{xx}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + M_{xx}^s \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_{yy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} - M_{yy}^s \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial y^2} + \\ &\quad N_{xy} (\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x}) - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x \partial y} + Q_x \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + Q_y \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y}] dA \end{aligned} \quad (\text{III-14})$$

Où M ,N ,Q sont les résultats des efforts définis par :

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (\text{III-15})$$

$$(M_{xx}^b, M_{yy}^b, M_{xy}^b) = \int_{-h/2}^{h/2} z (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (\text{III-16})$$

$$(M_{xx}^s, M_{yy}^s, M_{xy}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} f (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (\text{III-17})$$

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \quad (\text{III-18})$$

La variation du travail des forces extérieures est donnée par :

$$\delta V = - \int N \delta w_0 dA - \int q \delta w_0 dA \quad (\text{III-19a})$$

Où

$$N = N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (\text{III-19b})$$

La variation de l'énergie cinétique est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) \rho(z) dA dz \\ &= \int \{ I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) - I_1 (\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0) + \\ &\quad I_2 (\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y}) - J_1 (\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial y} \delta \dot{v}_0) + K_2 (\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\varphi}}{\partial x} + \\ &\quad \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\varphi}}{\partial y}) + J_2 (\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y}) \} dA \end{aligned} \quad (\text{III-20})$$

Où le symbole ‘.’ indique une dérivée par rapport à la variable temps, $\rho(z)$ est la masse volumique, et les termes d’inertie I_i, J_i, k_i sont exprimés par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (\text{III-21})$$

$$(J_1, J_2, k_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (f, zf, f^2) \rho(z) dz \quad (\text{III-22})$$

En substituant les équations 14, 19a et 20 dans 13 en intégrant par partie et en rassemblant les coefficients de $\partial u_0, \partial v_0, \partial w_0, \partial \varphi$ les équations de mouvement suivantes sont obtenues :

$$\delta u : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial x} \quad (\text{III-23a})$$

$$\delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial y} \quad (\text{III-23b})$$

$$\delta w : \frac{\partial^2 M_{xx}^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}^b}{\partial y^2} + N + q = I \ddot{w} + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w} - J_2 \nabla^2 \ddot{\varphi} \quad (\text{III-23c})$$

$$\delta \varphi : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w} - K_2 \nabla^2 \ddot{\varphi} \quad (\text{III-23d})$$

Où :

$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ est l’opérateur laplacien dans le système de coordonnées cartésiennes bidimensionnelles. En substituant l’équation (III-8) dans l’équation (III-11) et en remplaçant le résultat trouvé dans les équations (III-15), (III-16), (III-17), les efforts résultants sont obtenus en terme de déformation comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III-24})$$

$$Q = A^s \gamma \quad (\text{III-25})$$

Avec :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (\text{III-26a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad (\text{III-26b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{III-26c})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (III-26d)$$

$$S = \left\{ S_{xz}^s, S_{yz}^s \right\}^t, \quad \gamma = \left\{ \gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0 \right\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (III-26e)$$

Les composantes de déformation sont données par:

$$\left\{ \begin{matrix} A & B & D & B^s & D^s & H^s \\ A^{11} & B^{11} & D^{11} & B^{k1} & D^{k1} & H^{k1} \end{matrix} \right\} = {}^{h/2}C \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \nu \end{matrix} \right\} dz \quad (III-27a)$$

$$\left\{ \begin{matrix} A & B & D & B^s & D^s & H^s \\ A^{12} & B^{12} & D^{12} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{matrix} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \nu \end{matrix} \right\} dz \quad (III-27b)$$

$$\left(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s \right) = \left(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s \right) \quad (III-27b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)]^2 dz, \quad (III-27c)$$

En substituant les équations III -24 – et III-25- dans l'équation III -23-a , III -23-b , III -23-c , III -23-d

Les équations de mouvement peuvent être exprimées en terme de déplacement (u_0, v_0, w_0, φ) comme suit:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - B_{11}^s \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = I_{00} \ddot{u}_0 - I_{10} \frac{\partial w_0}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (III-28a)$$

$$A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^s \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = I_{00} \ddot{v}_0 - I_{10} \frac{\partial w_0}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (III-28b)$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\
 & - D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(D_{12} + 2D_{66} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \\
 & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} - \bar{N}(w) + q = I_0 \dot{w}''_0 \\
 & + I_1 \left(\frac{\partial u''_0}{\partial x} + \frac{\partial v''_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 w_0 - J_2 \nabla^2 \varphi''
 \end{aligned} \tag{III-28c}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}^s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
 & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \\
 & - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + A_{44}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + A_{55}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = J \left(\frac{\partial u''_0}{\partial x} + \frac{\partial v''_0}{\partial y} \right) \\
 & - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 - K_2 \nabla^2 \varphi''
 \end{aligned} \tag{III-28d}$$

III.5. Solution analytique pour des plaques FG simplement appuyées :

La solution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques pour des plaques simplement appuyées :

$$u_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^0 \cos \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \tag{III-29a}$$

$$v_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^0 \sin \lambda x \cos \mu y e^{i\omega t} \tag{III-29b}$$

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^0 \sin \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \tag{III-29c}$$

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}^0 \sin \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \tag{III-29d}$$

Où $\lambda = \frac{m\pi}{a}$, $\mu = \frac{n\pi}{b}$, ω est la fréquence de vibration libre de la plaque $\sqrt{t} = -1$ est l'imaginaire.

La charge transversale q est aussi développée en double série de Fourier comme suit :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y \tag{III-30}$$

Où $q_{mn} = q_0$ pour un changement sinusoïdale ($m=n=1$)

En supposant que la plaque est soumise à des charges axiales de compression

$$N_{xx}^0 = -N_0, \quad N_{yy}^0 = -\gamma N_0, \quad (\gamma \text{ est un paramètre non dimensionnel de charge}), \quad N_{xx}^0 = 0.$$

En substituant l'équation (III-29a),(III-29b),(III-29c),(III-29d)et l'équation (III-30) dans l'équation (III-28a) (III-28b) (III-28c) (III-28d) et rassemblant les déplacements et l'accélération pour n'importe quelle valeur de m et n , le problème suivant est obtenu :

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33+\alpha} & k_{34} & m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{mn}^0 \\ v_{mn}^0 \\ w_{mn}^0 \\ \gamma_{mn}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-31})$$

Où :

$$\begin{aligned} k_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\ k_{12} &= \lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\ k_{13} &= -B_{11}\lambda^3 - (B_{12} + 2B_{66})\lambda\mu^2 \\ k_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\ k_{14} &= -B_{11}^s \lambda^3 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2\lambda \\ k_{23} &= -B_{22}\mu^3 - (B_{12} + 2B_{22})\lambda^2\mu \\ k_{24} &= -B_{22}^s \mu^3 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2\mu \\ k_{33} &= D_{11}\lambda^4 + D_{22}\mu^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 \\ k_{34} &= D_{11}^s \lambda^4 + D_{22}^s \mu^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 \\ k_{44} &= H_{11}^s \lambda^4 + H_{22}^s \mu^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + A_{55}^s \lambda^2 + A_{44}^s \mu^2 \\ m_{11} &= m_{22} = I_0 m_{13} = -\lambda I_1 m_{14} = -\lambda J_1 m_{23} = -\mu I_1 m_{24} = -\mu J_1 \\ m_{33} &= I_0 + I_2(\lambda^2 + \mu^2) m_{34} = J_2(\lambda^2 + \mu^2) m_{44} = K_2(\lambda^2 + \mu^2) \\ \alpha &= -N_0(\lambda^2 + \gamma\mu^2) \end{aligned} \quad (\text{III-32})$$

L'équation (III-31) est la forme générale de l'analyse de la flexion, du flambement, la vibration libre des plaques FGs soumise à un chargement axial et transversal. Pour résoudre le problème de la flexion, la charge axiale de compression N_0 et la matrice masse $[M]$ sont annulées .Par contre, le problème de stabilité peut être effectué en annulant la matrice masse et la charge transversale .Et enfin, le problème de la vibration libre est solutionnée en annulant la charge transversale et la charge axiale.

CHAPITRE IV

RÉSULTATS ET DISCUSSION

Chapitre IV : Résultats Et Discussion

IV.1. introduction :

Considérons une plaque rectangulaire FG simplement appuyée avec les dimensions en plan a et b suivant les directions x et y respectivement (figure III -1-).

Les plaques FGs considérées dans cette étude sont composées de trois combinaisons de matériaux en métal et céramique : Al/ZrO₂, Al/Al₂O₃ et Al /SiC .Leurs propriétés matérielles sont données dans le tableau IV -1- .

Matériaux	Module de young (GPa)	Masse volumique (Kg /m ³)	coefficient de poisson
Aluminium (Al)	70	2,702	0.3
Zirconia (ZrO ₂)	151	3,000	0.3
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	3,800	0.3
Silicon carbide (SiC)	420	3,210	0.3

Tableau (IV-1) : Les propriétés matérielles de métal et céramique

Des exemples numérique sont analyses dans le but de vérifier l' exactitude de la présente théorie et d'examiner les influences de l'indice matériel et du rapport de dimension sur les flèches ,les contraintes , les fréquences naturelles et les charges critiques de flambement des plaques FGs .A par les cas mentionnés ,les propriétés matérielles effectives sont calculées par la loi de puissance (équation III.1).Pour l'interprétation des résultats, on a utilisé les paramètres adimensionnels suivant :

$$\bar{\sigma}_{xx}(z) = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right) \quad \bar{\sigma}_{xy}(z) = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xy}(0,0, z) \quad \bar{\sigma}_{xz}(z) = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, z \right)$$

$$N_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{D_{11} - B_{11}^2 / A_{11}} \quad N_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3} \quad \hat{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \quad \bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}$$

$$\bar{u} = \frac{100 E_c h^3}{q_0 a^4} u \left(0, \frac{b}{2}, z\right) \quad \bar{w} = \frac{10 E_c h^3}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

IV.1.1. Résultats de l'analyse statique :

Exemple 1 :

Le but de cet exemple est de vérifier la validité de la théorie proposée dans la prédiction des comportements statiques. Les flèches, les contraintes axiales et de cisaillement transverse des plaques Al/Al₂O₃ soumises à un chargement sinusoïdal sont présentées dans les tableaux IV-2 et IV-3. Les résultats calculés sont comparés avec ceux prédits par les différentes théories de déformations de cisaillement : Théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT), théorie sinusoïdale de déformation de cisaillement (SSDT), théorie hyperbolique de déformation de cisaillement (HSDDT), théorie de déformations de cisaillement de Nguyen (2015) et la théorie quasi-3D qui prend en compte les déformations de cisaillement transverse et normale . On a observé un bon accord entre les résultats trouvés et ceux reportés par Zenkour (2006) (SSDT), Thai et Kim (2013) et Mantari et al (2012) (HSDDT) et Nguyen(2015) , Wu et Li (2010) (TSDT), pour la distribution de puissance (P-FGM) et exponentielle (E-FGM).

