الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Zabana de Relizane
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques

MEMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de MASTER en :

Géométrie différentielle

Intitulé

Résultats d'existence des solutions d'un système des équations différentielles impulsives du second ordre

Présenté par :

Mlle : Bendjilali Kheira Hadjer

Devant les membres de jury :

Président : Mr Guendouz Chiekh	Maître de conférence (B) A(U. Relizane)
Encadreur : Mlle Kadari Halima	Maître de conférence (B) A (U. Relizane)
Examinateur : Mr Beddani Abdallah	Maître de conférence (A) A (U. Relizane)

Année universitaire : 2024/2025

Dédicace

Je dédie ce travail :

À moi-même, une âme ambitieuse qui n'a jamais cessé de rêver et d'avancer.

À ma mère, puis ma mère, puis encore ma mère.
Ma chère maman, la plus précieuse à mes yeux.
Ce succès est le fruit de ton amour, de ta fatigue et de tes prières.

À mon père, merci pour ta présence et ta sagesse.

À mes frères et leurs enfants : vous êtes la joie de mon cœur et de ma vie.

À l'épouse de mon frère, merci pour ta présence et ton soutien constant.

À mon amie Anfel, merci pour ton amitié sincère.
Et à tous mes amis.

À nos martyrs palestiniens : paix à vos âmes.

Merci !

Remerciements

Je remercie Allah, qui m'a donné la force, la volonté et le moral pour terminer mes études de master en mathématiques. Je Lui demande de me guider toujours vers le bien.

Un grand merci à mon encadrante, Mlle Kadari Halima, pour son aide précieuse, sa présence bienveillante et sa grande gentillesse.

Je tiens également à remercier Monsieur Guendouz Cheikh, *Maître de conférences classe B à l'Université de Relizane, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.*

Mes remerciements les plus respectueux vont aussi à Monsieur Beddani Abdallah, *Maître de conférences classe A à l'Université de Relizane, qui m'a fait l'honneur de prendre connaissance de ce travail et d'en être l'examinateur.*

Je remercie mes parents pour leur amour et leur soutien, ainsi que mes frères pour leur présence à mes côtés.

Je remercie également l'ensemble des enseignants du département de mathématiques.

Table des matières

Introduction

La théorie des équations différentielles impulsives est devenue importante dans certains modèles mathématiques des processus réels et des phénomènes étudiés dans les domaines de la physique, de la technologie chimique, de la dynamique des populations, de la biotechnologie et de l'économie. L'étude des équations différentielles impulsives a débuté dans les années 1960 avec les travaux de Milman et Myshkis. Après une période de recherche active, principalement en Europe de l'Est de 1960 à 1970, cette étude a culminé avec le monographe de Halanay et Wexler.

Plusieurs écoles mathématiques ont été créées, pour suivant la recherche scientifique sur la théorie fondamentale et qualitative des équations différen-tielles impulsives et leurs applications au début des années 1980. Par exemple, on peut consulter les livres et articles suivants : [3, 12, 13, 16, 28, 36] ainsi que les papiers [8, 11, 19, 20, 29, 33, 38, 40, 41].

Récemment, les systèmes d'équations différentielles ordinaires ont été largement étudiés. Par exemple, dans [5, 21–24], les auteurs ont étudié l'existence de solutions pour un système d'équations différentielles en utilisant des versions vectorielles des théorèmes des points fixes. Bolojan et Precup [5] ont étudié des systèmes différentielles implicites du premier ordre avec des conditions non locales en utilisant une version vectorielle du théorème de Krasnosel'skii, des normes vectorielles et des matrices ayant un rayon spectral inférieur à un.

Perov [25] a considéré le problème de Cauchy pour un système d'équations différentielles ordinaires en utilisant les principes des points fixes de Perov, Schauder et Leray-Schauder combinés avec une technique basée sur des matrices à valeurs vectorielles qui convergent vers zéro.

Les systèmes de problèmes aux limites impulsifs ordinaires ont été étudiés par plusieurs auteurs, tels que Berrezoug, Henderson et Ouahab [4], Bolojan et Precup [5], E.K. Lee et Y. H. Lee [17], Liu, Hu et Wu [18], Radhakrishnan et Balachandran [27], Sun, Chen, Nieto et M. Otero-Novoa [30], Greaf, Kadari, Ouahab and Oumenseur [1, 14, 15].

Dans ce mèmoire, nous nous intéressons aux problèmes aux limites et aux systèmes d'équations différentielles impulsives, et nous dérivons certains résultats d'existence, entre autres. Nos résultats sont basés sur une version vectorielle des théorèmes des points fixes. Nous avons organisé cette thèse comme suit :

Dans le **Chapter 1**, nous présentons les résultats d'existence et d'unicité pour le système d'équations différentielles impulsives d'ordre deux avec deux conditions aux limites :

$$-u_1''(t) = f_1(t, u_1(t), u_2(t)), \quad t \in J', \tag{1}$$
$$-u_2''(t) = f_2(t, u_1(t), u_2(t)), \quad t \in J', \tag{2}$$
$$-\Delta u_1' \mid_{t=t_k} = I_{1,k} u_1(t_k), \quad k = 1, 2, \cdots, m, \tag{3}$$
$$-\Delta u_2' \mid_{t=t_k} = I_{2,k} u_2(t_k), \quad k = 1, 2, \cdots, m, \tag{4}$$
$$\alpha u_1(0) - \beta u_1'(0) = 0, \ \alpha u_2(0) - \beta u_2'(0) = 0, \tag{5}$$
$$\gamma u_1(1) + \delta u_1'(1) = 0, \ \gamma u_2(1) + \delta u_2'(1) = 0, \tag{6}$$

Où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, $\rho = \beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\delta > 0$, $J = [0, 1]$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < 1$, $J' = J \setminus \{t_1, t_2, \cdots, t_m\}$, $f_i \in C(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $I_{i,k} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $i = 1, 2$, $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$, $\Delta u' \mid_{t=t_k} = u_1(t_k^+) - u_1(t_k^-)$ et $\Delta u_2' \mid_{t=t_k} = u_2(t_k^+) - u_2(t_k^-)$ sont utilisées, où $u_1'(t_k^+)$, $u_2'(t_k^+)$, $u_1'(t_k^-)$, et $u_2'(t_k^-)$) désignent les limites à droite et à gauche de $u_1'(t)$ et $u_2'(t)$ at $t = t_k$, respectivement. On définit $J_0 = [0, t_1]$, $J_k = (t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, \cdots, m$, $t_{m+1} = 1$, et on laisse y_k être la restriction de la fonction y à l'intervalle J_k.
Ces deux approches, le théorème du point fixe de Perov et l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder, utilisent des matrices convergentes.

Chapter 2 traite de l'existence de solutions pour un système d'équations différentielles impulsives du second ordre avec des conditions aux limites intégrales sur un domaine non borné.

$$-u''(t) = f(t, u(t), v(t)), \quad t \in J, \ t \neq t_k, \tag{7}$$
$$-v''(t) = g(t, u(t), v(t)), \quad t \in J, \ t \neq t_k, \tag{8}$$
$$\Delta u(t_k) = J_{1,k}(u(t_k)), \quad -\Delta u'(t_k) = I_{1,k}(u(t_k)), \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{9}$$
$$\Delta v(t_k) = J_{2,k}(v(t_k)), \quad -\Delta v'(t_k) = I_{2,k}(v'(t_k)), \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{10}$$
$$u(0) = \int_0^\infty h_1(s) u(s) ds, \quad u'(\infty) = 0, \tag{11}$$
$$v(0) = \int_0^\infty h_2(s) v(s) ds, \quad v'(\infty) = 0, \tag{12}$$

Soit $J = [0, +\infty)$, $f, g \in C(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$, $\quad t_k \to +\infty$. Les fonctions $I_{i,k}, J_{i,k} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour $i = 1, 2$, et $h_i \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telles que $\int_0^\infty h_i(s)\, ds \neq 1$, $\quad$ pour $i = 1, 2$. On définit $u'(\infty) = \lim_{t \to \infty} u(t)$, $\quad v'(\infty) = \lim_{t \to \infty} v(t)$, et les sauts aux points t_k par $\Delta u(t_k) = u(t_k^+) - u(t_k^-)$, $\quad \Delta v(t_k) = v(t_k^+) - v(t_k^-)$, où $u(t_k^+)$ et $v(t_k^+)$ (respectivement $u(t_k^-)$ et $v(t_k^-)$) désignent les limites à droite (respectivement à gauche) de $u(t)$ et $v(t)$ en $t = t_k$. De même pour les dérivées $\Delta u'(t_k) =$

$u'(t_k^+) - u'(t_k^-), \quad \Delta v'(t_k) = v'(t_k^+) - v'(t_k^-)$, où $u'(t_k^+)$ et $v'(t_k^+)$ (respectivement $u'(t_k^-)$ et $v'(t_k^-)$) sont les limites à droite (respectivement à gauche) de $u'(t)$ et $v'(t)$ en $t = t_k$. Les problèmes aux limites avec des conditions aux limites intégrales sur un domaine non borné pour différentes classes de systèmes d'équations différentielles sont intensivement étudiés dans la littérature à l'aide de diverses méthodes (voir [9, 10, 34, 39]).

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les notations, définitions, lemmes et théorèmes du point fixe qui seront utilisés tout au long de ce mémoire.

1.1 Quelques notations et définitions.

Soit $C(J,\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues de J dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y(t)| : 0 \leq t \leq T\},$$

Soit $L^1(J,\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions $y : J \to \mathbb{R}$ qui sont intégrables au sens de Lebesgue, avec la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^b |y(t)|dt.$$

$AC(J,\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions $y : J \to \mathbb{R}$, absolument continues, et $AC^1(J,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions différentiables
$y : J \to \mathbb{R}$, dont la dérivée première, y' est absolument continue.

Définition 1.1.1. *On dit que $f_i : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^r$, $i = 1,2$, est une fonction L^1-Carathéodory si elle satisfait les conditions suivantes :*

1. *$f_i(\cdot, x, y)$ sont mesurable pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$,*
2. *$f_i(t,\cdot,\cdot)$ sont continues pour presque par tout $t \in [0,1]$,*
3. *Pour tout $r_1,\ r_2 > 0$, il existe une fonction $\Phi_{r_1,r_2} \in \mathrm{L}^1([0,+\infty))$ tel que*

$$|f(t,x,y)| \leq \Phi_{r_1,r_2}(t),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $|x| \leq r_1$, $y \in \mathbb{R}^p$ avec $|y| \leq r_2$, et presque par tout $t \in [0,1]$.

1.2 Espace métrique vectoriel

Les espaces métriques sont très importants en mathématiques et dans les sciences appliquées. Dans [2, 7], certains résultats de la théorie des espaces métriques sont généralisés à la théorie des espaces métriques vectoriels, et certains théorèmes de point fixe dans les espaces métriques vectoriels sont donnés.

1.2.1 Espace métrique généralisé

Dans cette partie, nous considérons la notation et la définition de l'espace métrique généralisé au sens de Perov.

Définition 1.2.1. *Soit X un ensemble non vide. Une distance généralisée sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes :*
(i) $d(u, v) \geq 0$ pour tous $u, v \in X$, et si $d(u, v) = 0$, alors $u = v$;
(ii) $d(u, v) = d(v, u)$ pour tous $u, v \in X$;
(iii) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ pour tous $u, v, w \in X$.

Ici, si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, Par $x \leq y$ nous entendons $x_i \leq y_i$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$.

On note que (X, d) un *espace métrique généralisé* avec

$$d(x, y) = \begin{pmatrix} d_1(x, y) \\ \vdots \\ d_n(x, y) \end{pmatrix}.$$

On remarque que d est une métrique généralisée sur X si et seulement si d_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, sont des métriques X.
soit (X, d) un espace métrique généralisé au sens de Perov. Ainsi, si $x, r \in \mathbb{R}^n$, $x := (x_1, \cdots, x_n)$,et $r := (r_1, \cdots, r_n)$, alors par $x \leq r$ nous entendons $x_i \leq r_i$, pour chaque $i \in \{i, \cdots, n\}$ et par $x < r$ nous entendons $x_i < r_i$, pour chaque $i \in \{i, \cdots, n\}$. De plus,, $|x| := (|x_1|, \cdots, |x_n|)$. Si, $x, y \in R^n$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$, alors $\max(x, y) = \max(\max(x_1, y_1), \cdots, \max(x_n, y_n))$. If $c \in \mathbb{R}$, alors $x \leq c$ nous entendons $x_i \leq c$ pour chaque $i = 1, \cdots, n$.

Définition 1.2.2. *Un ensemble X muni d'un ordre partiel $\leq$ est appelé une relation d'ordre partiel. Dans un $(X, \leq)$ la notation $x < y$ signifie $x \leq y$ et $x \neq y$. Un intervalle d'ordre $[x, y]$ est l'ensemble $\{z \in X \ : \ x \leq z \leq y\}$.*
On remarque que si $x \nleq y$, alors $[x, y] = \emptyset$.

Soit (X, d) un espace métrique généralisé. Nous définissons les espaces métriques suivants :
Soit $X = \prod_{i=1}^{n} X_i, \ i = 1, \cdots, n$. Considérons $\prod_{i=1}^{n} X_i$ muni de $\bar{d}$ définie par :

$$\bar{d}((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i).$$

L'espace diagonal de $\prod_{i=1}^{n} X_i$ est défini par :

$$\bar{X} = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i : x_i \in X,\ i = 1, \cdots, n \right\}.$$

C'est donc un espace métrique avec la distance suivante :

$$d_*((x, \cdots, x), (y, \cdots, y)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x, y).$$

Intuitivement, Xet $\bar{X}$ sont équivalents. Cela est montré dans le résultat suivant.

Lemme 1.2.1. *Soit (X, d) un espace métrique généralisé. Alors, il existe un homéomorphisme $h : X \to \bar{X}$.*

1.2.2 Espace de Banach généralisé

Définition 1.2.3. *Soit E un espace vectoriel métrique sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^n_+$ est appelée une norme sur E si elle satisfait les propriétés suivantes :*

(*i*) $\|x\| = 0$ *alors* $x = (0, \cdots, 0)$;

(*ii*) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *pour* $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$;

(*iii*) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *pour chaque* $x,\ y \in E$.

Remarque 1.2.1. *Le couple $(E, \|.\|)$ est appelé un espace normé généralisé. Si la métrique généralisée générée par $\|.\|$ (c'est-à-dire $d(x, y) = \|x - y\|$) est complète, alors l'espace $(E, \|.\|)$ est appelé un espace de Banach généralisé.*

$$\|x - y\| = \begin{pmatrix} \|x - y\|_1 \\ \vdots \\ \|x - y\|_n \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.4. *Soit E un ensemble non vide et soit $\|.\| : E \to \mathbb{R}^n_+$ une norme sur E. Alors, le couple $(E, \|.\|)$ est appelé un espace normé généralisé. Si, de plus, $(E, \|.\|)$ ha la propriété que toute suite de Cauchy provenant de X est convergente en norme, alors on dit que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach généralisé.*

Soit $C(J, \mathbb{R}) \times C(J, \mathbb{R})$ muni de la *norme vectorielle* $\|\cdot\|$ définie par $\|v\|_\infty = (\|u_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty)$ pour $v = (u_1, u_2)$. Il est clair que $(C(J, \mathbb{R}) \times C(J, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach généralisé.

