الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Ahmed Zabana de Relizane
Faculté des sciences et de Téchnologé
Département Mathématiques et Informatique

MEMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de MASTER
Dans le cadre de la décision 008 : Diplôme Département Mathématiques et Informatique, Spécialité :
Géométrique et Equations différentielles.

Intitulé

LA DÉRIVABILITÉ ET L'INTÉGRATION DANS LES ECHELLES DE TEMPS.

Présenté par : Mlle. Ghezala fatima zohra.

Devant les membres de jury :

Président : Mr. Slimane Mehdi	Maître de conférences (B)	(U. Relizane.)
Encadrant: Mr. Nehari Mohamed	Maître de conférences (B)	(U. Tissemsilt.)
Examinateur: Mr. Meziane Mohammed	Maître de conférences (A)	(U. Tissemsilt.)

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

On remercie ALLAH le Tout-puissant de nous avoir donner le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail.

On tient tout d'abord à remercier notre rapporteur Monsieur NEHARI, M pour ces précieux conseils qu'il nous a donné et pour ces connaissances théoriques et expérimentales qu'on a exploité durant notre mémoire de fin d'études.

Je remercie tous les membres du jury d'avoir accepté d'examiner mon travail, et d'y avoir porté leur juste appréciation.

Nos remerciements les plus chaleureux vont également aux enseignants du département mathématique qui ont contribué à notre formation.

À tous nos collègues avec qui on a partagé ces années de post graduation.

Et en fin nos vifs remerciements à mes parents, mon frère et mes sœurs et mes amies. Enfin, je remercie toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

DÉDICACE

À moi-même, à celle qui a lutté, persévéré et tenu bon face aux épreuves avec courage et patience.

-À celle qui n'a jamais abandonné, qui a cru en son rêve et s'en est approchée pas à pas, jusqu'à le voir se réaliser.

- Merci à moi... pour ne m'être jamais laissée tomber.

-À ma famille bien-aimée, refuge de tendresse et source de force inépuisable, qui m'a soutenue dans les moments les plus sombres et célébrée dans les instants de lumière.

-À mon compagnon de vie, mon pilier, mon appui fidèle, qui a cru en moi en silence, m'a portée par son amour et m'a poussée à avancer.

-À ma grande famille éducative,

- mes collègues chers, compagnons de mission noble et précieuse, qui ont partagé avec moi le chemin de l'enseignement avec passion et sincérité.

-Et à mes chers élèves, vous êtes le cœur de cette réussite, sa lumière et son essence. Par votre présence, votre soif de savoir et vos sourires, vous avez donné un sens profond à ce parcours.

- Merci à chacun de vous d'avoir été une part de ce rêve devenu réalité.

Table des matières

Introduction **iii**

1 Différentiabilité sur les échelles de temps **1**

1.1 Introduction 1

1.2 Définition d'une échelle de temps 1

1.2.1 Classification des points dans une échelle de temps $\mathbb{T}$ 2

1.3 Delta différentiabilité 4

1.4 Nabla différentiabilité 7

2 Intégration dans les échelles de temps **12**

2.1 Introduction 12

2.2 Intégration dans les échelles de temps 12

2.3 Delta Intégration et primitives 14

2.4 Δ-Intégration par partie 17

2.5 Nabla Intégration et primitive 20

3 Applications **21**

3.1 Introduction 21

3.2 Résultats Préliminaires 21

3.3 Résultat principal 26

3.4 Exemple 35

Conclusion **38**

Bibliographie **I**

Résumé **II**

Introduction

La théorie des échelles de temps à été introduite par le mathématicien Allemand **STEFAN HIGER** en 1988 dans sa thèse de doctorat dans le but d'unifier d'analyse continue et d'analyse discrète, il a des applications dans tous les domaines nécessitant la modélisation simultanée de données discrètes et continues.
Une échelle de temps T est un sous ensemble non vide fermé de l'ensemble des nombres rèels $\mathbb{R}$.
Premièrement : Ce chapitre traite la dérivation dans le contexte des échelles de temps.
Où sont introduit les notions de delta dérivée et de nabla dérivée accompagnées d'une description de leurs Caractéristiques et applications.
chapitre deux : Ce chapitre traite l'intégration sur les échelles des temps Comprenant une vie d'ensemble de l'intégration delta et nable, ainsi qu'une discussion sur les caractéristiques essentielles de Ces intégrations.
Chapitre trois : Ce chapitre expose les conclusions majeures de l'étude, ainsi que les résultats initiaux et une application démonstrative illustrant la performance des outils théoriques élaborés.