P	Théorie	\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\sigma}_{xz}(h/6)$
---	---------	-----------	-----------	--------------------------	---------------------------	--------------------------

1	Quasi-3D Carrera et al (2008)	0.6436	0.5875	1.5062	0.6081	0.2510
	Quasi-3D Wu et Chiu (2011)	0.6436	0.5876	1.5061	0.6112	0.2511
	SSDT Zenkour (2006)	0.6626	0.5889	1.4894	0.6110	0.2622
	HSDT Mantari et al (2012)	0.6398	0.5880	1.4888	0.6109	0.2566
	TSDT Wu et Li (2010)	0.6414	0.5890	1.4898	0.6111	0.2599
	HSDT Thai et Kin (2013)	0.6414	0.5891	1.4898	0.6111	0.2608
	Trung-Kien Nguyen	0.6401	0.5883	1.4892	0.6110	0.2552
	Présent	0.6409	0.5889	1.4894	0.611	0.2617
2	Quasi-3D Carrera et al (2008)	0.9012	0.7570	1.4147	0.5421	0.2496
	Quasi-3D Wu et Chiu (2011)	0.9013	0.7571	1.4133	0.5436	0.2495
	SSDT Zenkour (2006)	0.9281	0.7573	1.3954	0.5441	0.2763
	HSDT Mantari et al (2012)	0.8957	0.7564	1.3940	0.5438	0.2741
	TSDT Wu et Li (2010)	0.8984	0.7573	1.3960	0.54420	0.2721
	HSDT Thai et Kin (2013)	0.8984	0.7573	1.3960	0.5442	0.2721
	Trung-Kien Nguyen	0.8961	0.7567	1.3947	0.5439	0.2721
	Présent	0.8975	0.7573	1.3953	0.5441	0.2764
4	Quasi-3D Carrera et al (2008)	1.0541	0.8823	1.1985	0.5666	0.2362
	Quasi-3D Wu et Chiu (2011)	1.0541	0.8823	1.1841	0.5671	0.2362
	SSDT Zenkour (2006)	1.0941	0.8819	1.1783	0.5667	0.2580
	HSDT Mantari et al (2012)	1.0457	0.8814	1.1755	0.5662	0.2623
	TSDT Wu et Li (2010)	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2519
	HSDT Thai et Kin (2013)	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2537
	Trung-Kien Nguyen	1.0466	0.8818	1.1766	0.5664	0.2593
	Présent	1.0488	0.882	1.1781	0.5667	0.2589
8	Quasi-3D Carrera et al (2008)	1.0830	0.9739	0.9687	0.5879	0.2262
	Quasi-3D Wu et Chiu (2011)	1.0830	0.9739	0.9687	0.5879	0.2261
	SSDT Zenkour (2006)	1.1340	0.9750	0.9466	0.5856	0.2121
	HSDT Mantari et al (2012)	1.0709	0.9737	0.9431	0.5850	0.2140
	TSDT Wu et Li (2010)	1.0763	0.9747	0.9477	0.5858	0.2087
	HSDT Thai et Kin (2013)	1.0763	0.9746	0.9477	0.5858	0.2088
	Trung-Kien Nguyen	1.0719	0.9744	0.9444	0.5852	0.2117
	Présent	1.0747	0.9751	0.9463	0.5856	0.2126

Tableau (IV-2) : comparaison des déplacements et contraintes adimensionnelles des plaques P-FGM carrées (Al/Al₂O₃)

a/h	b/a	Théorie	indice de loi de puissance
-----	-----	---------	----------------------------

			0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.5	
2	1	3D Zenkour (2007)	0.5769	0.5247	0.4766	0.4324	0.3727	0.2890	
		Quasi-3D Zenkour (2007)	0.5731	0.5181	0.4679	0.4222	0.3612	0.2771	
		Quasi-3D Mantari et Soares (2012)	0.5776	0.5222	0.4716	0.4255	0.3640	0.2792	
		HSDT Mantari et al (2012)	0.6363	0.5752	0.5195	0.4687	0.4018	0.3079	
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.6362	0.5751	0.5194	0.4687	0.4011	0.3079	
		Trung-Kien Nguyen	0.6211	0.5615	0.5073	0.4579	0.3921	0.3014	
		Présent	0.633	0.5723	0.5169	0.4665	0.3993	0.3067	
2	2	3D Zenkour (2007)	1.1944	1.0859	0.9864	0.8952	0.7727	0.6017	
		Quasi-3D Zenkour (2007)	1.1880	1.0740	0.9701	0.8755	0.7494	0.5758	
		Quasi-3D Mantari et Soares (2012)	1.1938	1.0790	0.9748	0.8797	0.7530	0.5785	
		HSDT Mantari et al (2012)	1.2776	1.1553	1.0441	0.9431	0.8093	0.6238	
		HSDT Thai et Kim (2013)	1.2775	1.1553	1.0441	0.9431	0.8086	0.6238	
		Trung-Kien Nguyen	1.2569	1.1367	1.0275	0.9284	0.7965	0.6153	
		Présent	1.2736	1.1518	1.041	0.9404	0.8065	0.6225	
3	3	3D Zenkour (2007)	1.4430	1.3116	1.1913	1.0812	0.9334	0.7275	
		Quasi-3D Zenkour (2007)	1.4354	1.2977	1.1722	1.0580	0.9057	0.6962	
		Quasi-3D Mantari et Soares (2012)	1.4419	1.3035	1.1774	1.0626	0.9096	0.6991	
		HSDT Mantari et al (2012)	1.5341	1.3874	1.2540	1.1329	0.9725	0.7506	
		HSDT Thai et Kim (2013)	1.5340	1.3873	1.2540	1.1329	0.9719	0.7506	
		Trung-Kien Nguyen	1.5115	1.3671	1.2360	1.1169	0.9587	0.7414	
		Présent	1.5298	1.3836	1.2507	1.1301	0.9696	0.7492	
4	1	3D Zenkour (2007)	0.3490	0.3168	0.2875	0.2608	0.2253	0.1805	
		Quasi-3D Zenkour (2007)	0.3475	0.3142	0.2839	0.2563	0.2196	0.1692	
		Quasi-3D Mantari et Soares (2012)	0.3486	0.3152	0.2848	0.2571	0.2203	0.1697	
		HSDT Mantari et al (2012)	0.3602	0.3259	0.2949	0.2668	0.2295	0.1785	
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.3602	0.3259	0.2949	0.2668	0.2295	0.1785	
		Trung-Kien Nguyen	0.3575	0.3235	0.2927	0.2649	0.2280	0.1775	
		Présent	0.3598	0.3255	0.2945	0.2665	0.2293	0.1784	
	2	2	3D Zenkour (2007)	0.8153	0.7395	0.6708	0.6085	0.5257	0.4120
			Quasi-3D Zenkour (2007)	0.8120	0.7343	0.6635	0.5992	0.5136	0.3962
			Quasi-3D Mantari et Soares (2012)	0.8145	0.7365	0.6655	0.6009	0.5151	0.3973
			HSDT Mantari et al (2012)	0.8325	0.7534	0.6819	0.6173	0.5319	0.4150
			HSDT Thai et Kim (2013)	0.8325	0.7534	0.6819	0.6173	0.5319	0.4150
			Trung-Kien Nguyen	0.8285	0.7498	0.6787	0.6145	0.5296	0.4135
			Présent	0.8319	0.7529	0.6815	0.617	0.5316	0.4149
	3	3	3D Zenkour (2007)	1.0134	0.9190	0.8335	0.7561	0.6533	0.5121
			Quasi-3D Zenkour (2007)	1.0094	0.9127	0.8248	0.7449	0.6385	0.4927
			Quasi-3D Mantari et Soares (2012)	1.0124	0.9155	0.8272	0.7470	0.6404	0.4941
			HSDT Mantari et al (2012)	1.0325	0.9345	0.8459	0.7659	0.6601	0.5154
			HSDT Thai et Kim (2013)	1.0325	0.9345	0.8459	0.7659	0.6601	0.5154
			Trung-Kien Nguyen	1.0281	0.9305	0.8424	0.7628	0.6576	0.5137
			Présent	1.0319	0.9339	0.8454	0.7655	0.6598	0.5153

Tableau (IV-3) : Comparaison de la flèche non-dimensionnelle (\bar{w}) des plaques carrée E-FGM (Al/Al₂O₃)

Dans le tableau IV-4, on a présenté les flèches des plaques S-FGM Al/Al₂O₃aux différentes valeurs de p , $\frac{a}{h}$ et $\frac{b}{a}$. Les résultats de ce tableau sont obtenus en utilisant différentes théories de déformation de cisaillement. Une bonne concordance est observée à travers les résultats obtenus.