1.2.3 Propriétés et éléments topologiques

Dans le cas des espaces métriques généralisés au sens de Perov, les notations de suite convergente, suite de Cauchy, complétude, ensemble ouvert et fermé sont similaires à celles des espaces métriques usuels. De plus, ce qui suit présente certains éléments de topologie (voir, par exemple, P. P. Zabrejko [35], E. Zeidler [37]).

Définition 1.2.5. *[7] Soit (X, d) un espace métrique généralisé. Un sous-ensemble.$A \subset X$ est dit ouvert si, pour tout $x \in A$, il existe $r \in \mathbb{R}^n_+$ avec $r > 0$ tel que $B(x_0, x) \subset A$, où $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$ désigne la boule ouverte centrée en x_0 de rayon r, toute boule ouverte est un ensemble ouvert et la collection de toutes les boules ouvertes génère la topologie métrique généralisée sur X.*

Soit

$$\overline{B(x_0, r)} = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

la boule fermée centrée en $x_0$de rayon r

Définition 1.2.6. *Soit (X, d) un espace métrique généralisé. Une suite b_n dans X est dite une suite de Cauchy si, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq N$, on a $d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

Définition 1.2.7. *Un espace métrique généralisé (X, d) est dit complet si chaque suite de Cauchy dans X converge vers une limite dans X.*

Définition 1.2.8. *Soit (X, d) un espace métrique généralisé. On dit qu'un sous-ensemble $Y \subset X$ est fermé si, pour toute suite $x_n \subset Y$ telle que $x_n \to x$, on a $x \in Y$.*

Définition 1.2.9. *Soit (X, d) un espace métrique généralisé. Un sous-ensemble C de X est dit compact si toute couverture ouverte de C admet un sous-ensemble fini couvrant.*
Un sous-ensemble C de X est dit séquentiellement compact si toute suite dans C contient une sous-suite convergente dont la limite appartient à C.

Définition 1.2.10. *Un ensemble C d'un espace topologique est dit relativement compact si s'adhérence est compacte, c'est-à-dire si $\overline{C}$ est compacte. L'ensemble Cest séquentiellement relativement compact si toute suite dans C contient une sous-suite convergente (la limite n'ayant pas besoin d'appartenir à C), c'est-à-dire si $\overline{C}$est séquentiellement compact.*

1.2.4 Matrice convergente

Dans cette section, on s'interese à l'étude de quelques propriétées d'une matrice convergente.

Définition 1.2.11. *Une matrice carrée de nombres réels est dite convergente vers zéro si et seulement si son rayon spectral $\rho(M)$ est strictement inférieur à 1*

En d'autres termes, toutes les valeurs propres de M se trouvent dans le disque unité ouvert, c'est-à-dire $|\lambda| < 1$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\det(M - \lambda I) = 0$, où I désigne la matrice identité dans $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Théorème 1.2.2. [31] *Soit $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$; les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *M est convergente vers zéro ;*
(*b*) *$M^k \to 0$ lorsque $k \to \infty$;*
(*c*) *La matrice $(I - M)$ est non singulière et*

$$(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \cdots + M^k + \cdots;$$

(*d*) *La matrice $(I-M)$ est non singulière et $(I-M)^{-1}$ a des éléments non négatifs.*

Quelques exemples des matrices convergentes vers zéro, $A \in M_{n\times n}$, qui satisfont également la propriété $(I - A)^{-1}|I - A| \leq I$ sont :

1. $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{R}_+$ *and* $\max(a, b) < 1$
2. $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ *and* $a + b < 1,\ c < 1$
3. $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ et $|a - b| < 1, a > 1,\ b > 0.$

Lemme 1.2.3. [32] *Soit*

$$Q = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

où $a, b, c, d \geq 0$ et $\det Q > 0$. alors Q^{-1} est préservant l'ordre.

Lemme 1.2.4. [6] *Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ une matrice telle que $\rho(A) < 1$, alors $\rho(A + B) < 1$ pour chaque matrice $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ dont les éléments sont suffisamment petits.*

1.2.5 Quelques théorème du point fixe

La théorie des points fixes joue un rôle majeur dans de nombreux principes d'existence, c'est pourquoi nous énoncerons les théorèmes des points fixes dans les espaces de Banach généralisés. Le but de cette section est de présenter la version de l'alternative non linéaire de type Leary-Schauder dans les espaces de Banach généralisés.

Définition 1.2.12. *Soit (X, d) un espace métrique généralisé. Un opérateur $T : X \to X$ est dit contractant associé à la métrique d sur X, s'il existe une matrice convergente vers zéro M telle que*

$$d(T(x), T(y)) \leq M d(x, y) \quad \text{pour tous } x, y \in X.$$

Théorème 1.2.5. ([25], [26]) (Théorème du point fixe de Perov) *Supposons que (X, d) soit un espace métrique généralisé complet et que $T : X \to X$ soit un opérateur contractant avec une matrice de Lipschitz M. Alors T possède un unique point fixe u, et pour chaque $u_0 \in X$,*

$$d(T^k(u_0), u) \leq M^k(I - M)^{-1}d(u_0, T(u_0)) \quad \text{où } k \in \mathbb{N}.$$

Théorème 1.2.6. [25] (Schauder).
Soit X un espace de Banach, $D \subset X$ un ensemble convexe fermé borné non vide et $T : D \to D$ un opérateur complètement continu (c'est-à-dire que T est continu et que $T(D)$ est relativement compact). Alors T possède au moins un point fixe.

Comme conséquence du théorème de point fixe de Schauder, nous présentons la version de l'alternative non linéaire du théorème de point fixe de type Leary-Schauder dans un espace de Banach généralisé.

Théorème 1.2.7. [13] *Soit $C \subset E$ un sous-ensemble convexe fermé et $U \subset C$ un voisinage ouvert borné de zéro (par rapport à la topologie de C). Si $G : \overline{U} \to E$ est une application compacte continue, alors*
i) soit G a un point fixe dans $\overline{U}$, soit
ii) il existe $x \in \partial U$ tel que $x = \lambda G(x)$ pour un certain $\lambda \in (0, 1)$.

Théorème 1.2.8. [13] (Théorème du point fixe de krasnoselskii.) *Soit X un espace de Banach généralisé. Supposons que T et B soient deux opérateurs $X \to X$ tels que :*
$(\mathcal{A}_1)$ *T soit un opérateur complètement continu.*
$(\mathcal{A}_2)$ *B soit un opérateur continu et M-contraction.*
$(\mathcal{A}_3)$ *la matrice $I - M$ possède la propriété absolue.*
Si

$$\mathcal{M} = \left\{ x \in X \mid \quad \lambda T(x) + \lambda B\left(\frac{x}{\lambda}\right) = x \right\}$$

est borné pour tout $0 < \lambda < 1$. Alors l'équation

$$x = T(x) + B(x), \quad x \in X,$$

admet au moins une solution.

Chapitre 2

Système des équations différentielles impulsives avec deux conditions aux limites

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous établissons deux résultats concernant l'existence et l'unicité des solutions pour un système d'équations différentielles impulsives d'ordre deux, muni de deux conditions aux limites.

$$-u_1''(t) = f_1(t, u_1(t), u_2(t)), \quad t \in J', \tag{2.1}$$

$$-u_2''(t) = f_2(t, u_1(t), u_2(t)), \quad t \in J', \tag{2.2}$$

$$-\Delta u_1' \mid_{t=t_k} = I_{1,k} u_1(t_k), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.3}$$

$$-\Delta u_2' \mid_{t=t_k} = I_{2,k} u_2(t_k), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.4}$$

$$\alpha u_1(0) - \beta u_1'(0) = 0, \ \alpha u_2(0) - \beta u_2'(0) = 0, \tag{2.5}$$

$$\gamma u_1(1) + \delta u_1'(1) = 0, \ \gamma u_2(1) + \delta u_2'(1) = 0, \tag{2.6}$$

où α, β, γ, $\delta \geq 0$, $\rho = \beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\delta > 0$, $J = [0, 1]$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < 1$, $J' = J \setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$, $f_i \in C(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $I_{i,k} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $i = 1, 2$, $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$, $\Delta u' \mid_{t=t_k} = u_1(t_k^+) - u_1(t_k^-)$, et $\Delta u_2' \mid_{t=t_k} = u_2(t_k^+) - u_2(t_k^-)$ où $u_1'(t_k^+)$, $u_2'(t_k^+)$, $u_1'(t_k^-)$ et $u_2'(t_k^-)$ représentent les limites à droit et à gauche de $u_1'(t)$ et $u_2'(t)$ en $t = t_k$, respectivement. On pose $J_0 = [0, t_1]$, $J_k = (t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, m$, $t_{m+1} = 1$, et soit y_k la restriction de la fonction y to J_k.
Dans ce chapitre on considère l'espace des solutions du système (2.1)-(2.6)

$$\begin{aligned} PC^2(J, \mathbb{R}) = \{ & y \in C([0,1], \mathbb{R}) : y_k \in C^2(J_k, \mathbb{R}), \ k = 0, \ldots, m, \ \text{tels que} \\ & y'(t_k^-) \ \text{et} \ y'(t_k^+) \ \text{existe avec} \ y'(t_k) = y'(t_k^-) \ \text{pour} \ k = 1, \ldots, n\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Soient $PC^2(J,\mathbb{R}) \times PC^2(J,\mathbb{R})$ muni de la *norme vectorielle* $\|\cdot\|$ définie par $\|v\| = (\|u_1\|_{PC^2}, \|u_2\|_{PC^2})$ pour $v = (u_1, u_2)$, où $x \in PC^2(J,\mathbb{R})$, on a $\|x\|_{PC^2} = \sup_{t\in J} |x(t)| + \sup_{t\in J} |x'(t)|$. Il est clair que $(PC^2(J,\mathbb{R}) \times PC^2(J,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{PC^2})$ est un espace de Banach généralisé. Nous aurons aussi besoin

$$\begin{aligned} PCA(J,\mathbb{R}) = \{&y \in C([0,1],\mathbb{R}) : y'_k \in AC^1(J_k,\mathbb{R}),\ k = 0,\dots,m, \text{ tels que} \\ &y'(t_k^-) \text{ and } y'(t_k^+) \text{ existe avec } y'(t_k) = y'(t_k^-) \text{ pour } k = 1,\dots,n\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

muni de la *norme vectorielle* $\|\cdot\|$ definie par $\|v\| = (\|u_1\|_{PCA}, \|u_2\|_{PCA})$ pour $v = (u_1, u_2)$, où pour $x \in PCA(J,\mathbb{R})$, on pose $\|x\|_{PCA} = \sup_{t\in J} |x(t)|$.

2.2 Résultat d'existence et d'unicité

La démonstration du résultat d'existence et d'unicité des solutions de système (2.1)-(2.6) est basée essentiellement sur le théorème du point fixe de Perov.

Lemme 2.2.1. *Le vecteur* $(u_1, u_2) \in PC^2(J,\mathbb{R}) \times PC^2(J,\mathbb{R})$ *est une solution du système différentiel* (2.1)-(2.6) *si et seulement si*

$$\begin{cases} u_1(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s) f_1(s, u_1(s), u_2(s)) ds + \sum_{k=1}^m G(t,t_k) I_{1,k}(u_1(t_k)), \\ u_2(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s) f_2(s, u_1(s), u_2(s)) ds + \sum_{k=1}^m G(t,t_k) I_{2,k}(u_2(t_k)), \end{cases} \tag{2.9}$$

où

$$G(t,s) = \frac{1}{\rho} \begin{cases} (\gamma + \delta - \gamma t)(\beta + \alpha s), 0 \le s \le t \le 1, \\ (\beta + \alpha t)(\gamma + \delta - \gamma s), 0 \le s \le t \le 1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Démonstration. Supposons que le vecteur $(u_1, u_2) \in PC^1([0,T],\mathbb{R}) \times PC^1([0,T],\mathbb{R})$ est une solution du système différentiel $(2.1) - (2.6)$.
Si $t \in [0, t_1[$ alors

$$-u_i''(t) = f_i(t, u_1(t), u_2(t)), \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

ce qui implique

$$u_i'(t) = u_i'(0) - \int_0^t f(s, u_1(s), u_2(s))\, ds \quad \text{pour } i = 1, 2. \tag{2.11}$$

En intégrant (2.11), on trouve que

$$u_i(t) = u_i(0) + u_i'(0)t - \int_0^t (t-s) f_i(s, u_1(s), u_2(s))\, ds \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Si $t \in [t_1, t_2[$ alors

$$\begin{aligned} u_i'(t) &= u_i'(t_1^+) + \int_{t_1}^{t} f_i(s, u_1(s), u_2(s))ds \\ &= -\Delta u_i'(t_1^+) + u_i'(t_1^-) - \int_{t_1}^{t} f_i(s, u_1(s), u_2(s))ds \\ &= u_i'(0) - I_{i,1}(u_i(t_1)) - \int_0^{t_2} f_i(s, u_1(s), u_2(t))\,ds - \int_{t_2}^{t} f_i(s, u_1(s), u_2(s))ds. \end{aligned}$$

D'où

$$u_i'(t) = u_i'(0) - I_{i,1}u_i(t_1) - \int_0^t f_i(s, u_1(s), u_2(s))\,ds \quad \text{pour } i = 1, 2. \tag{2.12}$$