CHAPITRE 1

Différentiabilité sur les échelles de temps

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on introduit quelques définitions et théorèmes, puis on présente les résultats principaux sur la différentiabilité sur les échelles les temps.

1.2 Définition d'une échelle de temps

Définition 1.1. *[9, 10] Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous-ensemble non vide fermé de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.*
Par exemple, les ensemble $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ et $[0,1] \cup [2,3]$ sont des échelles de temps, tandis que les ensembles $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ et $(0,1)$ ne sont pas des échelles de temps.

Définition 1.2. *[9] Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps. Pour $t \in \mathbb{T}$, on dit que :*

— *L'opérateur de saut superieur $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$.*
— *L'opérateur de saut inferieur $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$.*
— *La fonction de granulation superieur $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ par $\mu(t) = \sigma(t) - t$.*
— *La fonction granulation inferieur $\gamma : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ par $\gamma(t) = t - \rho(t)$.*

Example 1.1. *considérons l'échelle de temps,*

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2 = \left\{n^2 : n \in \mathbb{N}_0\right\}$

nous avons :

$\sigma\left(n^2\right) = (n+1)^2 \quad$ *pour* $n \in \mathbb{N} \quad$ *et* $\mu\left(n^2\right) = \sigma\left(n^2\right) - n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1.$

par conséquent $\sigma(t) = (\sqrt{t}+1)^2 \quad$ *et* $\quad \mu(t) = 1 + 2\sqrt{t} \quad$ *pour* $\quad t \in \mathbb{T}$

$\rho(t) = (\sqrt{t}-1)^2 \quad$ *et* $\quad \gamma(t) = 1 - 2\sqrt{t} \quad$ *pour* $\quad t \in \mathbb{T}$

(ii) Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z} = \{z : z \in \mathbb{Z}\}$ *on a :*

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} \\ &= \inf\{t+1, t+2, t+3, \ldots\} = t+1 \\ \rho(t) &= \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} \\ &= \sup\{t-1, t-2, t-3, \ldots\} = t-1\end{aligned}$$

Donc, $\mu(t) = \gamma(t) = 1$.

1.2.1 Classification des points dans une échelle de temps $\mathbb{T}$

Soit $t \in \mathbb{T}$, $\mathbb{T}$ une échelle de temps.

Définition 1.3. *On dit que* t *est un point dispersé à gauche de* $\mathbb{T}$ *(resp. Un point dispersé à droite de* $\mathbb{T}$*), si* $\rho(t) < t($ *resp.* $\sigma(t) > t)$.

Définition 1.4. *On dit que* t *est un point isolé s'il est simultanément dispersé à gauche et à droite .*

Définition 1.5. *On dit que* t *est un point dense à gauche de* $\mathbb{T}$ *(resp. un point dense à droite de* $\mathbb{T}$ *), si* $\rho(t) = t($ *resp.* $\sigma(t) = t)$.

Définition 1.6. *On dit que* t *est dit un point dense s'il est simultanément dense à gauche et à droite.*

Le tableau suivant résume la classification des points dans une échelle de temps.