a/h	b/a	Théorie	indice de loi de puissance					
			0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.5
2	1	FSDT	2.4149	1.6171	1.3132	1.1535	1.0194	0.9066
		TSDT	2.57	1.8483	1.5358	1.3554	1.1918	1.0419
		SSDT	2.5681	1.8572	1.5483	1.3689	1.2051	1.0538
		Présent	2.5654	1.8601	1.5532	1.3745	1.2109	1.0592
	2	FSDT	4.7141	3.1212	2.5302	2.2235	1.9691	1.7578
		TSDT	4.9849	3.5114	2.9039	2.5619	2.2578	1.9849
		SSDT	4.9868	3.5304	2.9281	2.5876	2.2826	2.0068
		Présent	4.9851	3.5373	2.938	2.5984	2.2936	2.0168
	3	FSDT	5.6222	3.7116	3.0074	2.6432	2.342	2.0927
		TSDT	5.9316	4.1548	3.4314	3.0272	2.6695	2.3506
		SSDT	5.9349	4.1771	3.4597	3.0569	2.6982	2.3757
		Présent	5.9334	4.1854	3.4713	3.0694	2.7108	2.3874
4	1	FSDT	1.2679	0.8214	0.6635	0.5837	0.5189	0.4667
		TSDT	1.3139	0.8856	0.7247	0.639	0.5661	0.5039
		SSDT	1.315	0.8893	0.7292	0.6436	0.5705	0.5077
		Présent	1.3151	0.8907	0.7311	0.6456	0.5725	0.5095
	2	FSDT	2.8788	1.8481	1.4907	1.3119	1.1682	1.0539
		TSDT	2.9538	1.9521	1.5896	1.4014	1.2446	1.1141
		SSDT	2.956	1.9585	1.5972	1.4091	1.2519	1.1205
		Présent	2.9563	1.9609	1.6003	1.4124	1.2552	1.1235
	3	FSDT	3.5575	2.2793	1.8379	1.6176	1.441	1.3009
		TSDT	3.6422	2.3967	1.9496	1.7185	1.5271	1.3688
		SSDT	3.6446	2.4038	1.958	1.7272	1.5353	1.376
		Présent	3.645	2.4066	1.9616	1.7309	1.5391	1.3793

Tableau (IV-4) : Comparaison de la flèche non-dimensionnelle (\bar{w}) des plaques carrée S-FGM (Al/Al₂O₃)

Les variations de déplacements axiales et des contraintes normales et transversales à travers des plaques carrées Al/Al₂O₃ sont représentées dans la figure IV-1-. On constate que la contrainte axiale maximale augmente avec l'indice matériel p alors qu'il apparait que les contraintes de compression minimale sont localisées à l'intérieur de la plaque pour certaines valeurs de p ($p \leq 1$). La contrainte de cisaillement maximale est localisée à la surface moyenne pour des plaques homogènes et tende à se déplacer vers la surface supérieure en fonction de p due à la non symétrie de la matière à travers l'épaisseur.

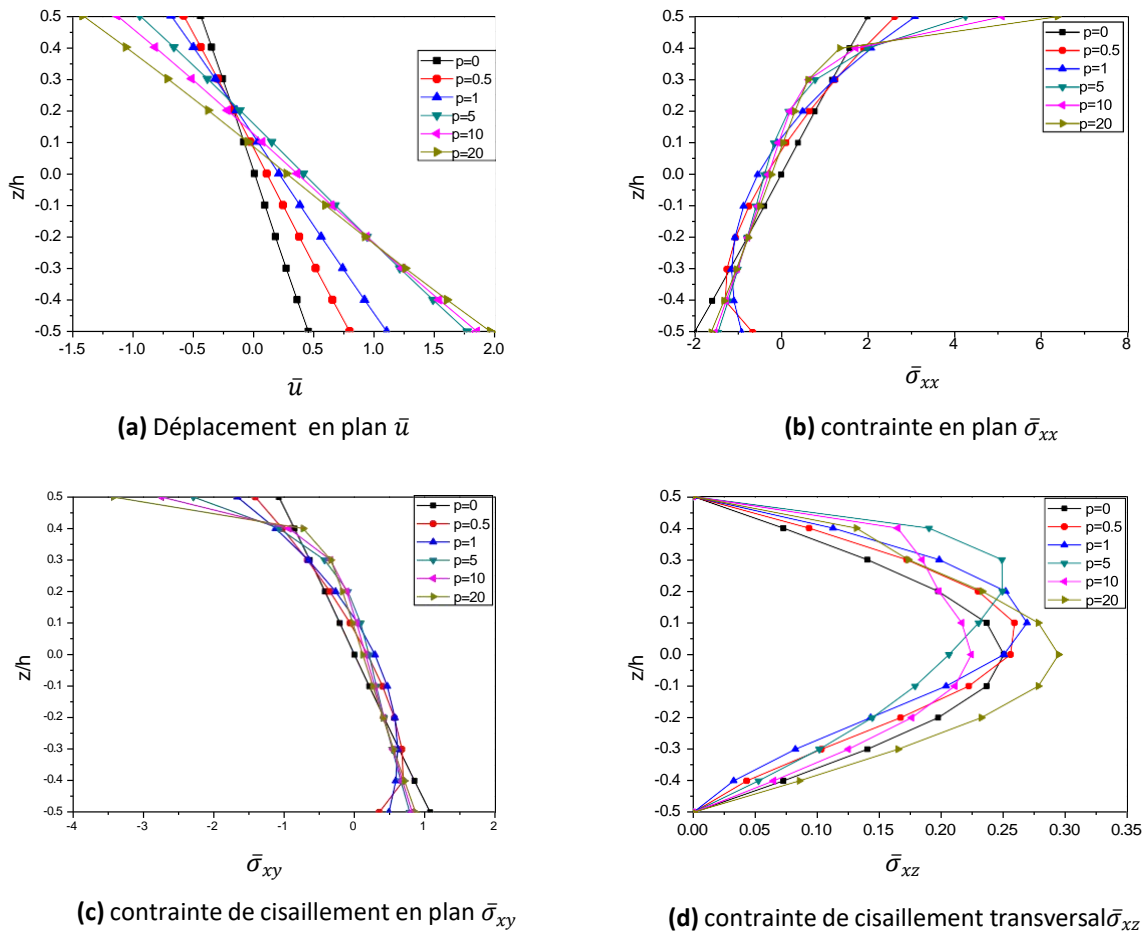


Figure (IV-1) : La variation de déplacement et des contraintes à travers l'épaisseur des plaques carrées P-FGM (Al /Al₂O₃) (a/h=10)

IV. 1 .2 Résultat de l'analyse dynamique et de la stabilité :

Exemple 2 :

Cet exemple a pour but de démontrer la précision de la théorie proposée dans la prédiction de comportement dynamique des plaques Al/Al₂O₃ et Al/ZrO₂. Le tableau IV-5 présente une comparaison sur la fréquence fondamentale des plaques carrées Al/Zr₂O₃ déterminée à partir de la présente étude et le modèle de plaque 3D (Uymaz et Aydogdu ,2007). On peut constater que le résultat obtenu s'accorde bien avec les solutions 3D .

a/h	Theorie	indice de loi de puissance							
		0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
2	3D Uymaz et aydogdu(2007)	1.2589	1.2296	1.2049	1.1484	1.0913	1.0344	0.9777	0.9507
	Trung-kien Nguyen	1.2571	1.2259	1.2010	1.1443	1.0882	1.0325	0.9771	0.9540
	Présent	1.2476	1.2185	1.1934	1.1368	1.0802	1.025	0.9698	0.9454
5	3D Uymaz et aydogdu(2007)	1.7748	1.7262	1.6881	1.6031	1.4764	1.4628	1.4106	1.3711
	Trung-kien Nguyen	1.7723	1.7241	1.6850	1.6003	1.5245	1.4629	1.4084	1.3726
	Présent	1.7689	1.7222	1.6829	1.598	1.5217	1.4604	1.4059	1.3695
10	3D Uymaz et aydogdu(2007)	1.9339	1.8788	1.8357	1.7406	1.6583	1.5958	1.5491	1.5066
	Trung-kien Nguyen	1.9330	1.8783	1.8342	1.7402	1.6593	1.5994	1.5500	1.5095
	Présent	1.9319	1.8786	1.8342	1.7399	1.6584	1.5986	1.5492	1.5084
20	3D Uymaz et aydogdu(2007)	1.9570	1.9261	1.8788	1.7832	1.6999	1.6401	1.5937	1.5491
	Trung-kien Nguyen	1.9824	1.9257	1.8799	1.7830	1.7006	1.6417	1.5945	1.5524
	Présent	1.9821	1.9267	1.8806	1.7833	1.7004	1.6415	1.5943	1.5521
50	3D Uymaz et aydogdu(2007)	1.9974	1.9390	1.8920	1.7944	1.7117	1.6522	1.6062	1.5620
	Trung-kien Nguyen	1.9971	1.9398	1.8935	1.7957	1.7129	1.6544	1.6079	1.5653
	Présent	1.9971	1.941	1.8944	1.7962	1.7129	1.6543	1.6078	1.5652
100	3D Uymaz et aydogdu(2007)	1.9974	1.9416	1.8920	1.7972	1.7117	1.6552	1.6062	1.5652
	Trung-kien Nguyen	1.9993	1.9418	1.8955	1.7975	1.7147	1.6562	1.6098	1.5671
	Présent	1.9993	1.9431	1.8964	1.7981	1.7147	1.6562	1.6098	1.5671

Tableau (IV-5) : la comparaison de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle(β)des plaques carrées P-FGM (Al/ZrO₂)

Les effets de l'indice matériel et des rapports géométriques sont résumés dans les tableaux IV-6 et IV-7. Ils sont comparés avec les solutions de la FSDT (Hosseini-Hashemi et al ,2011) , la TSDT (Hosseini-Hashemi et al ,2011) , la HSDT (Thai et Kim ,2013) et la théorie quasi-3D (Matsunaga ,2008).On constate que les résultats trouvés sont aussi presque identiques dans plusieurs cas en modèle quasi-3D par rapport aux SSDT ,TSDT et HSDT.