En intégrant (2.12), on trouve que

$$u_i(t) = u_i(0) + u_i'(0)t - I_{i,1}(u_i(t_1))(t - t_1) - \int_0^t f_i(s, u_1(s), u_2(s))\,ds \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Si $t \in [t_2, t_3[$ alors

$$\begin{aligned} u_i'(t) &= u_i'(t_2^+) + \int_{t_2}^{t} f_i(s, u_1(s), u_2(s))ds \\ &= -\Delta u_i'(t_2^+) + u_i'(t_2^-) - \int_{t_2}^{t} f_i(s, u_1(s), u_2(s))ds \\ &= u_i'(0) - I_{i,1}(u_i(t_1)) - I_{i,2}(u_i(t_2)) - \int_0^{t_2} f_i(s, u_1(s), u_2(t))\,ds \\ &\quad - \int_{t_2}^{t} f_i(s, u_1(s), u_2(s))ds. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$u_i'(t) = u_i'(0) - I_{i,1}(u_i(t_1)) - I_{i,2}(u_i(t_2)) - \int_0^t f_i(s, u_1(s), u_2(s))\,ds \tag{2.13}$$

$$\text{pour } i = 1, 2.$$

En intégrant (2.13), on trouve que

$$u_i(t) = u_i(0) + u_i'(0)t - (I_{i,2}u_i(t_2) + I_{i,1}u_i(t_1))(t - t_2) - \int_0^t f_i(s, u_1(s), u_2(s))\,ds$$

$$\text{pour } i = 1, 2.$$

Si $t \in [t_k, t_{k+1}[$ alors

$$u_i'(t) = u_i'(0) - \int_0^t f_i(s, u_1(s), u_2(s))\,ds - \sum_{0<t_k<t} I_{i,k}u_i(t_k), \tag{2.14}$$

$$\text{pour } i = 1, 2.$$

En intégrant (2.14), on trouve que

$$u_i(t) = u_i(0) + u_i'(0)t - \int_0^t (t-s) f_1(s, u_1(s), u_2(s))\, ds - \sum_{0<t_k<t} I_{i,k} u_i(t_k)(t - t_k), \quad (2.15)$$

$$\text{pour } i = 1, 2.$$

En posant $t = 1$ dans (2.14) et (2.15), on trouve que

$$\begin{aligned} u_i'(1) &= u_i'(0) - \int_0^1 f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\ &\quad - \sum_{k=1}^{m} I_{i,k}(u_i(t_k)), \quad \text{pour } i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} u_i(1) &= u_i(0) + u_i'(0) - \int_0^1 (1-s) f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\ &\quad - \sum_{k=1}^{m} I_{i,k}(u_i(t_k))(1 - t_k), \quad \text{pour } i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Donc

$$\begin{aligned} \gamma u_i(1) + \delta u_i'(1) &= \gamma u_i(0) + \gamma u_i'(0) - \gamma \int_0^1 (1-s) f_i(s, u_1(s), u_2(s))\, ds \\ &\quad -\gamma \sum_{k=1}^{m} I_{i,k} u_i(t_k)(1 - t_k) + \delta u_i'(0) \\ &\quad -\delta \int_0^1 f_i(s, u_1(s), u_2(s))\, ds - \delta \sum_{k=1}^{m} I_{i,k} u_i(t_k), \quad \text{pour } i = 1, 2. \end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\begin{aligned} \gamma u_i(1) + \delta u_i'(1) &= \gamma u_i(0) + (\gamma + \delta) u_i'(0) - \int_0^1 (\gamma + \delta - \gamma s) f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\ &\quad - \sum_{k=1}^{m} I_{i,k}(u_i(t_k))(\gamma + \delta - \gamma t_k), \text{pour } i = 1, 2. \end{aligned}$$

On utilise les deux conditions $\alpha u_i'(0) - \beta u_i'(0) = 0$ et $\gamma u_i(1) + \delta u_i'(1) = 0$ on déduit que

$$\begin{cases} \alpha u_i'(0) - \beta u_i'(0) = 0, \\ \gamma u_i(0) + (\gamma + \delta) u_i'(0) = \displaystyle\int_0^1 (\gamma + \delta - \gamma s) \int_0^1 f_i(s, u_1(s), u_2(s))\, ds \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} I_{i,k} u_i(t_k)(\gamma + \delta - \gamma t_k). \end{cases} \quad (2.18)$$

La forme matricielle du système (2.18) est :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & \gamma+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^1 (\gamma+\delta-\gamma s) f_i(s, u_1(s), u_2(s))ds + \sum_{k=1}^{m} I_{i,k} u_i(t_k)(\gamma+\delta-\gamma t_k) \end{pmatrix}$$

pour $i = 1, 2.$

En appliquant la méthode de Cramer, on obtient

$$u_i(0) = \frac{\beta}{\rho}\left[\int_0^1 (\gamma+\delta-\gamma s) f_i(s, u_1(s), u_2(s))ds + \sum_{k=1}^{m} (\gamma+\delta-\gamma t_k) I_{i,k}(u_i(t_k))\right]$$

et

$$u_i'(0) = \frac{\alpha}{\rho}\left[\int_0^1 (\gamma+\beta-\gamma s) f_i(s, u_1(s), u_2(s))ds + \sum_{k=1}^{m} (\gamma+\delta-\gamma t_k) I_{i,k}(u_i(t_k))\right]$$

avec $\rho = \alpha\gamma + \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0.$
En remplaçant $u_i(0)$ et $u_i'(0)$ dans (2.15), on obtient

$$\begin{aligned} u_i(t) =& \frac{\beta}{\rho}\left[\int_0^1 (\gamma+\delta-\gamma s) f_i(s, u_1(s), u_2(s))ds + \sum_{k=1}^{m} (\gamma+\delta-\gamma t_k) I_{i,k}(u_i(t_k))\right] \\ &+ \frac{\alpha t}{\rho}\left[\int_0^1 (\gamma+\delta-\gamma s) f_i(s, u_1(s), u_2(s))ds + \sum_{k=1}^{m} (\gamma+\delta-\gamma t_k) I_{i,k}(u_i(t_k))\right] \\ &- \int_0^t (t-s) f_i(s, u_1(s), u_2(s))ds - \sum_{0<t_k<t} (t-t_k) I_{i,k}(u_i(t_k)) \quad \text{pour } i = 1, 2. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} u_i(t) =& \frac{1}{\rho}\int_0^1 (\alpha t+\beta)(\gamma+\delta-\gamma s) f_i(s, u_1(s), u_2(s))ds \\ &- \frac{1}{\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta}\int_0^t (t-s)(\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta) f_i(s, u_1(s), u_2(s)) \\ &+ \frac{1}{\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta}\sum_{k=1}^{m} (\alpha t+\beta)(\gamma+\delta-\gamma t_k) I_{i,k}(u_i(t_k)) \\ &- \frac{1}{\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta}\sum_{0<t_k<t} (t-t_k)(\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta) I_i, k(u_i(t_k)). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
u_i(t) &= \frac{1}{\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta}\int_0^t (\alpha t+\beta)(\gamma+\delta-\gamma s)f_i(s,u_i(s),u_i(s))ds \\
&+ \frac{1}{\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta}\int_t^1 (\alpha t+\beta)(\gamma+\delta-\gamma s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds \\
&- \frac{1}{\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta}\int_0^t (t-s)(\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta)f_i(s,u_1(s),u_2(s)) \\
&+ \frac{1}{\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta}\sum_{0<t_k<t}(\alpha t+\beta)(\gamma+\delta-\gamma t_k)I_{i,k}(u_i(t_k)) \\
&+ \frac{1}{\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta}\sum_{t_k>t}(\alpha t+\beta)(\gamma+\delta-\gamma t_k)I_{i,k}(u_i(t_k)) \\
&- \frac{1}{\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta}\sum_{0<t_k<t}(t-t_k)(\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta)I_i,k(u_i(t_k))
\end{aligned}$$

Après la simplification

$$\begin{aligned}
u_i(t) &= \frac{1}{\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta}\Bigg[\int_0^t (\gamma+\delta-\gamma t)(\beta+\alpha s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds \\
&+ \int_t^1 (\alpha t+\beta)(\gamma+\delta-\gamma s)f_i(s,u_i(s),u_i(s))ds \\
&+ \sum_{0<t_k<t}(\gamma+\delta-\gamma t)(\beta+\alpha t_k)I_{i,k}(u_i(t_k) \\
&+ \sum_{t_k>t}(\alpha t+\beta)(\gamma+\delta-\gamma t_k)I_{i,k}(u_i(t_k)\Bigg] \quad \text{pour} \quad i=1,2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases}
u_1(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s)f_1(s,u_1(s),u_2(s))ds + \sum_{k=1}^m G(t,t_k)I_{1,k}(u_1(t_k)), \\
u_2(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s)f_2(s,u_1(s),u_2(s))ds + \sum_{k=1}^m G(t,t_k)I_{2,k}(u_2(t_k)),
\end{cases}$$

avec G est une fonction de Green définie par :

$$G(t,s) = \frac{1}{\rho}\begin{cases}(\gamma+\delta-\gamma t)(\beta+\alpha s), 0\le s\le t\le 1, \\ (\beta+\alpha t)(\gamma+\delta-\gamma s), 0\le s\le t\le 1.\end{cases} \tag{2.19}$$

où $\rho = \alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta \neq 0$
Inversement, si le vecteur (u_1,u_2) est une solution de (2.9), Alors

$$u_i(t) = \int_0^1 G(t,s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds + \sum_{k=1}^m G(t,t_k)I_{i,k}(u_i(t_k)), \quad \text{pour } i=1,2.$$

i.e,

$$\begin{aligned}
u_i(t) &= \int_0^t \frac{1}{\rho}(\gamma+\delta-\gamma t)(\beta+\alpha s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds \\
&\quad+\int_t^1 \frac{1}{\rho}(\beta+\alpha t)(\gamma+\delta-\gamma s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds \\
&\quad+\sum_{t_k<t}\frac{1}{\rho}(\gamma+\delta-\gamma t)(\beta+\alpha t_k)I_{i,k}(u_i(t_k)) \\
&\quad+\sum_{t_k>t}\frac{1}{\rho}(\beta+\alpha t)(\gamma+\delta-\gamma t_k)I_{i,k}(u_i(t_k)),\ \text{pour } i=1,2,\ t\neq t_k,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u_i'(t) &= \frac{-\gamma}{\rho}\int_0^t(\beta+\alpha s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds+\frac{\alpha}{\rho}\int_t^1(\gamma+\delta-\gamma s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds \\
&\quad+\frac{-\gamma}{\rho}\sum_{t_k<t}(\beta+\alpha t_k)I_{i,k}(u_i(t_k)) \\
&\quad+\frac{\alpha}{\rho}\sum_{t_k>t}(\gamma+\delta-\gamma t_k)I_{i,k}(u_i(t_k)),\ \text{pour } i=1,2,\ t\neq t_k.
\end{aligned}$$

En dérivant deux fois, on obtient

$$\begin{aligned}
u_i''(t) &= \frac{1}{\rho}\left(-\gamma\int_0^t(\beta+\alpha s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds+\alpha\int_t^1(\gamma+\delta-\gamma s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds\right)' \\
&= \frac{1}{\alpha\gamma+\alpha\delta-\gamma\beta}\left(-\gamma(\beta+\alpha s)f_i(t,u_1(t),u_2(t))ds-\alpha(\gamma+\delta-\gamma s)f_i(t,u_1(t),u_2(t))\right) \\
&= -f_i(s,u_1(s),u_2(s)),\quad \text{pour } i=1,2,\ t\neq t_k.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
u_i(0) &= \frac{\beta}{\rho}\int_0^1(\gamma+\delta-\gamma s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds+\frac{\beta}{\rho}\sum_{k=1}^m(\gamma+\delta-\gamma t_k)I_{i,k}(u_i(t_k)), \\
u_i'(0) &= \frac{\alpha}{\rho}\int_0^1 f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds+\frac{\alpha}{\rho}\sum_{k=1}^m(\gamma+\delta-\gamma t_k)I_{i,k}(u_i(t_k)),
\end{aligned}$$

pour $i=1,2$, on trouve que $\alpha u_i'(0)-\beta u_i'(0)=0$ pour $i=1,2$.
Puisque,

$$u_i(1)=\frac{\delta}{\rho}\int_0^1(\beta+\alpha s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds+\frac{\delta}{\rho}\sum_{k=1}^m(\beta+\alpha t_k)I_{i,k}(u_2(t_k)),$$

et

$$u_i'(1)=-\frac{\gamma}{\rho}\int_0^1(\beta+\alpha s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds+\frac{-\gamma}{\rho}\sum_{t_k<t}(\beta+\alpha t_k)I_{i,k}(u_i(t_k)),$$

pour $i = 1, 2$, on obtient que $\gamma u_i(1) + \delta u_i'(1) = 0$ pour $i = 1, 2$.
Alors

$$u_i(t_k^+) - u_i(t_k^-) = \frac{1}{\rho}(-\gamma(\beta+\alpha t_k) - \alpha(\gamma+\delta-\gamma t_k) I_{i,k}(u_i(t_k)) = -I_{i,k}(u_i(t_k)), \text{ pour } i = 1, 2,$$

□

Théorème 2.2.2. *On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(H_1) *Il existe quatre constantes réelles positives P_1, P_2, P_3, et P_4 telles que*

$$\begin{cases} |f_1(t, u_1, u_2) - f_1(t, \bar{u_1}, \bar{u_2})| & \leq P_1|u_1 - \bar{u_1}| + P_2|u_2 - \bar{u_2}|, \\ |f_2(t, u_1, u_2) - f_2(t, \bar{u_1}, \bar{u_2})| & \leq P_3|u_1 - \bar{u_1}| + P_4|u_2 - \bar{u_2}|, \end{cases}$$

pour chaque $u_1, u_2, , \bar{u_1}, \bar{u_2} \in \mathbb{R}$ et chaque $t \in J$;

(H_2) *Il exist $K_{1,k}$ et $K_{2,k}$ tels que*

$$|I_{1,k}(u_1) - I_{1,k}(\bar{u_1})| \leq K_{1,k}|u_1 - \bar{u_1}|, \quad k = 1, 2, ..., m,$$

et

$$|I_{2,k}(u_2) - I_{2,k}(\bar{u_2})| \leq K_{2,k}|u_2 - \bar{u_2}|, \quad k = 1, 2, ..., m,$$

pour tout $u_1, u_2, \bar{u_1}, \bar{u_2} \in \mathbb{R}$.

Si la matrice

$$M := G^* \begin{pmatrix} P_1 + mK_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 + mK_2 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

convergent vers 0, où $G^* = sup\{|G(t, s)| : (t, s) \in J \times J\}, K_1 = max\{k_{1,k}\}$ et $K_2 = max\{K_{2,k}\}$ pour $k = 1, 2, ..., m$, alors le problem $(2.1) - (2.6)$ admet une unique solution.