Points	La description
dispersé à gauche	$\rho(t) < t$
despersé à droite	$t < \sigma(t)$
isolé	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
dense à gauche	$\rho(t) = t$
dense à droite	$\sigma(t) = t$
dense	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

Maintenant, nous utilisons les définitions précédentes pour déterminer les caractéristiques (operateur de saut, fonction de granulation) de quelques échelles de temps, indiqués dans le tableau suivant :

$\mathbb{T}$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$	$\mu(t)$
$\mathbb{R}$	t	t	0
$\mathbb{Z}$	$t+1$	$t-1$	1
$q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$	qt	$\frac{t}{q}$	$(q-1)t$
$\mathbb{N}^k$	$(1+\sqrt[k]{t})^k$	$(\sqrt[k]{t}-1)^k$	$(1+\sqrt[k]{t})^k - t$
$\frac{n}{2}$	$t+\frac{1}{2}$	$t-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Définition 1.7. *Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, alors nous définissons la fonction $f^\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)), \text{ pour } \forall t \in \mathbb{T}, c - \grave{a} - d, f^\sigma = f \circ \sigma.$$

Example 1.2. *Soient $\mathbb{T} = \left\{t = 2^{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\}, f(t) = t^2 + t - 1$, alors on a :*

$$\sigma(t) = \inf\left\{2^{l+2} : 2^{l+2} < 2^{n+2}, l \in \mathbb{N}\right\} = 2^{n+3} = 2t,$$

$$\text{donc } f^\sigma(t) = f(\sigma(t)) = (\sigma(t))^2 + \sigma(t) - 1$$

$$f^\sigma(t) = 4t^2 + 2t - 1.$$

Définition 1.8. *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps*

— *Si $\mathbb{T}$ admet un maximum M dispersé à gauche, on définit l'ensemble $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$, si non $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.*

— *Si $\mathbb{T}$ admet un minimum m dispersé à droite, on définit l'ensemble $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{m\}$, si non $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.*

— *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction, on définit la fonction $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ (resp. $f^\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$) par $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$ pour tout $t \in \mathbb{T}$ (resp. $f^\rho(t) = f(\rho(t))$) (i.e $f^\sigma = fo\sigma$).*

— *Soit $a, b \in \mathbb{T}$ tel que $a < b$, On définie l'intervale $[a, b]$ dans $\mathbb{T}$ par :*

$$[a, b] = [a, b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Example 1.3. *Soit $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n^2+3} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$, sup $\mathbb{T} = \frac{1}{4} < +\infty$, alors :*

$$\rho\left(\frac{1}{4}\right) = \sup\left\{\frac{1}{l^2+3}, 0 : \frac{1}{l^2+3}, 0 < \frac{1}{4}, l \in \mathbb{N}\right\} = \frac{1}{7}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{T}^K = \mathbb{T} \backslash \left]\frac{1}{7}, \frac{1}{4}\right] = \left\{\frac{1}{n^2+3} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right\} \cup \{0\}$$

Example 1.4. *Soit $\mathbb{T} = \{n : n \in \mathbb{N}\}$, alors sup $\mathbb{T} = +\infty \Longrightarrow \mathbb{T}^k = \mathbb{T}$*

Example 1.5. *Soit $[a, b]$ un intervale dans $\mathbb{T}$, et soit b un point dense à gauche de $\mathbb{T}$. Alors*

$$\sup \mathbb{T} = b$$

et puisque b *est dense à gauche on a :*

$$\rho(b) = b$$

Donc

$$[a, b]^k = [a, b] \backslash \big] b, b \big] = [a, b] \backslash \emptyset = [a, b].$$

Définition 1.9. *Une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est dite régulière, si sa limite à droite existe en tout point dispersé à droite de* $\mathbb{T}$*, et sa limite à gauche existe en tout point dispersé à gauche de* $\mathbb{T}$.

Définition 1.10. *Une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est dit rd-continue si elle est continue en tout point dense à droit de* $\mathbb{T}$ *et si sa limite à gauche existe et est finie en tout point dense à gauche de* $\mathbb{T}$.