a/h	Mode (m,n)	théorie	indice de loi de puissance				
			0	0.5	1	4	10
5	1(1,1)	Quasi-3D Matsunaga (2008)	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
		TSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.2123	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		FSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Trung-Kien Nguyen	0.2117	0.1810	0.1634	0.1378	0.1303
		Présent	0.2113	0.1808	0.1632	0.1377	0.13
	2(1,2)	Quasi-3D Matsunaga (2008)	0.4658	0.4040	0.3644	0.3000	0.2790
		TSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		FSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		Trung-Kien Nguyen	0.4645	0.4004	0.3622	0.2981	0.2783
		Présent	0.4626	0.3991	0.3609	0.2977	0.2771
	3(2,2)	TSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		FSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.6676	0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
Trung-Kien Nguyen		0.6734	0.5836	0.5286	0.4291	0.3974	
Présent		0.6697	0.5837	0.5809	0.4291	0.3950	
10	1(1,1)	Quasi-3D Matsunaga (2008)	0.0578	0.0492	0.0443	0.0381	0.0364
		TSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		FSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.0577	0.0490	0.442	0.0381	0.0364
		Trung-Kien Nguyen	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Présent	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
	2(1,2)	Quasi-3D Matsunaga (2008)	0.1381	0.1180	0.1063	0.0905	0.0859
		TSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		FSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		Trung-Kien Nguyen	0.1379	0.1175	0.1060	0.0902	0.0857
		Présent	0.1377	0.1174	0.1059	0.0902	0.0856
	3(2,2)	TSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		FSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Trung-Kien Nguyen	0.2117	0.1810	0.1634	0.1378	0.1303
		Présent	0.2113	0.1808	0.1632	0.1377	0.13
	20	1(1,1)	TSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098
FSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)			0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
HSDT Thai et Kim (2013)			0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
Trung-Kien Nguyen			0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
Présent			0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
2(1,2)		Trung-Kien Nguyen	0.0365	0.0310	0.0279	0.0241	0.0231
		Présent	0.0365	0.031	0.0279	0.0241	0.0231
3(2,2)		Trung-Kien Nguyen	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Présent	0.0577	0.049	0.0442	0.0381	0.0364

Tableau (IV-6) : comparaison des trois premières fréquences fondamentales (ω) des plaques carrée P-FGM (Al/Al₂O₃)

a/b	a/h	mode (m,n)	theorie	indice de loi de puissance					
				0	0.5	1	2	5	10
0.5	5	1 (1,1)	Trung-kien Nguyen	3.4464	2.9380	2.6509	2.3971	2.2260	2.1432
			Présent	3.4420	2.9352	2.6480	2.3949	2.2257	2.1404
		2 (1,2)	Trung-kien Nguyen	5.2932	4.5258	4.0860	3.6859	3.3919	3.2574
			Présent	5.2831	4.5193	4.0792	3.6807	3.3907	3.2508
		3 (2,2)	Trung-kien Nguyen	11.6113	10.0109	9.0538	8.1181	7.2951	6.9568
			Présent	11.5655	9.9786	9.0229	8.0931	7.2852	6.9275
10	5	1 (1,1)	Trung-kien Nguyen	3.6533	3.0996	2.7946	2.5371	2.3911	2.3118
			Présent	3.6520	3.0992	2.7938	2.5364	2.3911	2.3109
		2 (1,2)	Trung-kien Nguyen	5.7731	4.9031	4.4216	4.0105	3.7671	3.6388
			Présent	5.7699	4.9018	4.4195	4.0089	3.7670	3.6365
		3 (2,2)	Trung-kien Nguyen	13.7855	11.7519	10.6036	9.5884	8.9042	8.5729
			Présent	13.7679	11.7409	10.5920	9.5795	8.9027	8.5614
20	5	1 (1,1)	Trung-kien Nguyen	3.7127	3.1455	2.8355	2.5773	2.4401	2.3622
			Présent	3.7124	3.1458	2.8353	2.5771	2.4401	2.3618
		2 (1,2)	Trung-kien Nguyen	5.9209	5.0176	4.5234	4.1104	3.8880	3.7629
			Présent	5.9200	5.0180	4.5229	4.1100	3.8880	3.7621
		3 (2,2)	Trung-kien Nguyen	14.6131	12.3983	11.1785	10.1482	9.5645	9.2471
			Présent	14.6079	12.3967	11.1752	10.1457	9.5643	9.2434
1	5	1 (1,1)	Trung-kien Nguyen	5.2932	4.5258	4.0860	3.6859	3.3919	3.2574
			Présent	5.2831	4.5193	4.0792	3.6807	3.3907	3.2508
		2 (1,2)	Trung-kien Nguyen	11.6113	10.0109	9.0538	8.1181	7.2951	6.9568
			Présent	11.5655	9.9786	9.0229	8.0931	7.2851	6.9274
		3 (2,2)	Trung-kien Nguyen	16.8351	14.5888	13.2140	11.8101	10.4647	9.9360
			Présent	16.7417	14.5223	13.1499	11.7569	10.4382	9.8752
	10	1 (1,1)	Trung-kien Nguyen	5.7731	4.9031	4.4216	4.0105	3.7671	3.6388
			Présent	5.7699	4.9018	4.4195	4.0089	3.7670	3.6365
		2 (1,2)	Trung-kien Nguyen	13.7855	11.7519	10.6036	9.5884	8.9042	8.5729
			Présent	13.7679	11.7409	10.5920	9.5795	8.9027	8.5614
		3 (2,2)	Trung-kien Nguyen	21.1728	18.1033	16.3438	14.7435	13.5677	13.0296
			Présent	21.1322	18.0772	16.3170	14.7228	13.5629	13.0032
	20	1 (1,1)	Trung-kien Nguyen	5.9209	5.0176	4.5234	4.1104	3.8880	3.7629
			Présent	5.9200	5.0180	4.5229	4.1100	3.8880	3.7621
		2 (1,2)	Trung-kien Nguyen	14.6131	12.3983	11.1785	10.1482	9.5645	9.2471
			Présent	14.6079	12.3967	11.1752	10.1457	9.5643	9.2434
		3 (2,2)	Trung-kien Nguyen	23.0925	19.6126	17.6865	16.0419	15.0685	14.5550
			Présent	23.0796	19.6073	17.6781	16.0357	15.0680	14.5460

Tableau (IV-7) : Fréquences naturelles non-dimensionnelles ($\bar{\omega}$) des plaques carrées P-FGM (Al/Al₂O₃)

Dans le tableau IV-8 on a présenté les fréquences des plaques carrées S-FGM Al/ZrO₂ pour différentes valeurs de $\frac{a}{h}$ et de p .Les résultats obtenus par la théorie proposée sont en bon accord avec ceux calculés par les autres théories calculées par théorie de déformation de cisaillement

(FSDT , TSDT et SSDT) .Cependant , on a constaté que la CPT surestime les fréquences en particulier pour les plaques épais où l'effet de cisaillement est significatif.

a/h	Theorie	indice de loi de puissance							
		0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
2	CPT	1.2078	1.3082	1.3804	1.5087	1.6009	1.6598	1.6858	1.6875
	FSDT	0.8902	0.9475	0.9896	1.0687	1.1323	1.1821	1.218	1.2298
	TSDT	0.8933	0.9436	0.9792	1.045	1.1008	1.1517	1.2	1.2212
	SSDT	0.8943	0.9446	0.9799	1.0448	1.0996	1.1498	1.1988	1.221
	Présent	0.895	0.9453	0.9805	1.045	1.0992	1.1491	1.1983	1.221
5	CPT	1.3899	1.5067	1.5908	1.7405	1.8477	1.9152	1.9432	1.9437
	FSDT	1.2683	1.3665	1.4375	1.5658	1.6611	1.7261	1.7606	1.7666
	TSDT	1.2686	1.3627	1.4299	1.5404	1.6414	1.7074	1.7493	1.7604
	SSDT	1.2688	1.3629	1.4299	1.5498	1.6401	1.7057	1.7481	1.7598
	Présent	1.269	1.363	1.43	1.5495	1.6396	1.7051	1.7476	1.7595
10	CPT	1.4232	1.5431	1.6295	1.7832	1.8932	1.9622	1.9905	1.9908
	FSDT	1.3858	1.4998	1.5819	1.7286	1.8348	1.9032	1.9339	1.9361
	TSDT	1.3859	1.4983	1.5791	1.723	1.8277	1.8966	1.9299	1.9338
	SSDT	1.3859	1.4984	1.579	1.7228	1.8272	1.8959	1.9294	1.9336
	Présent	1.386	1.4984	1.5791	1.7227	1.827	1.8957	1.9293	1.9334
20	CPT	1.4319	1.5527	1.6396	1.7943	1.9051	1.9745	2.0029	2.0031
	FSDT	1.422	1.5411	1.6269	1.7798	1.8895	1.9588	1.9878	1.9885
	TSDT	1.422	1.5407	1.6262	1.7782	1.8875	1.9569	1.9867	1.9879
	SSDT	1.422	1.5407	1.6261	1.7782	1.8874	1.9567	1.9866	1.9878
	Présent	1.422	1.5408	1.6261	1.7781	1.8873	1.9566	1.9865	1.9878
50	CPT	1.4344	1.5554	1.6425	1.7975	1.9084	1.978	2.0064	2.0065
	FSDT	1.4328	1.5535	1.6404	1.7951	1.9059	1.9754	2.004	2.0042
	TSDT	1.4328	1.5534	1.6403	1.7949	1.9056	1.9751	2.0038	2.0041
	SSDT	1.4328	1.5534	1.6403	1.7949	1.9055	1.9751	2.0038	2.0041
	Présent	1.4328	1.5534	1.6402	1.7949	1.9055	1.9751	2.0037	2.0041
100	CPT	1.4347	1.5558	1.6429	1.798	1.9089	1.9785	2.0069	2.007
	FSDT	1.4343	1.5553	1.6424	1.7974	1.9083	1.9778	2.0063	2.0064
	TSDT	1.4343	1.5553	1.6423	1.7973	1.9082	1.9778	2.0063	2.0064
	SSDT	1.4343	1.5553	1.6423	1.7973	1.9082	1.9778	2.0062	2.0064
	Présent	1.4343	1.5553	1.6423	1.7973	1.9082	1.9778	2.0062	2.0064

Tableau (IV-8) : comparaison de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle (β) des plaques carrée S-FGM (Al/ZrO₂)

Le tableau IV-9 présente aussi une comparaison entre les fréquences calculées pour différents mode de vibration et différentes valeurs de $\frac{a}{h}$. Encore une fois, on a constaté que la présente théorie prédit des fréquences comparables aux autres théories de déformation de cisaillement.