Démonstration. On considère l'opérateur suivant :

$$N : C(J, \mathbb{R}) \times C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R}) \times C(J, \mathbb{R}),$$

défini par

$$N(u_1, u_2) = (A_1(u_1, u_2), A_2(u_1, u_2)),$$

où

$$A_1(u_1, u_2)(t) = \int_0^1 G(t, s) f_1(s, u_1(s), u_2(s)) ds + \sum_{k=1}^{m} G(t, t_k) I_{1,k}(u_1(t_k)),$$

et

$$A_2(u_1, u_2)(t) = \int_0^1 G(t, s) f_2(s, u_1(s), u_2(s)) ds + \sum_{k=1}^{m} G(t, t_k) I_{2,k}(u_2(t_k)).$$

Soit $(u_1, u_2), (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in C(J, \mathbb{R}) \times C(J, \mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}
&|A_1(u_1,u_2)(t)-A_1(\bar{u}_1,\bar{u}_2)(t))| \\
&\qquad\leq \int_0^1 |G(t,s)||f_1(s,u_1(s),u_2(s))-f_1(s,\bar{u}_1(s),\bar{u}_2(s))|ds \\
&\qquad\quad+\sum_{k=1}^{m}|G(t,t_k)||I_{1,k}(u_1(t_k))-I_{1,k}(\bar{u}_1(t_k))| \\
&\qquad\leq G^*\int_0^1 \left[P_1|u_1(s)-\bar{u}_1(s)|+P_2|u_2(s)-\bar{u}_2(s)|\right]ds \\
&\qquad\quad+G^*\sum_{k=1}^{m}K_{1,k}|u_1(t_k)-\bar{u}_1(t_k)| \\
&\qquad\leq G^*\left(P_1+\sum_{k=1}^{m}K_{1,k}\right)\|u_1-\bar{u}_1\|_\infty+G^*P_2\|u_2-\bar{u}_2\|_\infty \\
&\qquad\leq G^*\left[(P_1+mK_1)\|u_1-\bar{u}_1\|_\infty+P_2\|u_2-\bar{u}_2\|_\infty\right],
\end{aligned}$$

donc

$$\|A_1(u_1,u_2)-A_1(\bar{u}_1,\bar{u}_2)\|_C\leq G^*\Big[\Big(P_1+mK_1\Big)\|u_1-\bar{u}_1\|_C+P_2\|u_2-\bar{u}_2\|_C\Big]. \quad (2.21)$$

De même

$$\begin{aligned}
&|A_2(u_1,u_2)(t)-A_2(\bar{u}_1,\bar{u}_2)(t)| \\
&\qquad\leq \int_0^1 |G(t,s)||f_2(s,u_1(s),u_2(s))-f_2(s,\bar{u}_1(s),\bar{u}_2(s))|ds \\
&\qquad\quad+\sum_{k=1}^{m}|G(t,t_k)||I_{2,k}(u_2(t_k))-I_{2,k}(\bar{u}_2(t_k))| \\
&\qquad\leq G^*\int_0^1 \left[P_3|u_1(s)-\bar{u}_1(s)|+P_4|u_2(s)-\bar{u}_2(s)|\right]ds \\
&\qquad\quad+G^*\sum_{k=1}^{m}K_{2,k}|u_2(t_k)-\bar{u}_2(t_k)|. \\
&\qquad\leq G^*P_3||u_1-\bar{u}_1||_\infty+G^*\left(P_4+\sum_{k=1}^{m}K_{2,k}\right)||u_2-\bar{u}_2||_\infty. \\
&\qquad\leq G^*\left[P_3||u_1-\bar{u}_1||_\infty+(P_4+mK_2)\,||u_2-\bar{u}_2||_\infty\right],
\end{aligned}$$

donc

$$\|A_2(u_1,u_2)-A_2(\bar{u}_1,\bar{u}_2)\|_C\leq G^*\Big[P_3\|u_1-\bar{u}_1\|_C+\Big(P_4+mK_2\Big)\|u_2-\bar{u}_2\|_C\Big]. \quad (2.22)$$

Apartire de (2.21) et (2.22), alors

$$\begin{bmatrix}\|A_1(u_1,u_2)-A_1(\bar{u}_1,\bar{u}_2)\|_C\\ \|A_2(u_1,u_2)-A_2(\bar{u}_1,\bar{u}_2)\|_C\end{bmatrix}\leq M\begin{bmatrix}\|u_1-\bar{u}_1\|_C\\ \|u_2-\bar{u}_2\|_C\end{bmatrix}.$$

Où

$$M := G^* \begin{pmatrix} P_1 + mK_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 + mK_2 \end{pmatrix}.$$

Alors par (2.20), N est une contraction, donc par le Théoréme du point fixe de Perov (Théorème 1.2.5), N admet un unique point fixe, qui est une unique solution de système (2.1) – (2.6). □

2.2.1 Exemple

Exemple 2.2.1. Considérons le système différentiel impulsif du second ordre suivant :

$$-u_1''(t) = \frac{1}{6} \cdot \frac{u_2^2(t)}{1+u_2^2(t)} \sin(2u_1(t)) := f_1(t, u_1(t), u_2(t)), \quad t \in J \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}, \tag{2.23}$$

$$-u_2''(t) = \frac{1}{8} \cdot \frac{u_2^2(t)}{1+u_2^2(t)} \cos(2u_1(t)) := f_2(t, u_1(t), u_2(t)), \quad t \in J \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}, \tag{2.24}$$

$$-\Delta u_1'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\cos\left(u_1\left(\frac{1}{4}\right)\right), \tag{2.25}$$

$$-\Delta u_2'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\sin\left(u_2\left(\frac{1}{4}\right)\right), \tag{2.26}$$

$$u_1(0) = u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = u_2'(0) = 0. \tag{2.27}$$

On observe que $\alpha = \delta = 1$ et $\beta = \gamma = 0$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial u_1}(t, u_1, u_2) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u_2^2}{1+u_2^2} \cos(2u_1), \\
\frac{\partial f_1}{\partial u_2}(t, u_1, u_2) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u_2}{(1+u_2^2)^2} \sin(2u_1), \\
\frac{\partial f_2}{\partial u_1}(t, u_1, u_2) &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{u_2^2}{1+u_2^2} \sin(2u_1), \\
\frac{\partial f_2}{\partial u_2}(t, u_1, u_2) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{u_2}{(1+u_2^2)^2} \cos(2u_1).
\end{aligned}$$

De plus, comme :

$$\begin{aligned}
&\sup_{u_1,u_2\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial f_1}{\partial u_1}(t, u_1, u_2)\right| \leq \frac{1}{3}, \qquad && \sup_{u_1,u_2\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial f_1}{\partial u_2}(t, u_1, u_2)\right| \leq \frac{1}{3}, \\
&\sup_{u_1,u_2\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial f_2}{\partial u_1}(t, u_1, u_2)\right| \leq \frac{1}{4}, \qquad && \sup_{u_1,u_2\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial f_2}{\partial u_2}(t, u_1, u_2)\right| \leq \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis, on obtient :

$$\begin{aligned}
|f_1(t, u_1, u_2) - f_1(t, \bar{u}_1, \bar{u}_2)| &\leq \frac{1}{3}|u_1 - \bar{u}_1| + \frac{1}{3}|u_2 - \bar{u}_2|, \\
|f_2(t, u_1, u_2) - f_2(t, \bar{u}_1, \bar{u}_2)| &\leq \frac{1}{4}|u_1 - \bar{u}_1| + \frac{1}{4}|u_2 - \bar{u}_2|.
\end{aligned}$$

D'après la condition (H_1), on a : $P_1 = \frac{1}{3},\ P_2 = \frac{1}{3},\ P_3 = \frac{1}{4},\ P_4 = \frac{1}{4}$.
De plus :

$$|I_{1,1}(u_1) - I_{1,1}(\bar{u}_1)| \leq \frac{1}{4}|u_1 - \bar{u}_1| \quad \text{pour tout } u_1, \bar{u}_1 \in \mathbb{R},\ t \in [0,1],$$
$$|I_{1,2}(u_2) - I_{1,2}(\bar{u}_2)| \leq \frac{1}{3}|u_2 - \bar{u}_2| \quad \text{pour tout } u_2, \bar{u}_2 \in \mathbb{R},\ t \in [0,1].$$

Ainsi, la condition (H_3) est également vérifiée.
D'après (2.19), la fonction de Green du problème homogène est donnée par :

$$G(t,s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

On vérifie facilement que :

$$G^* = \sup_{(t,s)\in J\times J} |G(t,s)| = 1.$$

D'après (2.20), on a :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{12} \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \approx 0{,}872$ et $\lambda_2 \approx 0{,}294$. Par conséquent, M est une matrice convergente.

Toutes les conditions du Théorème 2.2.2 sont donc satisfaites. Ainsi, le système (2.23)–(2.27) admet une unique solution.

2.3 Résultat d'existence

Dans cette section, nous donnons un résultat d'existence basé sur l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder. Nous avons besoin des conditions suivantes pour obtenir notre résultat :

(C_1) Les deux fonctions f_1 et f_2 sont L^1-carathéodory.

(C_2) Il existe des fonctions $p, q, h, g, \tilde{q}$ et $\bar{h} \in L^1([0,1], \mathbb{R}^+)$ et des constantes $\alpha_1,\ \alpha_2$ et $\alpha_4 \in [0,1)$ telles que pour tout $t \in J$ et $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$

$$|f_1(t,u_1,u_2)| \leq p(t)|u_1|^{\alpha_1} + q(t)|u_2|^{\alpha_2} + h(t),$$

et

$$|f_2(t,u_1,u_2)| \leq \tilde{p}(t)|u_1|^{\alpha_3} + \tilde{q}(t)|u_2|^{\alpha_4} + \bar{h}(t).$$

(C_3) Il existe des constantes $c_k, b_k, c_k^*, b_k^* \in \mathbb{R}^+$ et $\beta_k, \beta_k^* \in [0,1)$ telles que

$$|I_{1,k}(u_1)| \quad \leq c_k + b_k|u_1|^{\beta_k}, \quad k = 1,2,...,m, u_1 \in \mathbb{R},$$

et

$$|I_{2,k}(u_2)| \quad \leq c_k^* + b_k^*|u_2|^{\beta_k^*}, \quad k = 1,2,...,m, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Théorème 2.3.1. *Supposons que les conditions* $(C_1) - (C_3)$ *sont satisfaites, alors le système* $(2.1) - (2.6)$ *admet au moins une solution.*

Démonstration. Soit N l'opérateur défini dans la démonstration du Théorème 2.2.2. On considère l'ensemble suivant :

$$B_q = \{(u_1, u_2) \in C(J, \mathbb{R}) \times C(J, \mathbb{R}) : \|u_1\|_\infty \leq q, \ \|u_2\|_\infty \leq q\} \tag{2.28}$$

où $q > 0$ est une constante positive.

On va démontrer que l'opérateur N satisfait les hypothèses de l'alternative non linéaire de Leray–Schauder. La démonstration est présentée en plusieurs étapes.

Étape 1 : N est un opérateur continu.

Soit $(u_{1,n}, u_{2,n})$ une suite telle que $(u_{1,n}, u_{2,n}) \to (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ dans $C(J,\mathbb{R}) \times C(J,\mathbb{R})$ lorsque $n \to \infty$. Alors

$$\begin{aligned}
&|A_1(u_{1,n}, u_{2,n})(t) - A_1(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)(t)| \\
&\qquad \leq \int_0^1 |G(t,s)||f_1(s, u_{1,n}(s), u_{2,n}(s)) - f_1(s, \tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(s))|ds \\
&\qquad \quad + \sum_{k=1}^m |G(t,t_k)||I_{1,k}(u_n(t_k)) - I_{1,k}(\tilde{u}_1(t_k))| \\
&\qquad \leq G^* \int_0^1 |f_1(s, u_{1,n}(s), u_{2,n}(s)) - f_1(s, \tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(s))|ds \\
&\qquad \quad + G^* \sum_{k=1}^m |I_{1,k}(u_{1,n}(t_k)) - I_{1,k}(\tilde{u}_1(t_k))|.
\end{aligned}$$

Puisque f_1 est une fonction de L^1-carathéodory et $I_{1,k}$ (pour $k = 1,2,...,m$) sont continues, alors par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons :

$$\|A_1(u_{1,n}, u_{2,n}) - A_1(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\|_C \to 0; \quad n \to \infty.$$

De même,

$$\|A_2(u_{1,n}, u_{2,n}) - A_2(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\|_C \to 0; \quad n \to \infty.$$

Ainsi, N est continu.

Étape 2 : L'opérateur N transforme tout ensemble borné B_q en un ensemble borné. Il suffit de montrer que pour tout $q > 0$, il existe une constante positive $l = (l_1, l_2)$ telle que pour tout $(u_1, u_2) \in C(J,\mathbb{R}) \times C(J,\mathbb{R})$, on a :

$$\|N(u_1, u_2)\|_c \leq l.$$

Pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|A_1(u_1,u_2)(t)| &\leq \int_0^1 |G(t,s)||f_1(s,u_1(s),u_2(s))|ds + \sum_{k=1}^m |G(t,t_k)||I_{1,k}(u_1(t_k))| \\
&\leq G^* \int_0^1 (p(s)|u_1(s)|^{\alpha_1} + q(s)|u_2(s)|^{\alpha_2} + h(s))\, ds \\
&\quad + G^* \sum_{k=1}^m \Big(c_k + b_k|u_1(t_k)|^{\beta_k}\Big) \\
&\leq G^*\|u_1\|_\infty^{\alpha_1} \int_0^1 p(s)ds + G^*\|u_2\|_\infty^{\alpha_2} \int_0^1 q(s)ds + G^* \int_0^1 h(s)ds \\
&\quad + G^* \sum_{k=1}^m \Big(c_k + b_k\|u_1\|_\infty^{\beta_k}\Big) \\
&\leq G^* q^{\alpha_1}\|p\|_{L^1} + G^* q^{\alpha_2}\|q\|_{L^1} + G^*\|h\|_{L^1} + G^* \sum_{k=1}^m \Big(c_k + b_k q^{\beta_k}\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|A_1(u_1,u_2)\|_{PC} \leq G^* q^{\tilde{\alpha}}\Big(\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1} + \sum_{k=1}^m b_k\Big) + G^*\Big(\|h\|_{L^1} + \sum_{k=1}^m c_k\Big) := l_1,$$

où

$$\tilde{\alpha} = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_k : k = 1, 2, ..., m\}.$$

De même,

$$\|A_2(u_1,u_2)\|_{C} \leq G^* q^{\bar{\alpha}}\Big(\|\tilde{p}\|_{L^1} + \|\tilde{q}\|_{L^1} + \sum_{k=1}^m b_k^*\Big) + G^*\Big(\|\bar{h}\|_{L^1} + \sum_{k=1}^m c_k^*\Big) := l_2,$$

où

$$\bar{\alpha} = \max\{\alpha_3, \alpha_4, \beta_k^* : k = 1, 2, ..., m\}.$$

Etape 3 : L'opérateur N transforme tout ensemble borné B_q en un ensemble équicontinu.
Soient $r_1, r_2 \in J,\ r_1 < r_2,\ u \in B_q$. on a

$$
\begin{aligned}
|A_1(u_1,u_2)(r_2) - A_1(u_1,u_2)(r_1)| &\\
&\le \int_0^1 |G(r_2,s)-G(r_1,s)||f_1(s,u_1(s),u_2(s))|ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} |G(r_2,t_k)-(G(r_1,t_k)||I_{1,k}(u_1(t_k))| \\
&\le \int_0^1 |G(r_2,s)-G(r_1,s)|[(p(s)|u_1(s)|^{\alpha_1} \\
&\quad + q(s)|u_2(s)|^{\alpha_2} + h(s))]ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} |G(r_2,t_k)-G(r_1,t_k)| \left(c_k + b_k|u_1(s)|^{\beta_k}\right) \\
&\le q^{\alpha_1}\int_0^1 |G(r_2,s)-G(r_1,s)|p(s)ds \\
&\quad + q^{\alpha_2}\int_0^1 |G(r_2,s)-G(r_1,s)|q(s)ds \\
&\quad + \int_0^1 |G(r_2,s)-G(r_1,s)|h(s)ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} |G(r_2,t_k)-G(r_1,t_k)| \left(c_k + b_k q^{\beta_k}\right).
\end{aligned}
$$

De même

$$
\begin{aligned}
|A_2(u_1,u_2)(r_2) - A_2(u_1,u_2)(r_1)| &\\
&\le q^{\alpha_3}\int_0^1 |G(r_2,s)-G(r_1,s)|\tilde{p}(s)ds \\
&\quad + q^{\alpha_4}\int_0^1 |G(r_2,s)-G(r_1,s)|\tilde{q}(s)ds \\
&\quad + \int_0^1 |G(r_2,s)-G(r_1,s)|\bar{h}(s)ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} |G(r_2,t_k)-G(r_1,t_k)| \left(c_k^* + b_k^* q^{\beta_k}\right).
\end{aligned}
$$

Les intégrales ci-dessus tendent vers zéro lorsque $r_2 \to r_1$. Par conséquent, $N(B_q)$ est équicontinu. D'après le théorème d'Arzelà–Ascoli, $N : B_q \to C(J,\mathbb{R}) \times C(J,\mathbb{R})$ est complètement continu.