— On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont rd-continue sur $\mathbb{T}$ par :

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

— On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont différentiables et ses dérivées sont rd-continues sur $\mathbb{T}$ par $C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T}) = C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

Théorème 1.1. *Soitent* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *:*

(i) Si f *est continue, alors* f *est rd-continue.*

(ii) Si f *est rd-continue, alors* f *est régulière.*

(iii) L'opérateur de saut à droit σ *est rd-continue.*

(iv) Si f *est rd-continue (resp.régulière), alors* f^σ *est rd-continue (resp.régulière)*

(v) Si f *est rd-continue (resp. régulière) et* g *est continue, alors* gof *est rd-continue (resp.régulière).*

1.3 Delta différentiabilité

Définition 1.11. *Soient* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $t \in \mathbb{T}^k$*. On dira que* f *est* Δ*-différentiable en* t *s'il existe un nombre* $f^\Delta(t) \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un voisinage* $\mathcal{U}$ *de* t *où*

$$\left| f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \qquad \text{pour tout } s \in \mathcal{U}$$

On appelle $f^\Delta(t)$ *la* Δ*-dérivée de* f *en* t*.*
Si f *est* Δ*-différentiable en* t *pour tout* $t \in \mathbb{T}^k$*, alors* $f^\Delta : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ *est appelée la* Δ*-dérivée de* f *sur* $\mathbb{T}^k$.

Example 1.6. *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps quelconque et soit $f(t) = \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{T}$, nous preuverons que $f^{\Delta}(t) = 0, \forall t \in \mathbb{T}^k$.*

Pour $t \in \mathbb{T}^k, \forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $s \in]t-\delta, t+\delta[\cap\mathbb{T}, s \neq \sigma(t)$, implique :

$$\begin{aligned}&|[f(\sigma(t)) - f(s)] - 0[\sigma(t) - s]|\\ =&|[\alpha - \alpha] - 0[\alpha - \alpha]| = |\alpha - \alpha| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|\end{aligned}$$

Example 1.7. *Soit la fonction $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t$.*

Pour cet exemple $f^{\Delta}(t) = 1$, en effet pour chaque $\varepsilon > 0$ on a

$$\begin{aligned}\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| &= \varepsilon|\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)|\\ &= 0\\ &\leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \forall s \in T\end{aligned}$$

Théorème 1.2. *Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$.*

(i) Si f est Δ-différentiable en t, alors f est continue en t.

(ii) Si f est continue en t et si t est dispersé à droite, alors f est Δ-différentiable en t et

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \tag{1.1}$$

(iii) Si t est dense à droite, alors f est Δ-différentiable en t si et seulement si $\lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$ existe et finie. Dans ce cas,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \tag{1.2}$$

(iv) Si f est Δ-différentiable en t, alors

$$f^{\sigma}(t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t) \tag{1.3}$$

Théorème 1.3. *Si $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sont Δ-différentiables en $t \in \mathbb{T}^k$, alors*

(i) $f + g$ est Δ-différentiable en t et

$$(f + g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha f$ est Δ-différentiable en t et

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$$

(iii) fg est Δ-différentiable en t et

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)g(t) + f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)\\ &= f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t)\end{aligned}$$

(iv) *Si $g(t)g^{\sigma}(t) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est Δ-différentiable en t et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g^{\sigma}(t)g(t)} \tag{1.4}$$

Définition 1.12. *Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite deux fois dérivable sur $\mathbb{T}^{k^2}$, si sa dérivée f^{Δ} est différentiable sur $\mathbb{T}^{k^2}$, et on note la dérivée seconde de f par :*

$$f^{\Delta^{(2)}} = \left(f^{\Delta}\right)^{\Delta} : \mathbb{T}^{k^2} \to \mathbb{R}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la dérivée d'ordre n de f sur $\mathbb{T}^{k^n}$ par :

$$f^{\Delta^n} = \left(f^{\Delta^{n-1}}\right)^{\Delta}$$

On notera l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont n fois différentiables et f^{Δ^n} rd-continues sur $\mathbb{T}^{k^n}$ par :

$$\mathcal{C}^n_{rd} = \mathcal{C}^n_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}^n_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

Théorème 1.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction Δ-différentiable.*
Alors $f \circ g$ est Δ-différentiable et on :