a/h	Mode (m,n)	théorie	indice de loi de puissance				
			0	0.5	1	4	10
5	1(1,1)	CPT	0.1178	0.2035	0.2227	0.2353	0.234
		FSDT	0.1075	0.1785	0.1958	0.21	0.2105
		TSDT	0.1075	0.1749	0.1920	0.2089	0.2110
		SSDT	0.1075	0.1745	0.1914	0.2086	0.2108
		Présent	0.1076	0.1744	0.1912	0.2084	0.2108
	2(1,2)	CPT	0.2817	0.4853	0.5308	0.5615	0.5591
		FSDT	0.2351	0.384	0.422	0.4575	0.4614
		TSDT	0.2353	0.3650	0.4013	0.4466	0.4567
		SSDT	0.2353	0.3637	0.3995	0.4454	0.4562
		Présent	0.2355	0.3632	0.3988	0.4448	0.456
	3(2,2)	CPT	0.4328	0.7436	0.8132	0.8611	0.8582
		FSDT	0.3398	0.5465	0.6012	0.6564	0.6646
		TSDT	0.3404	0.5138	0.5654	0.6373	0.6565
		SSDT	0.3407	0.5119	0.5626	0.6352	0.6557
		Présent	0.3409	0.5111	0.5614	0.6342	0.6553
10	1(1,1)	CPT	0.0302	0.0522	0.0571	0.0603	0.0599
		FSDT	0.0294	0.0503	0.0551	0.0585	0.0583
		TSDT	0.0294	0.0498	0.0546	0.0582	0.0581
		SSDT	0.0294	0.0498	0.0545	0.0582	0.0581
		Présent	0,0294	0,0498	0,0545	0,0582	0.0581
	2(1,2)	CPT	0.0745	0.1288	0.1409	0.1489	0.148
		FSDT	0.0701	0.1186	0.13	0.1387	0.1386
		TSDT	0.0701	0.1161	0.1273	0.1373	0.138
		SSDT	0.0701	0.1159	0.1271	0.1371	0.138
		Présent	0.0701	0.1158	0.127	0.1371	0.1379
	3(2,2)	CPT	0.1178	0.2035	0.2227	0.2353	0.234
		FSDT	0.1075	0.1802	0.1977	0.2118	0.2122
		TSDT	0.1075	0.1749	0.192	0.2089	0.211
		SSDT	0.1075	0.1745	0.1914	0.2086	0.2108
		Présent	0.1076	0.1744	0.1912	0.2084	0.2108
20	1(1,1)	CPT	0.0076	0.0131	0.0144	0.0152	0.0151
		FSDT	0.0075	0.013	0.0142	0.015	0.015
		TSDT	0.0075	0.013	0.0142	0.015	0.015
		SSDT	0.0075	0.0130	0.0142	0.0150	0.015
		Présent	0.0075	0.0130	0.0142	0.015	0.015
	2(1,2)	CPT	0.0189	0.0327	0.0358	0.0378	0.0376
		FSDT	0.0186	0.032	0.035	0.0371	0.0369
		TSDT	0.0186	0.0318	0.0348	0.037	0.0369
		SSDT	0.0186	0.0317	0.0348	0.0369	0.0369
		Présent	0.0186	0.0317	0.0348	0.0369	0.0368
	3(2,2)	CPT	0.0302	0.0522	0.0571	0.0603	0.0599
		FSDT	0.0294	0.0503	0.0551	0.0585	0.0583
		TSDT	0.0294	0.0498	0.0546	0.0582	0.0581
		SSDT	0.0294	0.0498	0.0546	0.0582	0.0581
		Présent	0.0294	0.0498	0.0545	0.0582	0.0581

Tableau (IV-9) : comparaison des trois premières fréquences fondamentales ($\hat{\omega}$) des plaques carrée S-FGM (Al/Al₂O₃)

La variation des fréquences naturelles en fonction de l'indice matériel et du rapport de l'épaisseur ($\frac{a}{h}$) est présentée graphiquement (Figure IV-2) . On peut observer à partir de cette figure que les fréquences naturelles décroissent avec l'augmentation de l'indice matériel .Cela est due au fait que la valeur élevée de p correspond à la valeur inférieure de la fraction volumique de la phase céramique, et ainsi rend les plaques plus souples .La figure IV-2b montre qu'avec l'augmentation du rapport($\frac{a}{h}$), l'effet de déformation de cisaillement devient très efficace dans une région relativement large ($\frac{a}{h} \leq 20$).

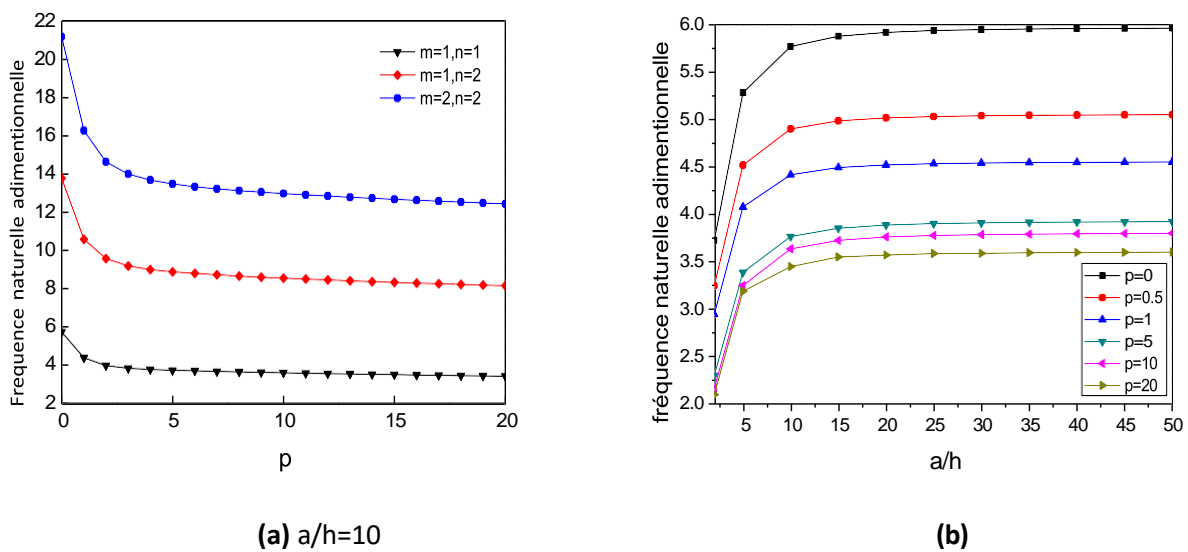


Figure (IV-2) : influence de l'indice matériel p et du rapport (a/h) sur la fréquence naturelle ($\bar{\omega}$) des plaques carrées P-FGM (Al/Al_2O_3)

Exemple 3 :

Dans cet exemple la réponse en flambement des plaques Al/Al_2O_3 et Al/SiC est examinée en considérant trois cas de chargement : compression uniaxiale ($\gamma = 0$), compression biaxiale ($\gamma = 1$), et compression axiale et traction ($\gamma = -1$). On note que le couplage extension-flexion existe dans des plaques FG à cause de la variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur .Ce couplage produit une flèche et des moments de flexion lorsque la plaque est soumise à des charges de compression .Et ainsi, une bifurcation de type flambement se produira (Liew et al ,2003 ;Qatu et Leissa,1993) .Cependant ; pour une plaque avec des appuis mobiles ,la bifurcation de type flambement se produit lorsque les charges axiales sont appliquées au

niveau de la surface neutre (Naderi et Saidi ,2010 ;Aydogdu,2008) .Par conséquent ;l'analyse de flambement est présentée dans cette exemple pour une plaque FG soumise à des charges axiales appliquées à la surface neutre (Thai et Vo,2013).Les résultats obtenus sont donnés dans les tableaux IV-10 et IV-11 .Une fois de plus ;les résultats sont en bon accord avec les solutions de la FSDT (Mohammadi et al ,2010),HSDT (Bodaghi et Saidi,2010)et HSDT(Thai et Choi,2012).

γ	Théorie	indice de loi de puissance					
		0	0.5	1	2	5	10
0	FSDT Mohammadi et al (2010)	37.3708	37.6650	37.7132	37.7089	36.8862	36.5934
	HSDT Bodaghi et Saidi (2010)	37.3714	37.6650	37.7172	37.5765	36.8862	36.5934
	HSDT Thai et Choi (2012)	37.3721	37.6650	37.7143	37.6042	36.8862	36.5934
	Trung-Kien Nguyen	37.4215	37.6650	37.7560	37.6327	36.8862	36.5934
	Present	37.3786	37.6361	37.7199	37.6033	36.8894	36.5507
1	FSDT Mohammadi et al (2010)	18.6854	18.8325	18.8566	18.8545	18.4431	18.2967
	HSDT Bodaghi et Saidi (2010)	18.6860	18.8325	18.8571	18.8020	18.4431	18.2967
	HSDT Thai et Choi (2012)	18.6861	18.8325	18.8572	18.8021	18.4431	18.2967
	Trung-Kien Nguyen	18.7107	18.8325	18.8780	18.8163	18.4431	18.2967
	Present	18.6893	18.8181	18.8599	18.8016	18.4447	18.2754
-1	FSDT Mohammadi et al (2010)	72.0834	73.4526	73.6307	73.6112	69.9876	68.7244
	HSDT Bodaghi et Saidi (2010)	72.2275	73.4526	73.6645	73.1587	69.9876	68.7244
	HSDT Thai et Choi (2012)	72.0983	73.4526	73.6437	73.1436	69.9876	68.7244
	Trung-Kien Nguyen	72.3281	73.4526	73.8426	73.2827	69.9876	68.7244
	Present	72.1306	73.2895	73.6716	73.1429	69.9906	68.5475

Tableau (IV-10) : comparaison de la charge critique du flambement (N_{cr})des plaques carrées P-FGM (Al/SiC) (a/h =10)