Étape 4 : Estimation à priori des solutions

Soit $(u_1,u_2) \in C(J,\mathbb{R}) \times C(J,\mathbb{R})$ avec $(u_1,u_2) = \lambda N(u_1,u_2)$ pour $0 < \lambda < 1$, alors

$u_1 = \lambda A_1(u_1, u_2)$ et $u_2 = \lambda A_2(u_1, u_2)$. Ainsi, pour $t \in [0, 1]$ on a

$$\begin{aligned}
|u_1(t)| &\leq \int_0^1 |G(t,s)||f_1(s, u_1(s), u_2(s))|ds + \sum_{k=1}^{m} |G(t,t_k)||I_{1,k}(u_1(t_k))| \\
&\leq G^* \int_0^1 [(p(s)|u_1(s)|^{\alpha_1} + q(s)|u_2(s)|^{\alpha_2} + h(s))]ds \\
&\qquad +G^* \sum_{k=1}^{m} (c_k + b_k|u_1(t_k)|^{\beta_k}) \\
&\leq G^* \|u_1\|_C^{\alpha_1} \int_0^1 p(s)ds + G^* \|u_2\|_C^{\alpha_2} \int_0^1 q(s)ds + G^* \int_0^1 h(s)ds \\
&\quad +G^* \sum_{k=1}^{m} (c_k + b_k\|u_1\|_C^{\beta_k}).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|u_1\|_C &\leq G^* \|u_1\|_C^{\alpha_1} \|p\|_{L^1} + G^* \|u_2\|_C^{\alpha_2} \|q\|_{L^1} + G^* \|h\|_{L^1} \\
&\quad +G^* \sum_{k=1}^{m} (c_k + b_k\|u_1\|_C^{\beta_k}).
\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\begin{aligned}
\|u_2\|_C &\leq G^* \|u_1\|_C^{\alpha_3} \|\tilde{p}\|_{L^1} + G^* \|u_2\|_C^{\alpha_4} \|\tilde{q}\|_{L^1} + G^* \|\bar{h}\|_{L^1} \\
&\quad +G^* \sum_{k=1}^{m} (c_k^* + b_k^*\|u_2\|_C^{\beta_k^*}).
\end{aligned}$$

Remarquons que si $\epsilon \leq \delta$ et $\|u\| > 1$, alors $\|u\|^\epsilon \leq \|u\|^\delta$. Ainsi $\|u\|^\epsilon \leq 1 + \|u\|^\delta$ pour tout u. Nous avons alors

$$
\begin{aligned}
&\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty \\
&\qquad \le G^* \left(\|q\|_{L^1} + \|\tilde{p}\|_{L^1}\right)\left(\|u_1\|_\infty^{\alpha_3} + \|u_2\|_\infty^{\alpha_2}\right) \\
&\qquad\quad + G^* \left(\|p\|_{L^1} + \|\tilde{q}\|_{L^1}\right)\left(\|u_1\|_\infty^{\alpha_1} + \|u_2\|_\infty^{\alpha_4}\right) \\
&\qquad\quad + G^* \sum_{k=1}^{m}(b_k + b_k^*)\left(\|u_1\|_C^{\beta_k} + \|u_2\|_C^{\beta_k^*}\right) \\
&\qquad\quad + G^* \left(\sum_{k=1}^{m}(c_k + c_k^*) + \|h\|_{L^1} + \|\bar{h}\|_{L^1}\right) \\
&\qquad \le G^* \left(\|q\|_{L^1} + \|\tilde{p}\|_{L^1} + \|p\|_{L^1} + \|\bar{q}\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{m}(b_k + b_k^*)\right)\left(1 + \|u_1\|_\infty^{\alpha^*} + \|u_2\|_\infty^{\alpha^*}\right) \\
&\qquad\quad + G^* \left(\sum_{k=1}^{m}(c_k + c_k^*) + \|h\|_{L^1} + \|\tilde{h}\|_{L^1}\right) \\
&\qquad \le 2G^* \left(\|q\|_{L^1} + \|\tilde{p}\|_{L^1} + \|p\|_{L^1} + \|\bar{q}\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{m}(b_k + b_k^*)\right)\left(\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty\right)^{\alpha^*} \\
&\qquad\quad + G^* \left(\|q\|_{L^1} + \|\tilde{p}\|_{L^1} + \|p\|_{L^1} + \|\bar{q}\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{m}(b_k + b_k^*)\right) \\
&\qquad\quad + G^* \left(\sum_{k=1}^{m}(c_k + c_k^*) + \|h\|_{L^1} + \|\tilde{h}\|_{L^1}\right)
\end{aligned}
$$

Où

$$\alpha^* = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_k, \beta_k^* : k = 1, 2, ..., m\}.$$

Si $\|u_1\|_C + \|u_2\|_C > 1$, alors

$$
\begin{aligned}
\frac{\|u_1\|_C + \|u_2\|_C}{\left(\|u_1\|_C + \|u_2\|_C\right)^{\alpha^*}} \;&\le\; 2G^*\left(\|q\|_{L^1} + \|\tilde{p}\|_{L^1} + \|p\|_{L^1} + \|\bar{q}\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{m}(b_k + b_k^*)\right) \\
&\quad + G^* \frac{\left(\|q\|_{L^1} + \|\tilde{p}\|_{L^1} + \|p\|_{L^1} + \|\bar{q}\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{m}(b_k + b_k^*)\right)}{\|u_1\|_C + \|u_2\|_C} \\
&\quad + G^* \frac{\sum_{k=1}^{m}(c_k + c_k^*) + \|h\|_{L^1} + \|\bar{h}\|_{L^1}}{\left(\|u\|_C + \|v\|_C\right)^{\alpha^*}}
\end{aligned}
$$

où

$$\begin{aligned}\Big(\|u_1\|_C+\|u_2\|_C\Big)^{1-\alpha^*} &\leq 2G^*\Big(\|q\|_{L^1}+\|\tilde{p}\|_{L^1}+\|p\|_{L^1}+\|\tilde{q}\|_{L^1}+\sum_{k=1}^{m}(b_k+b_k^*)\Big)\\ &+G^*\Big(\|q\|_{L^1}+\|\tilde{p}\|_{L^1}+\|p\|_{L^1}+\|\bar{q}\|_{L^1}+\sum_{k=1}^{m}(b_k+b_k^*)\Big)\\ &+G^*(\sum_{k=1}^{m}(c_k+c_k^*)+\|h\|_{L^1}+\|\bar{h}\|_{L^1}).\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\|u_1\|_C+\|u_2\|_C\leq\left[3G^*\Big(C_1+\sum_{k=1}^{m}(b_k+b_k^*)\Big)+G^*\Big(\sum_{k=1}^{m}(c_k+c_k^*+C_2)\Big)\right]^{\frac{1}{1-\alpha^*}}:=M_2,$$

où

$$C_1=\|q\|_{L^1}+\|\tilde{p}\|_{L_1}+\|p\|_{L^1}+\|\tilde{q}\|_{L_1}\quad\text{et}\quad C_2=\|h\|_{L^1}+\|\bar{h}\|_{L^1}.$$

Par conséquent

$$\|u_1\|_C\leq M_2\quad\text{et}\quad\|u_2\|_C\leq M_2.$$

Ensemble

$$U=\{(u_1,u_2)\in C(J,\mathbb{R})\times C(J,\mathbb{R}):\|u_1\|_C<M_2+1\quad\text{et}\quad\|u_2\|_C<M_2+1\}.$$

Soit $(u_1,u_2)\in\partial U$ telles que $(u_1,u_2)=\lambda N(u_1,u_2)$ et on a $M_2+1\leq M_2$ c'est imposible, donc contradiction.
D'après le choix de U, il n'existe pas $(u_1,u_2)\in\partial U$ tels que $(u_1,u_2)=\lambda N(u_1,u_2)$ pour certain $\lambda\in(0,1)$. Alors d'après l'alternative non linéaire de Laray-shauder (Théorème 1.2.7), l'opérateur N admet un point fixe qui est une solution du système $(2.2)-(2.6)$. Cela complète la démonstration du théorème. □

2.3.1 Exemple

Exemple 2.3.1. Considérons le système différentiel impulsif suivant :

$$-u_1''(t)=t^3+2(t-1)^2|u_1(t)|^{0.8}+e^t|u_2(t)|^{0.3}+3=:f_1(t,u_1(t),u_2(t)),\quad t\in J\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\},\tag{2.29}$$

$$-u_2''(t)=t^2+4t|u_1(t)|^{0.4}+\left(t-\frac{1}{3}\right)^2|u_2(t)|^{0.6}+8=:f_2(t,u_1(t),u_2(t)),\quad t\in J\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\},\tag{2.30}$$

$$-\Delta u_1'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}\sqrt{u_1\left(\frac{1}{2}\right)},\tag{2.31}$$

$$-\Delta u_2'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}|u_2\left(\frac{1}{2}\right)|^{\frac{2}{5}}+4,\tag{2.32}$$

$$u_1(0)=u_1'(0)=0,\quad u_2(0)=u_2'(0)=0.\tag{2.33}$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\begin{cases} |f_1(t,u_1(t),u_2(t))| \leq 2|u_1(t)|^{0.8} + e|u_2(t)|^{0.3} + 4, \\ |f_2(t,u_1(t),u_2(t))| \leq 4|u_1(t)|^{0.4} + \dfrac{4}{9}|u_2(t)|^{0.6} + 9, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} |I_{1,1}(u_1)| \leq \dfrac{1}{6}|u_1|^{\frac{1}{2}}, \\ |I_{1,2}(u_2)| \leq \dfrac{2}{3}|u_2|^{\frac{2}{5}} + 4. \end{cases}$$

pour tout $t \in J$. Maintenant, toutes les hypothèses du théorème 2.3.1 sont satisfaites, donc le système (2.29)–(2.33) admet au moins une solution.

Chapitre 3

Systèmes des équations différentielles impulsives du second ordre sur un domain non borné

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous établissons un résultat d'existence de solutions pour un système d'équations différentielles impulsives non linéaires du second ordre, avec des conditions aux limites intégrales sur un intervalle non borné.

$$-u''(t) = f(t, u(t), v(t)), \quad t \in J, \ t \neq t_k, \tag{3.1}$$

$$-v''(t) = g(t, u(t), v(t)), \quad t \in J, \ t \neq t_k, \tag{3.2}$$

$$\Delta u(t_k) = J_{1,k}(u(t_k)), \quad -\Delta u'(t_k) = I_{1,k}(u(t_k)), \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{3.3}$$

$$\Delta v(t_k) = J_{2,k}(v(t_k)), \quad -\Delta v'(t_k) = I_{2,k}(v'(t_k)), \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{3.4}$$

$$u(0) = \int_0^\infty h_1(s)u(s)ds, \quad u'(\infty) = 0, \tag{3.5}$$

$$v(0) = \int_0^\infty h_2(s)v(s)ds, \quad v'(\infty) = 0, \tag{3.6}$$

où $J = [0, \infty), f, g \in C(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), 0 < t_1 < t_2 < ... < t_k \to \infty, \ I_{i,k}, J_{i,k} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour $i = 1, 2, h_i \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ avec $\int_0^\infty h_i(s)ds \neq 1$ pour $i = 1, 2, u'(\infty) = \lim_{t\to\infty} u(t), v'(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} v(t), \triangle u(t_k) = u(t_k^+) - u(t_k^-)$, et $\triangle v(t_k) = v(t_k^+) - v(t_k^-)$ où $u(t_k^+), \ v(t_k^+)$ et $u(t_k^-), \ v(t_k^-)$ représenter a limite à droite $u(t)$ et $v(t)$ dans $t = t_k$, respectivement. Aussi $\triangle u'(t_k) = u'(t_k^+) - u'(t_k^-)$ et $\triangle v'(t_k) = v'(t_k^+) - v'(t_k^-)$ où $u'(t_k^+), \ v'(t_k^+)$ et $u'(t_k^-), \ v'(t_k^-)$ représenter les limite à droite $u'(t)$ et $v'(t)$ dans $t = t_k$.

Ce résultat est consacrne à l'étude du problème $(3.2) - (3.6)$ et basé sur Théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Dans ce chapitre on considére l'espace suivant

$$PC([0,+\infty)) = \left\{ u : [0,+\infty[\to \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} u(t) \text{ est continue pour chaque } t \neq t_k, \\ u(t) \text{ est continue à gauche en } t = t_k, \\ u'(t_k^+) \text{ existe}, \quad \forall k = 1, 2, \ldots \end{array} \right\}$$

Considérons l'espace E défini par

$$E = \left\{ u \in PC([0,+\infty)), \ \sup_{t\in[0,+\infty)} \frac{|u(t)|}{1+t} < \infty \right\},$$

E est un espace de Banach, muni de la norme $\|u\|_E = \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \dfrac{|u(t)|}{1+t} < \infty$.
Alors $E \times E$ est un espace de Banach muni de la norme $\|(u,v)\| = (\|u\|_E, \|v\|_E)$ pour $(u,v) \in E \times E$.
Le résultat suivant est une extension du Théorème de Ascoli-Arzela en des intervalles non borné.

Lemme 3.1.1. [34] *Soit $N \subseteq E$, alors N est compact dans E, si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) *N est uniformément borné dans E.*
(b) *Les fonctions $\{y : \ y = \frac{x}{1+t}, \ x \in N\}$ appartenant à N sont équicontinues sur $\mathbb{R}^+$.*
(c) *Les fonctions $\{y : \ y = \frac{x}{1+t}, \ x \in N\}$ sont equiconvergentes aux $+\infty$, c'est à dire pour tout $\varepsilon > 0$, il correspond $T(\varepsilon) > 0$ tel que $|f(t) - f(+\infty)| < \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$ et $f \in M$ pour tout $t \geq T(\varepsilon)$ et $x \in N$.*

3.2 Résultat d'existence

Lemme 3.2.1. *Le vecteur $(u,v) \in PC(J,\mathbb{R}) \times PC(J,\mathbb{R})$ est une solution du système différentiel* $(3.2) - (3.6)$ *si et seulement si :*

$$\begin{aligned} u(t) = &\int_0^\infty H_1(t,s) f(s,u(s),v(s))\, ds + \sum_{k=1}^{\infty} H_1(t,t_k) I_{1,k}(u(t_k)) \\ &+ \sum_{t_k>t} J_{1,k}(u(t_k)) + \frac{\int_0^\infty h_1(s) \left(\sum_{t_k<s} J_{1,k}(u(t_k))\right) ds}{1 - \int_0^\infty h_1(s)\, ds}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t) = &\int_0^\infty H_2(t,s) g(s,u(s),v(s))\, ds + \sum_{k=1}^{\infty} H_2(t,t_k) I_{2,k}(v(t_k)) \\ &+ \sum_{t_k>t} J_{2,k}(v(t_k)) + \frac{\int_0^\infty h_2(s) \left(\sum_{t_k<s} J_{2,k}(v(t_k))\right) ds}{1 - \int_0^\infty h_2(s)\, ds}. \end{aligned}$$

Où

$$H_i(t,s) = G(t,s) + \frac{1}{1-\int_0^\infty h_i(s)\,ds}\int_0^\infty G(\tau,s)h_i(\tau)\,d\tau, \quad i=1,2,$$

et

$$G(t,s) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le s \le \infty, \\ s, & 0 \le s \le t \le \infty. \end{cases}$$

Démonstration. Tout d'abord, nous considérons le problème :

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t,u(t),v(t)), & t \in J,\, t \neq t_k, \\ \Delta u(t_k) = J_{1,k}(u(t_k)), \quad -\Delta u'(t_k) = I_{1,k}(u(t_k)), & k = 1,2,\dots, \\ u(0) = \int_0^\infty h_1(s)u(s)\,ds, \quad u'(\infty) = 0. \end{cases}$$

Si $t \in [0, t_1[$ alors

$$-u''(t) = f(t,u(t),v(t)),$$

ce qui implique

$$u'(t) = u'(0) - \int_0^t f(s,u(s),v(s))\,ds. \tag{3.7}$$

En intégrant (3.7), on obtient :

$$u(t) = u(0) + u'(0)t - \int_0^t (t-s)f(s,u(s),v(s))\,ds.$$

Si $t \in [t_1, t_2[$ alors

$$\begin{aligned} u'(t) &= u'(t_1^+) + \int_{t_1}^t f(s,u(s),v(s))\,ds \\ &= u'(t_1^-) - \Delta u'(t_1) + \int_{t_1}^t f(s,u(s),v(s))\,ds \\ &= u'(0) - I_1(u(t_1)) - \int_0^t f(s,u(s),v(s))\,ds. \end{aligned}$$

D'où,

$$u'(t) = u'(0) - I_1(u(t_1)) - \int_0^t f(s,u(s),v(s))\,ds. \tag{3.8}$$

En intégrant (3.8), on obtient :

$$u(t) = u(0) + u'(0)t - I_1(u(t_1))(t-t_1) - \int_0^t (t-s)f(s,u(s),v(s))\,ds.$$

Si $t \in [t_2, t_3[$ alors :

$$\begin{aligned} u'(t) &= u'(t_2^+) + \int_{t_2}^t f(s,u(s),v(s))\,ds \\ &= u'(t_2^-) - \Delta u'(t_2) + \int_{t_2}^t f(s,u(s),v(s))\,ds \\ &= u'(0) - I_1(u(t_1)) - I_2(u(t_2)) - \int_0^t f(s,u(s),v(s))\,ds. \end{aligned}$$

□

Ainsi,

$$u'(t) = u'(0) - I_1(u(t_1)) - I_2(u(t_2)) - \int_0^t f(s, u(s), v(s))\, ds \tag{3.9}$$

En intégrant (3.9), on trouve que

$$u(t) = u(0) + u'(0)t - (I_2(u(t_2)) + I_1(u(t_1))(t - t_2) - \int_0^t f(s, u(s), v(s))\, ds.$$

Si $t \in [t_k, t_{k+1}[$ alors

$$u'(t) = u'(0) - \int_0^t f(s, u(s), v(s))\, ds - \sum_{0<t_k<t} I_{1,k}(u(t_k)), \tag{3.10}$$

En appliquant $\lim\limits_{t\to\infty} u'(t) = 0$, alors

$$\lim_{t\to\infty} \left[u'(0) - \int_0^t f(s, u(s), v(s))\, ds - \sum_{0<t_k<t} I_{1,k} u(t_k) \right] = 0.$$

Et en prenant $t \to \infty$, on trouve que

$$u'(0) = \int_0^\infty f(s, u(s), v(s))\, ds + \sum_{k=1}^{\infty} I_{1,k} u(t_k). \tag{3.11}$$

En intégrant l'équation (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned} u(t) = u'(0)t + u(0) - \int_0^t (t - s) f(s, u(s), v(s)) ds \\ - \sum_{t_k<t} I_{1,k}(u(t_k))(t - t_k) + \sum_{t_k<t} J_{1,k}(u(t_k)). \end{aligned}$$

Apartir de (3.11), on trouve

$$\begin{aligned} u(t) = u(0) + \int_0^\infty &t f(s, u(s), v(s))\, ds + \sum_{k=1}^{\infty} t I_{1,k}(u(t_k)) \\ &- \int_0^t (t - s) f(s, u(s), v(s)) ds - \sum_{t_k<t} I_{1,k}(u(t_k))(t - t_k) \\ &+ \sum_{t_k<t} J_{1,k}(u(t_k)). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} u(t) = u(0) + \int_0^t &t f(s, u(s), v(s))\, ds + \int_t^\infty t f(s, u(s), v(s))\, ds \\ &- \int_0^t t f(s, u(s), v(s))\, ds + \int_0^t s f(s, u(s), v(s))\, ds \\ &+ \sum_{t_k<t} t I_{1,k}(u(t_k)) + \sum_{t>t_k} t I_{1,k}(u(t_k)) - \sum_{t_k<t} I_{1,k}(u(t_k)) t \\ &+ \sum_{t_k<t} I_{1,k}(u(t_k)) t_k + \sum_{t_k<t} J_{1,k}(u(t_k)). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}u(t) = u(0) + \int_0^\infty G(t,s)f(s,u(s),v(s))\,ds + \sum_{k=1}^{\infty} G(t,t_k)I_{1,k}(u(t_k))\\ + \sum_{t_k<t} J_{1,k}(u(t_k)).\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}u(t) = \int_0^\infty h_1(s)u(s)ds + \int_0^\infty G(t,s)f(s,u(s),v(s))\,ds\\ + \sum_{k=1}^{\infty} G(t,t_k)I_{1,k}(u(t_k)) + \sum_{t_k<t} J_{1,k}(u(t_k)).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^\infty h_1(s)u(s)ds = \int_0^\infty h_1(s)\bigg(\int_0^\infty h_1(s)u(s)ds + \int_0^\infty G(s,\tau)f(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau\bigg)ds\\ + \int_0^\infty h_1(s)\bigg(\sum_{k=1}^{\infty} G(s,t_k)I_{1,k}(u(t_k)) + \sum_{t_k<s} J_{1,k}(u(t_k))\bigg)ds.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_0^\infty h_1(s)u(s)ds = \frac{1}{1-\int_0^\infty h_1(s)ds}\bigg(\int_0^\infty\int_0^\infty h_1(s)G(s,\tau)f(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau\bigg)\\ + \frac{1}{1-\int_0^\infty h_1(s)ds}\int_0^\infty h_1(s)\bigg(\sum_{k=1}^{\infty} G(s,t_k)I_{1,k}(u(t_k)\bigg)ds\\ + \frac{1}{1-\int_0^\infty h_1(s)ds}\int_0^\infty h_1(s)\bigg(\sum_{t_k<s} J_{1,k}(u(t_k))\bigg)ds.\end{aligned}$$

En substituant dans $u(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}u(t) = \int_0^\infty G(t,s)f(s,u(s),v(s))ds\\ + \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty h_1(s)G(s,\tau)f(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau}{1-\int_0^\infty h_1(s)ds}\\ + \sum_{k=1}^{\infty} G(t,t_k)I_{1,k}(u(t_k)) + \frac{\int_0^\infty h_1(s)\bigg(\sum_{k=1}^{\infty} G(t,t_k)I_{1,k}(u(t_k))\bigg)ds}{1-\int_0^\infty h_1(s)ds}\\ + \sum_{t_k<t} J_{1,k}(u(t_k) + \frac{\int_0^\infty h_1(s)\bigg(\sum_{t_k<t} J_{1,k}(u(t_k)\bigg)ds}{1-\int_0^\infty h_1(s)ds}.\end{aligned}$$

Donc

$$u(t) = \int_0^\infty H_1(t,s)f(s,u(s),v(s))ds + \sum_{k=1}^{\infty} H_1(t,t_k)I_{1,k}(u(t_k))$$
$$+ \sum_{t_k>t} J_{1,k}(u(t_k)) + \frac{\int_0^\infty h_1(s)\Big(\sum_{t_k<s} J_{1,k}(u(t_k))\Big)ds}{1-\int_0^\infty h_1(s)ds},$$

Où

$$H_1(t,s) = G(t,s) + \frac{1}{1-\int_0^\infty h_1(s)ds}\int_0^\infty G(\tau,s)h_1(\tau)d\tau.$$

Ensuite, nous considérons le problème .

$$\begin{cases} -v''(t) = f(t,u(t),v(t)), & t \in J, t \neq t_k, \\ \triangle v(t_k) = J_{2,k}(v(t_k)), \quad \triangle v'(t_k) = -I_{2,k}(v(t_k)), & k = 1,2,..., \\ v(0) = \int_0^\infty h_2(s)v(s)ds, \quad v'(\infty) = 0, \end{cases}$$

De même, on obtient

$$v(t) = \int_0^\infty H_2(t,s)f(s,u(s),v(s))ds + \sum_{k=1}^{\infty} H_2(t,t_k)I_{1,k}(u(t_k))$$
$$+ \sum_{t_k>t} J_{2,k}(v(t_k)) + \frac{\int_0^\infty h_2(s)\Big(\sum_{t_k<s} J_{2,k}(v(t_k))\Big)ds}{1-\int_0^\infty h_2(s)ds}.$$

Où

$$H_2(t,s) = G(t,s) + \frac{1}{1-\int_0^\infty h_2(s)ds}\int_0^\infty G(\tau,s)h_2(\tau)d\tau$$

3.2.1 Résultat principal

Dans cette section, nous établissons l'existence d'au moins une solution de le problème $(3.2)-(3.6)$. Nous avons besoin des hypothèses suivantes pour obtenir notre résultat :

(H_1) f et g sont des fonctions de L^1-carathéodory .

(H_2) Il existe des fonctions positives ou nulles $p_i, \bar{p}_i \in L^1[0,+\infty)$ pour $i = 1,2,3$, telles que

$$|f(t,u,v)| \leq P_1(t)|u| + P_2(t)|v| + P_3(t), \text{pour chaque} \quad t \in J, (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

et

$$|g(t,u,v)| \leq \bar{P}_1(t)|u| + \bar{P}_2(t)|u| + \bar{P}_3(t), \text{pour chaque} \quad t \in J, (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

(H_3) Pour tout $u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}$, il existe des constantes positives ou nulles $a_{i,k}, b_{i,k} \geq 0, i = 1, 2$, telles que

$$\begin{cases} |I_{1,k}(u) - I_{1,k}(\bar{u})| \leq a_{1,k}|u - \bar{u}|, & k = 1, 2, ... \\ |I_{2,k}(v) - I_{2,k}(\bar{v})| \leq a_{2,k}|v - \bar{v}|, & k = 1, 2, ... \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} |J_{1,k}(u) - J_{1,k}(\bar{u})| \leq b_{1,k}|u - \bar{u}|, & k = 1, 2, ..., m, ... \\ |J_{2,k}(v) - J_{2,k}(\bar{v})| \leq b_{2,k}|v - \bar{v}|, & k = 1, 2, ..., m, ... \end{cases}$$

Nous définissons la constante N_i et $C_i, i = 1, 2$ par

$$N_i = \left(1 + \frac{\int_0^\infty h_1(s)ds}{h_1^*}\right) \int_0^\infty P_i(s)(1+s)ds < \infty,$$

$$C_i = \left(1 + \frac{\int_0^\infty h_2(s)ds}{h_2^*}\right) \int_0^\infty \bar{P}_i(s)(1+s)ds < \infty, \ i = 1, 2,$$

$$K_i = \left(1 + \frac{\|h_i\|_{L^1}}{h_i^*}\right) \sum_{k=1}^{\infty} (a_{i,k} + b_{i,k})(1 + t_k) < \infty, \ \textit{pour} \ i = 1, 2,$$

Ainsi que les constantes

$$N_3 = \left(1 + \frac{\int_0^\infty h_1(s)ds}{h_1^*}\right) \left(\int_0^\infty P_3(s)ds + \sum_{k=1}^{\infty} |I_{1,k}(0)| + \sum_{k=1}^{\infty} |J_{1,k}(0)|\right) < \infty,$$

$$C_3 = \left(1 + \frac{\displaystyle\int_0^\infty h_2(s)ds}{h_2^*}\right) \left(\int_0^\infty \bar{P}_3(s)ds + \sum_{k=1}^{\infty} |I_{2,k}(0)| + \sum_{k=1}^{\infty} |J_{2,k}(0)|\right) < \infty.$$

Où

$$h_1^* = \left|1 - \int_0^\infty h_1(s)ds\right|, \quad h_2^* = \left|1 - \int_0^\infty h_2(s)ds\right|.$$

Théorème 3.2.2. *Supposons que les conditions $(H_1) - (H_3)$ sont vérifiées avec $N_1 + K_1 < 1$ et $C_2 + K_2 < 1$. Si*

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 - N_1 - K_1 & -N_2 \\ -C_1 & 1 - C_2 - K_2 \end{pmatrix},$$

et $\det \tilde{M} > 0$. *Alors le problème* (3.1) *admet au moins une solution.*

Démonstration. Soient $N : E \times E \to E \times E$ un opérateur défini par

$$N(u, v) = F(u, v) + B(u, v), \quad (u, v) \in E \times E,$$

Où

$$F(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v)), \quad B(u, v) = (B_1(u, v), B_2(u, v)),$$

$$F_1(u(t),v(t)) = \int_0^\infty H_1(t,s)f(s,u(s),v(s))ds,$$
$$F_2(u(t),v(t)) = \int_0^\infty H_2(t,s)g(s,u(s),v(s))ds,$$

$$B_1(u(t),v(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} H_1(t,t_k)I_{1,k}(u(t_k)) + \sum_{t_k<t} J_{1,k}(u(t_k)) + \frac{\displaystyle\int_0^\infty h_1(s)\Big(\sum_{t_k<s} J_{1,k}(u(t_k))\Big)ds}{1-\displaystyle\int_0^\infty h_1(s)ds},$$

et

$$B_2(u(t),v(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} H_2(t,t_k)I_{2,k}(u(t_k)) + \sum_{t_k<t} J_{2,k}(u(t_k)) + \frac{\displaystyle\int_0^\infty h_2(s)\Big(\sum_{t_k<s} J_{2,k}(u(t_k))\Big)ds}{1-\displaystyle\int_0^\infty h_2(s)ds}.$$

On considère l'ensemble suivant :

$$D = \{(u,v) \in E \times E : \ \|u\|_E \leq q \ et \ \|v\|_E \leq q\}.$$

où q est une constante positive.
Il est clair que D est un sous ensemble fermé, borné et convexe. On applique le Théorème de Krasnoselskii's 1.2.8 et on donne la preuve en plusieurs étapes.
Étape 2. B est une contraction généralisée.