γ	a/b	a/h	Théorie	indice de loi de puissance					
				0	0.5	1	2	5	10
0	0.5	5	HSDT Thai et Choi (2012)	6.7203	4.4235	3.4164	2.6451	2.1484	1.9213
			Trung-Kien Nguyen	6.7417	4.4343	3.4257	2.6503	2.1459	1.9260
			Présent	6.7233	4.4253	3.4176	2.6451	2.1452	1.9206
	10	HSDT Thai et Choi (2012)	7.4053	4.8206	3.7111	2.8897	2.4165	2.1896	
			Trung-Kien Nguyen	7.4115	4.8225	3.7137	2.8911	2.4155	2.1911
			Présent	7.4061	4.8211	3.7114	2.8896	2.4154	2.1893
	20	HSDT Thai et Choi (2012)	7.5993	4.9315	3.7930	2.9382	2.4944	2.2690	
			Trung-Kien Nguyen	7.6009	4.9307	3.7937	2.9585	2.4942	2.2695
			Présent	7.5995	4.9316	3.7931	2.9581	2.4941	2.2689
1	5	HSDT Thai et Choi (2012)	16.0211	10.6254	8.2245	6.3432	5.0531	4.4807	
			Trung-Kien Nguyen	16.1003	10.6670	8.2597	6.3631	5.0459	4.4981
			Présent	16.0328	10.6325	8.2297	6.3436	5.0426	4.4786
	10	HSDT Thai et Choi (2012)	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528	
			Trung-Kien Nguyen	18.6030	12.1317	9.3496	7.2687	6.0316	5.4587
			Présent	18.5817	12.1249	9.3405	7.2629	6.0312	5.4518
	20	HSDT Thai et Choi (2012)	19.3528	12.5668	9.6675	7.5371	6.3448	5.7668	
			Trung-Kien Nguyen	19.3593	1.25652	9.6702	7.5386	6.3437	5.7689
			Présent	19.3536	12.5673	9.6678	7.5371	6.3436	5.7665
1	0.5	5	HSDT Thai et Choi (2012)	5.3762	3.5388	2.7331	2.1161	1.7187	1.5370
			Trung-Kien Nguyen	5.3934	3.5475	2.7406	2.1202	1.7167	1.5408
			Présent	5.3786	3.5403	2.7341	2.1161	1.7162	1.5365
	10	HSDT Thai et Choi (2012)	5.9243	3.8565	2.7689	2.3117	1.9332	1.7517	
			Trung-Kien Nguyen	5.9292	3.8580	2.9710	2.3129	1.9324	1.7529
			Présent	5.9249	3.8569	2.9692	2.3117	1.9323	1.7514
	20	HSDT Thai et Choi (2012)	6.0794	3.9452	3.0344	2.3665	1.9955	1.8152	
			Trung-Kien Nguyen	6.0807	3.9445	3.0350	2.3668	1.9953	1.8156
			Présent	6.0796	3.9452	3.0345	2.3665	1.9953	1.8151
1	5	HSDT Thai et Choi (2012)	8.0105	5.3127	4.1122	3.1716	2.5265	2.2403	
			Trung-Kien Nguyen	8.0501	5.3335	4.1299	3.1815	2.5230	2.2491
			Présent	8.0164	5.3162	4.1148	3.1718	2.5213	2.2393
	10	HSDT Thai et Choi (2012)	9.2893	6.0615	.46696	3.6315	3.0177	2.7264	
			Trung-Kien Nguyen	9.3015	6.0659	4.6748	3.6344	3.0158	2.7293
			Présent	9.2909	6.0624	4.6702	3.6315	3.0156	2.7259
	20	HSDT Thai et Choi (2012)	9.6764	6.2834	4.8337	3.7686	3.1724	2.8834	
			Trung-Kien Nguyen	9.6796	6.2826	4.8351	3.7693	3.1718	2.8844
			Présent	9.6768	6.2837	4.8339	3.7685	3.1718	2.8832
-1	0.5	5	HSDT Thai et Choi (2012)	8.9604	5.8980	4.5551	3.5268	2.8646	2.5617
			Trung-Kien Nguyen	8.9890	5.9124	4.5676	3.5337	2.8612	2.5679
			Présent	8.9644	5.9004	4.5569	3.5268	2.8603	2.5607
	10	HSDT Thai et Choi (2012)	9.8738	6.4275	4.9481	3.8529	3.2219	2.9195	
			Trung-Kien Nguyen	9.8820	6.4299	4.9516	3.8548	3.2206	2.9214
			Présent	9.8748	6.4281	4.9486	3.8528	3.2205	2.9191
	20	HSDT Thai et Choi (2012)	10.1324	6.5753	5.0574	3.9442	3.3259	3.0253	
			Trung-Kien Nguyen	10.1345	6.5742	5.0583	3.9447	3.3255	3.0260
			Présent	10.1326	6.5755	5.0575	3.9442	3.3255	3.0252

1	5	HSDT Thai et Choi (2012)	26.2058	17.7704	13.8486	10.5589	16.9590	6.8970
		Trung-Kien Nguyen ²	24.4999	17.9424	13.9872	10.6421	7.9571	6.9626
		Présent	26.256	17.8017	13.8723	10.5659	7.9341	6.8972
10		HSDT Thai et Choi (2012)	35.8416	23.5920	18.2206	14.1073	11.4583	10.2468
		Trung-Kien Nguyen ²	35.9559	23.6497	18.2704	14.1349	11.4447	10.2717
		Présent	35.8577	23.6017	18.2276	14.1073	11.4412	10.243
20		HSDT Thai et Choi (2012)	39.4951	25.7100	19.7925	15.4115	12.8878	11.6779
		Trung-Kien Nguyen ²	39.5280	25.7197	19.8065	15.4190	12.8824	11.6857
		Présent	39.4994	25.7126	19.7943	15.4113	12.882	11.6763

Tableau (IV-11) : Comparaison de la charge critique du flambement (N_{cr}) des plaques P-FGM (Al/Al₂O₃)

Dans le tableau IV-12 on a présenté la charge critique de flambement des plaques S-FGM carrées au différents cas de chargement ($\gamma = 0 ; \gamma = 1 ; \gamma = -1$). Les résultats de ce tableau démontrent aussi l'exactitude et l'efficacité de la théorie proposée.

γ	Théorie	indice de loi de puissance					
		0	0.5	1	2	5	10
0	FSDT	37.3708	36.6031	36.6716	36.8413	37.0857	37.2142
	TSDT	37.3721	35.7939	35.8227	36.2618	36.7958	37.0641
	SSDT	37.3753	35.7302	35.8167	36.1957	36.7594	37.0459
	Present	37.3786	35.7029	35.7821	36.1641	36.7413	37.0373
1	FSDT	18.6854	18.3015	18.3358	18.4206	18.5428	18.6071
	TSDT	18.6861	17.897	17.9464	18.1309	18.3979	18.5321
	SSDT	18.6875	17.8651	17.9084	18.0979	18.3797	18.523
	Present	18.6893	17.8515	17.8911	18.0821	18.3707	18.5186
-1	FSDT	72.0833	68.746	69.0366	69.7624	70.823	71.3881
	TSDT	72.0983	65.4356	65.8316	67.3357	69.5805	70.7403
	SSDT	72.1146	65.1862	65.5313	67.068	69.4283	70.6637
	Present	72.1306	65.0804	65.3954	66.9403	69.3528	70.6274

Tableau (IV-12) : comparaison de la charge critique du flambement (N_{cr}) des plaques carrées S-FGM (Al/SiC) ($a/h = 10$)

La figure IV-3 montre les charges critiques de flambement des plaques rectangulaires en fonction de l'indice matériel. On constate à partir de cette figure que les charges critiques décroissent avec l'augmentation de l'indice matériel et augmentent avec le rapport $\frac{a}{h}$ ($\frac{a}{h} \leq 30$), mais pour des valeurs supérieures à 30 les courbes deviennent plates.

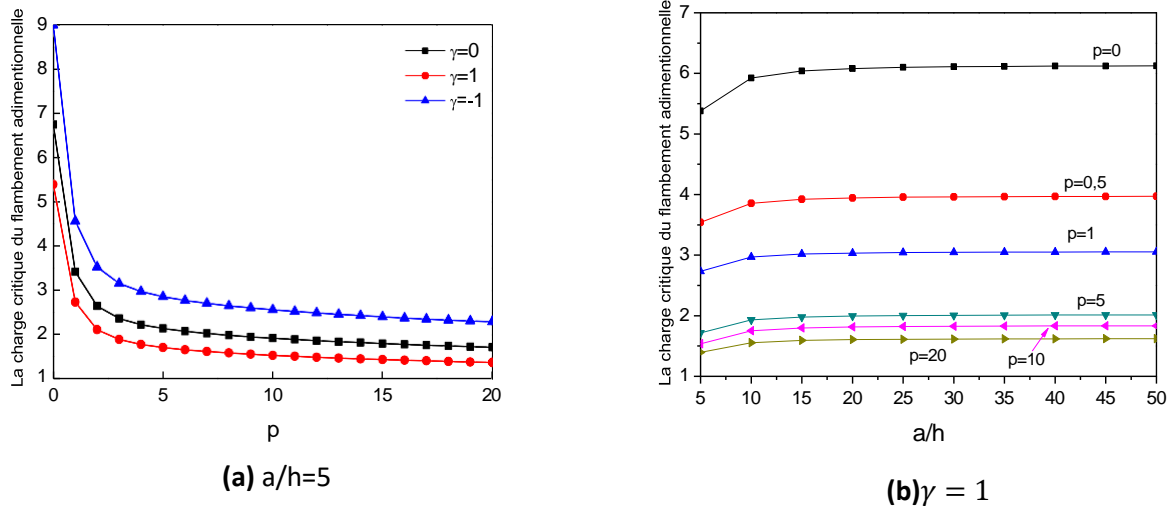


Figure (IV-3) : influence de l'indice matériel p et du rapport (a/h) sur la charge critique du flambement des plaques P-FGM rectangulaire (a/b=0.5) (Al/Al₂O₃)

Exemple 4 :

Dans cet exemple, les courbes charge – fréquence présentées dans la figure IV-4 pour des plaques rectangulaires homogènes et FG ($\frac{h}{b} = 0,5$). On peut constater que toutes les fréquences fondamentales diminuent au fur et à mesure que les charges changent à partir de la traction vers la compression. Dans la zone de compression ($N_{cr} > 0$), les fréquences fondamentales sont les plus importantes pour des plaques soumises à une compression semi axiale et une tension ($\gamma = -1$) et les plus petites pour le cas d'un chargement de compression biaxiale ($\gamma = 1$).Cependant, cet ordre est modifié dans la zone de traction .A partir des courbes charge-fréquence, les charges critiques de flambement peuvent être déterminées d'une façon indirecte par une analyse de vibration à travers les courbes charge-fréquence qui correspondent à des fréquences naturelles nulles .