Soient $(u,\bar{u}),(v,\bar{v}) \in E \times E$, d'après (H_3), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{|B_1(u(t),v(t)) - B_1(\bar{u}(t),\bar{v}(t))|}{1+t} \leq & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|H_1(t,t_k)|}{1+t} |I_{1,k}(u(t_k)) - I_{1,k}(\bar{u}(t_k))| \\
& + \sum_{t_k<t} |J_{1.k}(u(t_k)) - J_{1,k}(\bar{u}(t_k))| \\
& + \frac{\displaystyle\int_0^{\infty} h_1(s) \left(\sum_{t_k<s} |J_{1,k}(u(t_k)) - J_{1,k}(\bar{u}(t_k))| \right) ds}{\left| 1 - \displaystyle\int_0^{\infty} h_1(s)ds \right|} \\
\leq & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_1(t,t_k)}{1+t} a_{1,k} |u(t_k) - \bar{u}(t_k)| \\
& + \frac{1}{h_1^*} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} h_1(r) \frac{G_1(r,t_k)}{1+t} dr a_{1,k} |u(t_k) - \bar{u}(t_k)| \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1,k} |u(t_k) - \bar{u}(t_k)| \\
& + \frac{\displaystyle\int_0^{\infty} h_1(s)ds}{h_1^*} \sum_{k=1}^{\infty} b_{1,k} \left| u(t_k) - \bar{u}(t_k) \right|.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|B_1(u,v) - B_1(\bar{u},\bar{v})\|_E \leq & \left(1 + \frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*} \right) \sum_{k=1}^{\infty} (a_{1,k} + b_{1,k})(1+t) \|u - \bar{u}\|_E \\
:= & K_1 \|u - \bar{u}\|_E.
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\|B_2(u,v) - B_2(\bar{u},\bar{v})\|_E \leq & \left(1 + \frac{\|h_2\|_{L^1}}{h_2^*} \right) \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2,k} + b_{2,k})(1+t) \|u - \bar{u}\|_E \\
:= & K_2 \|u - \bar{u}\|_E.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} \|B_1(u,v) - B_1(\bar{u},\bar{v})\|_E \\ \|B_2(u,v) - B_2(\bar{u},\bar{v})\|_E \end{bmatrix} \leq M \begin{bmatrix} \|u - \bar{u}\|_E \\ \|u - \bar{u}\|_E \end{bmatrix},$$

Où

$$M = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}.$$

Puisque $K_1, K_2 \in [0,1)$, M converge vers zéro, ce qui implique que B est un opérateur contractant .
Étape 2. F est un opérateur continu.
Soit $(u_n, v_n) \to (u, v)$ lorsque $n \to \infty$. Alors $u_n \to u$ et $v_n \to v$. On a

$$\frac{|F_1(u_n(t), v_n(t)) - F_1(u(t), v(t))|}{1+t} \leq \int_0^\infty \frac{|H_1(t,s)|}{1+t} |f(s, u_n(s), v_n(s)) - f(s, u(s), v(s))| ds,$$

et donc

$$\frac{|F_1(u_n(t), v_n(t)) - F_1(u(t), v(t))|}{1+t} \leq \int_0^\infty \frac{|H_1(t,s)|}{1+t} |f(s, u_n(s), v_n(s)) - f(s, u(s), v(s))| ds$$

Puisque f est L^1-Carathéodory, par le Théorème de convergence dominée de lebesgue

$$\|F_1(u_n, v_n) - F_1(u, v)\|_E \to 0, \ n \to \infty,$$

en même

$$\|F_2(u_n, v_n) - F_2(u, v)\|_E \to 0, \ n \to \infty,$$

Donc F est continu .
Étape 3. F transforme les ensembles borné D vers des ensembles relativement compacts.

Soit $(u, v) \in D$. Alors, il existe une constante $q > 0$ telle que $\|u\|_E \leq q$ et $\|v\|_E \leq q$. Donc pour tout $t \in [0, +\infty)$. on a

$$\frac{|F_1(u(t), v(t))}{1+t} \leq \int_0^\infty \frac{|H_1(t,s)|}{1+t} |f(s, u(s), v(s))| ds,$$

et de même pour F_2, Puisque f et g sont des fonctions de L^1-Carathéodory, il existe une fonction $\phi_{M_0,M_1} \in L^1[0, \infty)$, telle que $\phi_{M_0,M_1} \geq 0$ telle que

$$|f(t, u(t), v(t))| \leq \phi_{r_1,r_2}(t) \quad \text{et} \quad |g(t, u(t), v(t))| \leq \phi_{r_1,r_2}(t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$\|F_1(u, v)\|_E \leq \left(1 + \frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right) \int_0^\infty \phi_{r_1,r_2}(s) ds,$$

en même, on a

$$\|F_2(u, v)\|_E \leq \left(1 + \frac{\|h_2\|_{L^1}}{h_2^*}\right) \int_0^\infty \phi_{r_1,r_2}(s) ds.$$

Donc, F transforme les ensembles bornés D vers des ensembles bornés D.

De plus, pour tout $T \in [0, +\infty)$ et $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$ avec $\tau_1 < \tau_2$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{F_1(u(\tau_2), v(\tau_2))}{1+\tau_2} - \frac{F_1(u(\tau_1), v(\tau_1))}{1+\tau_1}\right| \\
&\quad\leq \int_0^\infty \left|\frac{H_1(\tau_2, s)}{1+\tau_2} - \frac{H_1(\tau_1, s)}{1+\tau_1}\right| |f(s, u(s), v(s))| ds \\
&\quad\leq \int_0^\infty \left|\frac{H_1(\tau_2, s)}{1+\tau_2} - \frac{H_1(\tau_1, s)}{1+\tau_1}\right| \phi_{r_1,r_2}(s) ds \to 0 \quad \text{a } \tau_1 \to \tau_2.
\end{aligned}$$

en même, on a

$$\left|\frac{F_2(u(\tau_2), v(\tau_2))}{1+\tau_2} - \frac{F_2(u(\tau_1), v(\tau_1))}{1+\tau_1}\right| \leq \int_0^\infty \left|\frac{H_2(\tau_2, s)}{1+\tau_2} - \frac{H_2(\tau_1, s)}{1+\tau_1}\right| \phi_{r_1,r_2}(s) ds \to 0 \quad \text{lorsque } \tau_1 \to \tau_2,$$

Donc F est equicontinu pour tout interval compact de $[0, \infty)$.
Étape 4. L'opérateur N transforme tout ensemble borné D en un ensemble équiconvergent.
C'est-à-dire que, pour tout $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$, il existe un $T(\epsilon)$ suffisamment grand, avec $T(\epsilon) = \max(T_1(\epsilon_1), T_2(\epsilon_2))$, tel que

$$\left|\frac{F(u(\tau_2), v(\tau_2))}{1+\tau_2} - \frac{F(u(\tau_1), v(\tau_1))}{1+\tau_1}\right| \leq \epsilon \quad \text{pour tout } \tau_1, \tau_2 \geq T(\epsilon) \text{ et } (u, v) \in E \quad (3.12)$$

Puisque $\phi_{r_1,r_2} \in L^1[0.\infty)$, $\int_0^\infty \frac{|H_i(t,s)|}{1+t} \phi_{r_1,r_2}(s) ds < \infty$ pour $i = 1, 2$, on peut donc choisir $T_1(\epsilon)$ et $T_2(\epsilon)$ tels que

$$\int_0^\infty \frac{|H_i(t, s)|}{1+t} \phi_{r_1,r_2}(s) ds \leq \frac{\epsilon_i}{2}, \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Alors, pour chaque $\tau_1, \tau_2 \geq T_1(\epsilon_1)$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F_1(u(\tau_2), v(\tau_2))}{1+\tau_2} - \frac{F_1(u(\tau_1), v(\tau_1))}{1+\tau_1}\right| &\leq \int_0^\infty \left|\frac{H_1(\tau_2, s)}{1+\tau_2} - \frac{H_1(\tau_1, s)}{1+\tau_1}\right| \phi_{r_1,r_2}(s) ds \\
&\leq \int_0^\infty \frac{|H_1(\tau_2, s)|}{1+\tau_2} \phi_{r_1,r_2}(s) ds \\
&\quad + \int_0^\infty \frac{|H_1(\tau_1, s)|}{1+\tau_1} \phi_{r_1,r_2}(s) ds \\
&\leq \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_1}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

En même, pour $\tau_1, \tau_2 \geq T(\epsilon_2)$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F_2(u(\tau_2),v(\tau_2))}{1+\tau_2} - \frac{F_2(u(\tau_1),v(\tau_1))}{1+\tau_1}\right| &\leq \int_0^\infty \frac{|H_2(\tau_2,s)|}{1+\tau_2}\phi_{r_1,r_2}(s)ds \\
&\quad + \int_0^\infty \frac{|H_2(\tau_1,s)|}{1+\tau_1}\phi_{r_1,r_2}(s)ds \\
&\leq \frac{\epsilon_2}{2} + \frac{\epsilon_2}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Donc, pour chaque τ_1,$\tau_2 \geq \max(T_1(\epsilon_1), T_2(\epsilon_2))$

$$\left|\frac{F_2(u(\tau_2),v(\tau_2))}{1+\tau_2} - \frac{F_2(u(\tau_1),v(\tau_1))}{1+\tau_1}\right| \leq \epsilon \quad \text{pour tout } (u,v) \in D.$$

C'est-à-dire, (3.12) est vérifiée.
Donc on déduit d'après lemme 3.1.1 que l'opérateur F est complètement continue.

Étape 5. L'ensemble

$$B = \left\{(u,v) \in E \times E : \lambda F(u,v) + \lambda B\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}\right) = (u,v)\right\},$$

est borné pour $0 < \lambda < 1$.
Soit $(u,v) \in B$. Alors

$$\begin{aligned}
u(t) &= \lambda \int_0^\infty H_1(t,s) f(s,u(s),v(s))ds + \lambda \sum_{k=1}^\infty H_1(t,t_k) I_{1,k}\left(\frac{u(t_k)}{\lambda}\right) \\
&\quad + \lambda \sum_{t_k<t} J_{1,k}\left(\frac{u(t_k)}{\lambda}\right) + \lambda \frac{\int_0^\infty h_1(s)\left(\sum_{t_k<s} J_{1,k}\left(\frac{u(t_k)}{\lambda}\right)\right)ds}{1 - \int_0^\infty h_1(s)ds},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
v(t) &= \lambda \int_0^\infty H_2(t,s) g(s,u(s),v(s))ds + \lambda \sum_{k=1}^\infty H_2(t,t_k) I_{2,k}\left(\frac{v(t_k)}{\lambda}\right) \\
&\quad + \lambda \sum_{t_k<t} J_{2,k}\left(\frac{v(t_k)}{\lambda}\right) + \lambda \frac{\int_0^\infty h_2(s)\left(\sum_{t_k<s} J_{2,k}\left(\frac{v(t_k)}{\lambda}\right)\right)ds}{1 - \int_0^\infty h_2(s)ds}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{|u(t)|}{1+t} &\leq \left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\int_0^\infty P_1(s)|u(s)|ds\\ &+\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\int_0^\infty P_2(s)|v(s)|ds\\ &+\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\int_0^\infty P_3(s)ds\\ &+\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\sum_{k=1}^{\infty}|I_{1,k}(u(t_k))-I_{1,k}(0)+I_{1,k}(0)|\\ &+\sum_{t_k<t}|J_{1,k}(u(t_k))-J_{1,k}(0)+J_{1,k}(0)|\\ &+\frac{1}{h_1^*}\int_0^\infty h_1(s)\sum_{t_k<s}|J_{1,k}(u(t_k))-J_{1,k}(0)+J_{1,k}(0)|ds.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{|u(t)|}{1+t} &\leq \left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\int_0^\infty P_1(s)\frac{|u(s)|}{1+s}(1+s)ds\\ &+\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\int_0^\infty P_2(s)\frac{|v(s)|}{1+s}(1+s)ds\\ &+\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\int_0^\infty P_3(s)ds\\ &+\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\sum_{k=1}^{\infty}a_{1,k}\frac{|(u(t_k))|}{1+t_k}(1+t_k)\\ &+\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\sum_{k=1}^{\infty}|I_{1,k}(0)|\\ &+\sum_{t_k<t}b_{1,k}\frac{|(u(t_k))|}{1+t_k}(1+t_k)+\sum_{t_k<t}|J_{1,k}(0)|\\ &+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\sum_{t_k<s}b_{1,k}\frac{|(u(t_k))|}{1+t_k}(1+t_k)ds\\ &+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\sum_{t_k<s}|J_{1,k}(0)|.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{|u(t)|}{1+t} \leq & \left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\int_0^\infty P_1(s)(1+s)ds\|u\|_E \\
&+\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\int_0^\infty P_2(s)(1+s)ds\|v\|_E \\
&+\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\int_0^\infty P_3(s)ds \\
&+\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\sum_{k=1}^{\infty}(a_{1,k}+b_{1,k})(1+t_k)\|u\|_E \\
&+\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\sum_{k=1}^{\infty}|I_{1,k}(0)|+\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\sum_{k=1}^{\infty}|J_{1,k}(0)|.
\end{aligned}$$

En même, on a

$$\begin{aligned}
\frac{|v(t)|}{1+t} \leq & \left(1+\frac{\|h_2\|_{L^1}}{h_2^*}\right)\int_0^\infty \bar{P}_1(s)(1+s)ds\|u\|_E \\
&+\left(1+\frac{\|h_2\|_{L^1}}{h_2^*}\right)\int_0^\infty \bar{P}_2(s)(1+s)ds\|v\|_E \\
&+\left(1+\frac{\|h_2\|_{L^1}}{h_2^*}\right)\int_0^\infty P_3(s)ds \\
&+\left(1+\frac{\|h_2\|_{L^1}}{h_2^*}\right)\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2,k}+b_{2,k})(1+t_k)\|v\|_E \\
&+\left(1+\frac{\|h_2\|_{L^1}}{h_2^*}\right)\sum_{k=1}^{\infty}|I_{2,k}(0)|+\left(1+\frac{\|h_2\|_{L^1}}{h_2^*}\right)\sum_{k=1}^{\infty}|J_{2,k}(0)|.
\end{aligned}$$

Cela implique

$$\|u\|_E \leq N_1\|u\|_E + K_1\|u\|_E + N_2\|v\|_E + N_3,$$

et

$$\|v\|_E \leq C_1\|u\|_E + K_2\|u\|_E + C_2\|v\|_E + C_3.$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{pmatrix} 1-N_1-K_1 & -N_2 \\ -C_1 & 1-C_2-K_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\|u\|_E \\ \|v\|_E\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} N_3 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\tilde{M}\begin{pmatrix}\|u\|_E \\ \|v\|_E\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} N_3 \\ C_3 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Puisque $\tilde{M}$ satisfait les conditions du Lemme 1.2.4, $(\tilde{M})^{-1}$ est préserve l'ordre. On peut alors appliquer $(\tilde{M})^{-1}$ aux deux membres de l'inégalité (3.13) pour obtenir

$$\begin{pmatrix}\|u\|_E \\ \|v\|_E\end{pmatrix} \leq (\tilde{M})^{-1}\begin{pmatrix} N_3 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, d'après le Théorème 1.2.8, il existe au moins un point fixe, qui constitue une solution du problème (3.2) − (3.6). □

3.2.2 Exemple

Dans cette section, nous présentons un exemple simple pour illustrer notre résultat principal.

Exemple 3.2.1. *Considérons le système différentiel impulsif suivant :*

$$-u'' = \frac{e^{-t}}{100}(1+u+v)^{\frac{2}{3}}, \quad t \in J,\ t \neq k, \tag{3.14}$$
$$-v'' = \frac{e^{-t}}{200}(1+u+v)^{\frac{1}{2}}, \quad t \in J,\ t \neq k, \tag{3.15}$$
$$\Delta u(k) = \frac{1}{8^k}\sqrt{u(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3.16}$$
$$-\Delta u'(k) = \frac{1}{10^k}\sqrt{u(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3.17}$$
$$\Delta v(k) = e^{-2k}\frac{v(k)}{1+v(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3.18}$$
$$-\Delta v'(k) = e^{-3k}\frac{v(k)}{1+v(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3.19}$$
$$u(0) = \int_0^\infty e^{-4s}u(s)\,ds, \quad u'(\infty) = 0, \tag{3.20}$$
$$v(0) = \int_0^\infty e^{-5s}v(s)\,ds, \quad v'(\infty) = 0. \tag{3.21}$$

Les fonctions associées sont :

$$f(t,u,v) = \frac{e^{-t}}{100}(1+u+v)^{\frac{2}{3}}, \quad g(t,u,v) = \frac{e^{-t}}{200}(1+u+v)^{\frac{1}{2}},$$

$$J_{1,k}(u) = \frac{1}{8^k}\sqrt{u}, \quad I_{1,k}(u) = \frac{1}{10^k}\sqrt{u},$$
$$J_{2,k}(v) = e^{-2k}\frac{v}{1+v}, \quad I_{2,k}(v) = e^{-3k}\frac{v}{1+v},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, *et*

$$h_1(s) = e^{-4s}, \quad h_2(s) = e^{-5s}.$$

Notons que :

$$\int_0^\infty e^{-4s}\,ds = \frac{1}{4} \neq 1, \quad \int_0^\infty e^{-5s}\,ds = \frac{1}{5} \neq 1.$$

En utilisant l'inégalité suivante :

$$(1+x+y)^\gamma \leq 1 + \gamma x + \gamma y \quad \text{pour } x, y \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq \gamma \leq 1,$$

on obtient :

$$|f(t,u,v)| \leq \frac{e^{-t}}{100}\left(1+\frac{2}{3}|u|+\frac{2}{3}|v|\right),$$
$$|g(t,u,v)| \leq \frac{e^{-t}}{200}\left(1+\frac{1}{2}|u|+\frac{1}{2}|v|\right).$$

Ainsi, la condition (H_2) *est satisfaite avec :*

$$p_i(t)=\frac{e^{-t}}{150}, \quad \bar{P}_i(t)=\frac{e^{-t}}{400} \quad \textit{pour } i=1,2, \quad p_3(t)=\frac{e^{-t}}{100}, \quad \bar{P}_3(t)=\frac{e^{-t}}{200}.$$

Pour tout $u,\bar{u},v,\bar{v}\in\mathbb{R}^+$, *on a :*

$$|I_{1,k}(u)-I_{1,k}(\bar{u})| \leq \frac{1}{10^k}|u-\bar{u}|, \quad |J_{1,k}(u)-J_{1,k}(\bar{u})| \leq \frac{1}{8^k}|u-\bar{u}|,$$
$$|I_{2,k}(v)-I_{2,k}(\bar{v})| \leq e^{-3k}|v-\bar{v}|, \quad |J_{2,k}(v)-J_{2,k}(\bar{v})| \leq e^{-2k}|v-\bar{v}|.$$

Donc, la condition (H_3) *est également satisfaite avec :*

$$a_{1,k}=\frac{1}{10^k}, \quad b_{1,k}=\frac{1}{8^k}, \quad a_{2,k}=e^{-3k}, \quad b_{2,k}=e^{-2k}.$$

Nous calculons maintenant les constantes suivantes :

$$N_i=\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\int_0^\infty p_i(s)(1+s)\,ds=\frac{2}{255}<\infty, \quad i=1,2,$$
$$C_i=\left(1+\frac{\|h_2\|_{L^1}}{h_2^*}\right)\int_0^\infty \bar{P}_i(s)(1+s)\,ds=\frac{1}{320}<\infty, \quad i=1,2,$$
$$K_1=\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\sum_{k=1}^{\infty}(a_{1,k}+b_{1,k})(1+t_k)=\frac{1073}{1327}<1,$$
$$K_2=\left(1+\frac{\|h_2\|_{L^1}}{h_2^*}\right)\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2,k}+b_{2,k})(1+t_k)=0{,}41<1,$$
$$N_3=\left(1+\frac{\|h_1\|_{L^1}}{h_1^*}\right)\left(\int_0^\infty p_3(s)\,ds+\sum_{k=1}^{\infty}|I_{1,k}(0)|+\sum_{k=1}^{\infty}|J_{1,k}(0)|\right)=\frac{1}{75},$$
$$C_3=\left(1+\frac{\|h_2\|_{L^1}}{h_2^*}\right)\left(\int_0^\infty \bar{P}_3(s)\,ds+\sum_{k=1}^{\infty}|I_{2,k}(0)|+\sum_{k=1}^{\infty}|J_{2,k}(0)|\right)=\frac{1}{160}.$$

On vérifie ainsi que :

$$N_1+K_1\simeq 0{,}81<1, \quad C_2+K_2\simeq 0{,}41<1.$$

La matrice associée au système est :

$$\tilde{M}=\begin{pmatrix}1-0{,}81 & -\frac{2}{225}\\ -\frac{1}{320} & 1-0{,}41\end{pmatrix},$$

et son déterminant :

$$\det(\tilde{M})\simeq 0{,}11>0.$$

Par conséquent, toutes les hypothèses du Théorème 3.2.2 sont vérifiées, donc le système (3.14)–(3.21) *admet au moins une solution.*

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et l'unicité des solutions pour des systèmes d'équations différentielles impulsives avec des conditions aux limites.

Dans le premier chapitre, nous avons établi des résultats d'existence et d'unicité pour un système d'équations différentielles impulsives avec deux conditions aux limites. Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous avons étudié l'existence de solutions pour un système d'équations différentielles impulsives avec des conditions aux limites intégrales sur un domaine non borné.

Les résultats obtenus sont essentiellement basés sur l'application des théorèmes du point fixe de Perov et de l'alternative non linéaire de Leray–Schauder, ainsi que sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii dans un espace de Banach généralisé.

Bibliographie

[1] H. Abdeli, J.R. Graef, H. Kadari, A. Ouahab, A. Oumansour, Existence of solutions to systems of second-order impulsive differential equation with integral boundary condition on the half-line, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A, Math. Anal.*, **29** (2022), 91–209.

[2] I. Altun and C.cevik, Some common fixed point theorems in vector metric spaces,*Filomat.,* **25**(2011), 105-113.

[3] M. Benchohra, J. Henderson, and S. K. Ntouyas,*Impulsive Differential Equations and Inclusions,* Hindawi Publishing Corporation, Vol.2, New York, 2006.

[4] H. Berrezoug, J. Henderson, and A. Ouahab, Existence and uniqueness of solutions for a system of impulsive differential equations on the half-line, *J. Nonlinear Functional Analysis*, **2017** (2017), Article ID 38, pp. 1-16.

[5] O. Bolojan-Nica, G. Infante and R. Precup, Existence results for systems with coupled non local initial conditions, *Nonlinear Anal.* **4** (2014), 231–242.

[6] O. Bolojan and R. Precup, Implicit first order differential systems with nonlocal conditions, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **69** (2014), 1-13.

[7] C. Çevik, I. Altun, Vector metric spaces and some properties, *Topol. Methods Nonlinear Anal,* **34** (2009), 375-382.

[8] B. Dai, H. Su and D. Hu, Periodic solution of a delayed ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional response and impulse, *Nonlinear Anal.* **70** (2009), 126-134.

[9] S. Djebali and K. Mebarki, System of singular second-order differential equations with integral condition on the positive half-line, *Electron. J. Qual. Theory Dier. Equ.***50** (2013).

[10] S. Djebali and K. Mebarki, Semi-positone sturm-liouville differential systems on unbounded intervals, *Acta Math. Univ. Comenianae.* **2** (2016), 231-259.

[11] P. Georgescu and G. Morosanu, Pest regulation by means of impulsive controls, *Appl. Math. Comput.* **190** (2007), 790-803.

[12] J. R. Graef, J. Henderson and A. Ouahab, Impulsive Differential Inclusions : A Fixed Point Approach, *De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications*, **20**, de Gruyter, Berlin, 2013.

[13] J. R. Graef, J. Henderson and A. Ouahab, Topological Methods for Differential Equations and Inclusions, *Monographs and Research Notes in Mathematics*, CRC Press, 2019.

[14] J. R. Graef, H. Kadari, A. Ouahab and A. Oumansour, Existence results for systems of second-order impulsive differential equations. em Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 88 (2019), 51–66.

[15] H. Kadari, A. Oumansour, J. Graef and A. Ouahab, Existence of positive solutions to impulsive nonlinear differential systems of second order with two point boundary conditions, *Stud. Univ. Babe¸s-Bolyai Math.* **69** (2024), No. 3, 639–649.

[16] V. Lakshmikantham, D. D. Bainovo, and P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.

[17] E. K. Lee and Y. H. Lee, Multiple positive solutions of a singular Emden-Fowler type problem for second-order impulsive differential systems, *Bound. Value Probl.*, **2011** (2011), Art. ID 212980, 22 pp.

[18] L.Liu, L.Hu and Y.Wu, Positive solutions of nonlinear singular two-point boundary value problems for second-order impulsive differential equations, *App.Math.Comput.*196 (2008), 550-562.

[19] J. J. Nieto and R. Rodriguez-Lopez, New comparison results for impulsive integro-differential equations and applications, *J. Math. Anal. Appl.* **328** (2007), 1343-1368.

[20] J. J. Nieto and R. Rodriguez-Lopez, Boundary value problems for a class of impulsive functional equations, *Comput. Math. Appl.* **55** (2008), 2715–2731.

[21] O. Nica, Existence results for second order three point boundary value problems, *Differ. Equ. Appl.* **4** (2012), 547–570.

[22] O. Nica, Initial-value problems for first-order differential systems with general nonlocal conditions, *Electron. J. Differ. Equ,* **2012** (2012), No. 74, pp. 1–15.

[23] O. Bolojan-Nica, G. Infante and R. Precup, Existence results for systems with coupled nonlocal initial conditions, *Nonlinear Anal,* **4** (2014), 231–242.

[24] O. Nica and R. Precup, On the nonlocal initial value problem for first order differential systems, *Stud. Univ. Babes-Bolyai Math.* **56** (2011), No. 3, 125–137.

[25] A.I. Perov, On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations, *Pribliz. Met. Reshen. Differ. Uravn.* **2** (1964), 115–134 (in Russian).

[26] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer Dordrecht, 2000.

[27] B. Radhakrishnan and K. Balachandran, Controllability results for second order neutral impulsive integrodifferential systems, *J. Optim. Theory Appl.,* **151** (2011), 589–612.

[28] A. M. Samoilenko and N. A. Perestyuk, *Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1995.

[29] J. H. Shen and J. L. Li, Existence and global attractivity of positive periodic solutions for impulsive predator-prey model with dispersion and time delays, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **10** (2009), 227–243.

[30] J. Sun, H. Chen, J. J. Nieto and M. Otero-Novoa, The multiplicity of solutions for perturbed second-order Hamiltonian systems with impulsive effects, *Nonlinear Anal.,* **72** (2010), 4575–4586.

[31] R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis,* Second revised and expanded edition, Springer Series in Computational Mathematics, 27, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[32] J.R.L. Webb and G. Infante. Positive solutions of nonlocal boundary value problems : a unified approach. *London Math. Soc.* (2), **74** (3), 673–693, 2006.

[33] W.B. Wang, J.H. Shen and J.J. Nieto, Permanence periodic solution of predator prey system with Holling type functional response and impulses, *Discrete Dyn. Nat. Soc.* 2007, Art. ID 81756, **15** pp.

[34] S. L. Xi, M.Jia and H. P. Ji , Positive solutions of boundary value problem for systems of second-order differential equations with integral boundary condition on the half line, *Electron. J. Qual. Theory Difer. Equ*, **31** (2009), 13pp.

[35] P.P. Zabrejko, K-metric and k-normed lineair spaces : survey, *collect Math*, **48**, No. 4-6, (1997), 825–859.

[36] S. T. Zavalishchin and A. N. Sesekin, *Dynamic Impulse Systems, Theory and Applications*, Mathematics and its Applications, **394**, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[37] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis*, Vol.I, Fixed point theorems, Springer, Berlin, 1993.

[38] G. Zeng, F. Wang, and J. J. Nieto, Complexity of a delayed predator-prey model with impulsive harvest and Holling-type II functional response, *Adv. Complex Syst,* **11** (2008), 77–97.

[39] X. Q. Zhang, Positive solutions of singular multipoint boundary value problem for systems of nonlinear second-order differential equations on infnite intervals in Banach spaces, *Bound. Value Probl.* (2009), Art. ID 978605, 22 pp.

[40] H. Zhang, L. S. Chen, and J. J. Nieto, A delayed epidemic model with stage structure and pulses for management strategy, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **9** (2008), 1714–1726.

[41] H. Zhang, W. Xu, and L. Chen, A impulsive infective transmission SI model for pest control, *Math. Methods Appl. Sci,* **30** (2007), 1169–1184.