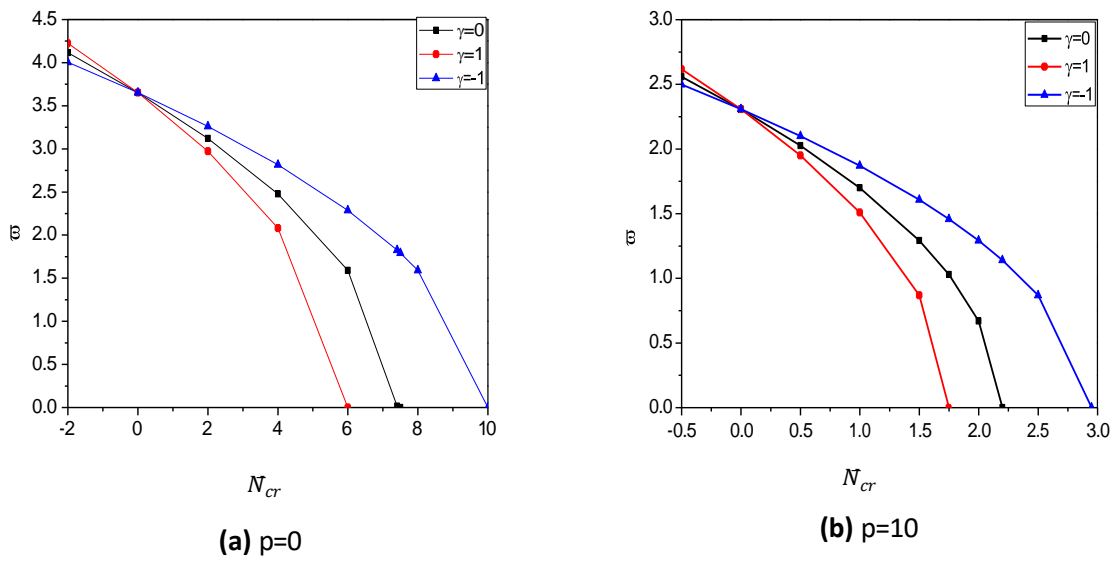


Figure (IV-4) : influence des charges axiales sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle des plaques P-FGM (Al/Al₂O₃) (a/b=0.5 , a/h=10)

IV.1.3. Etude comparative entre les plaques P-FGM et S-FGM :

Dans cette partie, une étude comparative sur le comportement statique, de flambement et dynamique des plaques P-FGM et S-FGM est effectuée.

Dans la figure IV-5, on a présenté la variation de la flèche non dimensionnelle avec le rapport $\frac{a}{h}$ pour des plaques P-FGM et S-FGM, en envisageant deux valeurs de l'indice matériel (p=1 et 5) .A travers cette figure, on a constaté que les plaques S-FGM sont les plus rigides puisqu'elle prédit une flèche inférieure au cas des plaques P-FGM .

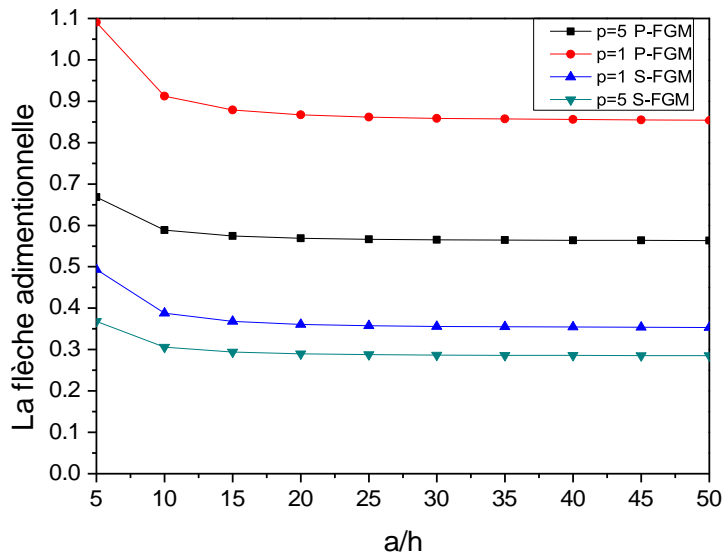


Figure (IV-5) : Variation de la flèche non-dimensionnelle avec le rapport a/h pour des plaques carrées P-FGM et S-FGM (Al/Al_2O_3)

Dans les figure IV-6 et IV-7, on a présenté la variation de la fréquence fondamentale et de la charge critique de flambement avec le rapport $\frac{a}{h}$. Comme est prévu, les plaques S-FGM sont les plus rigides puisqu'elles prédisent une valeur importante de la charge critique par rapport au cas constaté dans les plaques P-FGM.

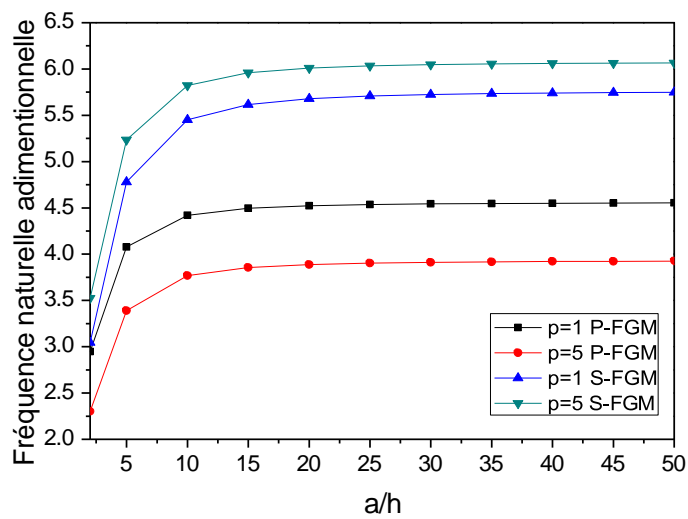


Figure (IV-6) : Variation de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle avec le rapport a/h pour des plaques carrées P-FGM et S-FGM (Al/Al_2O_3)

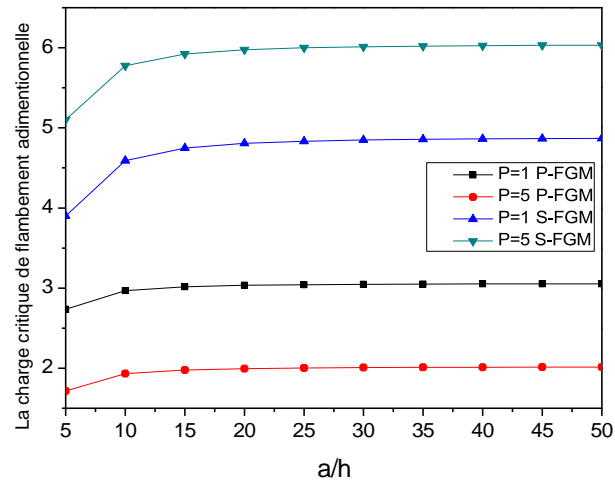


Figure (IV-7) : Variation de la charge critique de flambement non-dimensionnelle avec le rapport a/h pour des plaques rectangulaires ($a/b=0,5$) P-FGM et S-FGM (Al/Al₂O₃)

Conclusion général

CONCLUSION

Dans ce travail, une théorie hyperbolique de déformation de cisaillement est utilisée pour l'analyse des comportements statiques, dynamiques et de flambement des plaques P-FGM, E-FGM et S-FGM. La théorie considère une distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement transverse, et satisfait les conditions de la contrainte de cisaillement nulle au surface supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation de coefficient de correction de cisaillement. La théorie proposée contient seulement quatre inconnus et quatre équations de mouvement qui sont déterminées à partir du principe d'Hamilton. Les solutions de Navier sont utilisées pour résoudre les équations de mouvement. Les effets de l'indice matériel et du rapport de dimension sur la flèche, les contraintes, la charge critique du flambement et les fréquences naturelles ainsi que les courbes charge-fréquence sont analysées. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les différentes théories d'ordre élevé et se rapprochent des résultats prédits par les modèles 3D dans plusieurs cas. En conclusion on peut dire que la théorie proposée est simple et efficace dans l'analyse des problèmes statiques, dynamiques et de flambement des plaques FG's.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

- [Akhavan, 2009] khavan, H., HosseiniHashemi, Sh., RokniDamavandiTaher, 356 H., Alibeigloo, A., Vahabi, Sh.: Exact solutions for rect- 357 angularMindlin plates underin-planeloadsresting on 358 Pasternak elasticfoundation. Part II: Frequency analysis. 359 Comput.Mater. Sci. 44, 951–961 (2009)
- [Aydogdu ,2008] Aydogdu, M.: Conditions for functionally graded plates to remain flat under in-plane loads by classical plate theory.Compos. Struct. 82, 155–157 (2008)
- [Baferani, 2011] Baferani, A.H., Saidi, A.R., Jomehzadeh, E.: An exact solution for free vibration of thin functionally graded rectangularplates. Proc. Inst. Mech. Eng. Part C 225, 526–536 (2011)
- [Baron, 2008] C. Baron., S. Naili, Propagation d’ondes élastiques au sein d’un guide d’ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.
- [Benveniste, 1987] Benveniste Y.: A new approach to the application of Mori–Tanaka’s theory in composite materials. *Mech. Mater.* 6,147–157 (1987)
- [Bishop, 1993] A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.
- [Boch, 1986] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al_2O_3/ZrO_2 laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192,1986.).
- [Bodaghi, 2010] Bodaghi, M., Saidi, A.R.: Levy-type solution for bucklinganalysis of thick functionally graded rectangular platesbased on the higher-order shear deformation plate theory.*Appl. Math.Model.* 34, 3659–3673 (2010)
- [Carrera,2008] Carrera, E., Brischetto, S., Robaldo, A.: Variable kinematicmodel for the analysis of functionally graded materialplates. *AIAA J.* 46(1), 194–203 (2008)

- [Chen,2006] Chen, C.S., Chen, T.J., Chien, R.D.: Nonlinear vibration of initially stressed functionally graded plates. *Thin-Walled Struct.* 44(8), 844–851 (2006)
- [Chen,2009] Chen, C., Hsu, C., Tzou, G.: Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory. *J. Reinf. Plast. Compos.* 28, 1215–1234 (2009)
- [Cheng, 1999] Cheng, Z.Q., Kitipornchai, S.: Membrane analogy of buckling and vibration of inhomogeneous plates. *ASCE J. Eng. Mech.* 125(11), 1293–1297 (1999)
- [Croce, 2004] Croce, L.D., Venini, P.: Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 193, 05–725 (2004)
- [Delale, 1983] F. Delale., F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614, 1983.
- [Efraim,2007] Efraim, E., Eisenberger, M.: Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates. *J. Sound Vib.* 299, 720–738 (2007)
- [El Meiche, 2011] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia : Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour le flambement et la vibration de plaque sandwich à gradation fonctionnelle. *International Journal of Mechanical Sciences*, 237–247, (2011).
- [Feldman,1997] Feldman, E., Aboudi, J.: Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading. *Compos. Struct.* 38, 29–36 (1997)
- [Gasik, 1998] Gasik, M.M.: Micromechanical modelling of functionally graded materials. *Comput. Mater. Sci.* 13, 42–55 (1998)
- [Grover,2013] Grover, N., Maiti, D., Singh, B.: A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates. *Compos. Struct.* 95, 667–675 (2013)
- [Hadji, 2011] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A : Sans vibrations de plaque sandwich fonctionnellement classés en utilisant quatre variables théorie raffinée de la plaque. *Applied Mathematics and Mechanics*, 925–942, (2011).

- [Hildebrand, 1949] F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833, (1949).
- [Hill,1952] Hill, R.: The elastic behavior of a crystalline aggregate. Proc.Phys. Soc. 65, 349–354 (1952)
- [Hosseini-Hashemi, 2011] Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.R.: A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates. Int.J. Mech. Sci. 53, 11–22 (2011)
- [Hosseini-Hashemi, 2011] Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.: Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure. Compos.Struct. 93(2), 722–735 (2011)
- [Javaheri,2002] Javaheri, R., Eslami, M.: Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. J. Appl. Math. Mech.82, 277–283 (2002)
- [Jha,2013] Jha, D.K., Kant, T., Singh, R.K.: Free vibration response of functionally graded thick plates with shear and normal deformations effects. Compos.Struct. 96, 799–823 (2013)
- [Jha,2013] Jha, D.K., Kant, T., Singh, R.K.: A critical review of recent research on functionally graded plates. Compos.Struct. 96, 833–849 (2013)
- [Kant, 2002] T. Kant., K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. Composite. Structure; 56 (4): 329-344, (2002).
- [Karama, 2003] M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [Koizumi, 1992] M. Koizumi, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. Ceram. Eng. Sci. Proc; 13 (7-8): 333-347, 1992.
- [Koizumi, 1997] M. Koizumi, FGM activities in Japan. Composites; 28 (1-2):1– 4. 1997

- [Kokini, 1990] K. Kokini., Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 31-36, 1990,
- [Liew, 2003] Liew, K.M., Yang, J., Kitipornchai, S.: Postbuckling of piezoelectricFGM plates subject to thermo-electro-mechanicalloading. *Int. J. Solids Struct.* 40, 3869–892 (2003)
- [Mahdavian, 2009] Mahdavian, M.: Buckling analysis of simply-supported functionallygraded rectangular plates under non-uniform inplane compressive loading. *J. Solid Mech.* 1, 213–225(2009)
- [Mahi, 2015] Mahi ,A. AddaBedia E,A . Tounsi ,A . ,”New hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic,functionallygraded,sandwich and laminated composite plates; appl-math modelling (in press) (2015)
- [Mantari, 2012] Mantari, J., Soares, C.G.: Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Compos.Struct.* 94(8), 2561–2575(2012)
- [Mantari, 2012] Mantari, J.L., Oktem, A.S., Soares, O.G.: Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. *Compos.Struct.* 94, 714–723(2012)
- [Mantari, 2013] Mantari, J., Soares, C.G.: A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates. *Compos. Part B* 45(1), 268–281 (2013)
- [Matsunaga, 2008] Matsunaga, H.: Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory. *Compos.Struct.* 82, 499–512 (2008)
- [Mindlin, 1951] R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38, (1951).
- [Mistler, 1973] R. E. Mistler, High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, *Am. Ceram. Soc. Bull*; 52 (11): 850-854, (1973).
- [Mohammadi,2010] Mohammadi, M., Saidi, A.R., Jomehzadeh, E.: A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges. *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C* 224, 1831–1841 (2010)

- [Mohammadi,2010] Mohammadi, M., Saidi, A., Jomehzadeh, E.: Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates. *Appl. Compos. Mater.* 17, 81–93 (2010)
- [Moya, 1992] J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO, Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, (1992).
- [Naderi,2010] Naderi, A., Saidi, A.: On pre-buckling configuration of functionally graded Mindlin rectangular plates. *Mech. Res Commun.* 37, 535–538 (2010)
- [Naghdi, 1957] P. M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math.* 14: 369-380, (1957).
- [Neves,2012] Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N., Soares, C.M.M.: A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct.* 94, 1814–1825 (2012)
- [Neves,2012] Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Roque, C.M.C., Cinefra, M., Jorge, R.M.N., Soares, C.M.M.: A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Part B* 43, 711–725 (2012)
- [Neves,2013] Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N., Soares, C.M.M.: Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Compos. Part B* 44, 657–674 (2013)
- [Nguyen, 2007] T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, (2007).
- [Nguyen, 2014] Nguyen T;K A higher –order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials .*Int J Mech Des* (2014)
- [Okamura, 1991] H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9, (1991).
- [Pradyumna,2008] Pradyumna, S., Bandyopadhyay, J.N.: Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation. *J. Sound Vib.* 318, 176–192(2008)

- [Praveen,1998] Praveen, G.N., Reddy, J.N.: Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *Int.J. Solids Struct.* 35, 4457–4476 (1998)
- [Qatu,1993] Qatu, M.S., Leissa, A.W.: Buckling or transverse deflections of Unsymmetrically laminated plates subjected to in-planeloads. *AIAA J.* 31, 189–194 (1993)
- [Reddy, 1984] J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752, (1984).
- [Reddy, 1997] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, (1997).
- [Reddy, 1999] J.N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia, (1999).
- [Reddy, 2000] Reddy, J.N.: Analysis of functionally graded plates. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 47, 663–684 (2000)
- [Reddy, 2002] Reddy, J.N., Cheng, Z.Q.: Frequency correspondence between membranes and functionally graded spherical shallow shells of polygonal planform. *Int. J. Mech. Sci.* 44(5), 967–985 (2002)
- [Reddy,2011] Reddy, J.N.: A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates. *Int. J. Aerosp. Lightweight Struct.* 1, 1–21 (2011)
- [Reissner, 1945] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech*;12 (2): 69-77, 1945
- [Reiter,1997] Reiter, T., Dvorak, G.J.: Micromechanical models for graded composite materials. *J. Mech. Phys. Solids* 45, 1281–1302(1997)
- [Reiter,1998] Reiter, T., Dvorak, G.J.: Micromechanical models for graded composite materials: thermomechanical loading. *J. Mech.Phys. Solids* 46, 1655–1673 (1998)
- [Shyang-ho, 2003] Chi .Shyang-ho., ChungYen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings.*Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.

- [Steffens, 1990] H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 139-43, (1990)
- [Takahashi, 1990] M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya, Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 129-34, (1990).
- [Talha,2012] Talha, M., Singh, B.N.: Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl. Math. Model.* 34, 3991–4011 (2010)
- [Thai,2012] Thai, H.T., Choi, D.H.: An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates. *Appl. Math. Model.* 36, 1008–1022 (2012)
- [Thai,2013] Thai, H.T., Kim, S.E.: A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct.* 96, 65–173 (2013)
- [Thai,2013] Thai, H.T., Vo, T.P.: A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates. *Appl. Math. Model.* 37, 3269–3281 (2013)
- [Thai,2014] Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., Vo, T.P., Lee, J.: Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. *Eur. J. Mech.* 45, 211–225 (2014)
- [Touratier, 1991] M. Touratier, An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc.* 29 (8): 901-916, 1991.
- [Uymaz, 2007] Uymaz, B., Aydogdu, M.: Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions. *J. Reinf. Plast. Compos.* 26(18), 1847–1863 (2007)
- [Vel, 2004] Vel, S.S., Batra, R.C.: Three dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *J. Sound Vib.* 272, 703–730 (2004)
- [Wu, 2010] Wu, C.-P., Li, H.-Y.: An rmtv-based third-order shear deformation theory of multilayered functionally graded material plates. *Compos. Struct.* 92(10), 2591–2605 (2010)

- [Wu, 2011] Wu, C.-P., Chiu, K.-H.: Rmvt-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D free vibration analysis of multilayered composite and FGM plates. *Compos. Struct.* 93(5), 1433–1448 (2011)
- [Zenkour, 2006] Zenkour, A.M.: Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded materials. *Appl. Math. Model.* 30, 67–84 (2006)
- [Zenkour, 2013] Zenkour, A.M.: A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl. Math. Model.* 37(20–21), 9041–9051 (2013)
- [Zhao, 2009a] Zhao, X., Lee, Y.Y., Liew, K.M.: Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct.* 90, 161–171 (2009a)
- [Zhao, 2009b] Zhao, X., Lee, Y.Y., Liew, K.M.: Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *J. Sound Vib.* 319, 918–939 (2009b)
- [Zhong, 2007] Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*; 67 (3-4): 481-488, 2007.