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t)\right) dh \right\} g^{\Delta}(t) \tag{1.5}$$

Exemples de calcul des dérivées

(i) Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors pour $t \in \mathbb{T}^k = \mathbb{R}$ est point dense à droite ($\sigma(t) = t$)

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

(ii) Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, alors pour $t \in \mathbb{T}^k = \mathbb{Z}$ est un point isolé ($\sigma(t) = t + 1$), donc

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

(iii) Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, alors pour $t \in \mathbb{T}^k = h\mathbb{Z}$ est un point isolé ($\sigma(t) = t + h$), donc

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f(t+h) - f(t) = \Delta_h f(t)$$

Définition 1.13. *Soient f et g deux fonctions delta-différentiables et supposons f^{σ} est delta-différentiable, alors*

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta\Delta} &= \left(f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}\right)^{\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + \left(f^{\Delta}\right)^{\sigma} g^{\Delta} + \left(f^{\sigma}\right)^{\Delta} g^{\Delta} + \left(f^{\sigma}\right)^{\sigma} g^{\Delta\Delta}\end{aligned}$$

Example 1.8. *La fonction* $(fg)^\Delta$ *est delta-différentiable si* f *et* g *sont delta-différentiables.*

(i) Pour une fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ *on a*

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \\ &= f(t+1) - f(t), \forall t \in T \end{aligned}$$

d'ou

$$\begin{aligned} f^{\Delta\Delta}(t) &= \frac{f^\Delta(\sigma(t)) - f^\Delta(t)}{\mu(t)} \\ &= f^\Delta(t+1) - f^\Delta(t) \\ &= f(t+2) - f(t+1) - f(t+1) + f(t) \\ &= f(t+2) - 2f(t+1) + f(t) \end{aligned}$$

(ii) L'opérateur σ *n'est pas continu en général, en effet*

Soit T *l'échelle de temps définie par :*

$$T = \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right), n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0,1\}$$

Si on pose $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$, *alors on a*

$$\sigma(u_n) = u_{n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2(n+2)}\right) \longrightarrow 0 \neq 1 = \sigma(0)$$

donc σ *est discontinu au point 0.*

Théorème 1.5. *[1] (Théorème de la moyenne)*

Soit $g : [a,b]_T \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et supposons que* g *est delta-différentiable sur* $[a,b)_T$*. Alors il existe* $\xi, \tau \in [a,b)_T$ *tel que*

$$g^\Delta(\tau) \leq \frac{g(b) - g(a)}{b-a} \leq g^\Delta(\xi)$$

Définition 1.14. *Soient* T *une échelle de temps et* $g : [a,b]_T \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. La fonction* $G : T^\kappa \longrightarrow \mathbb{R}$ *est appelée primitive de* g *si* $G^\Delta(t) = g(t)$ *pour tout* $t \in T^\kappa$.

1.4 Nabla differentiabilité

Définition 1.15. *[8] [3] Soient* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $t \in \mathbb{T}^k$.

On dira que f *est* ∇*-différentiable en* t *s'il existe un nombre* $f^\nabla(t) \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* t *où*

$$\left| f^\rho(t) - f(s) - f^\nabla(t)(\rho(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\rho(t) - s|, \quad \textit{pour tout } s \in \mathcal{V}$$

On appelle $f^{\nabla}(t)$ *la* ∇*-dérivée de* f *en* t*.*

Si f *est* ∇*-différentiable en* t *pour tout* $t \in \mathbb{T}^k$*, alors* $f^{\nabla} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ *est appelée la* ∇*-dérivée de* f sur $\mathbb{T}^k$*.*

Théorème 1.6. *[4] Soient* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $t \in \mathbb{T}^k$*.*

(i) Si f *est* ∇*-différentiable en* t*, alors* f *est continue en* t*.*

(ii) Si f *est continue en* t *et si* t *est dispersé à gauche, alors* f *est* ∇*-différentiable en* t *et*

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\gamma(t)}.$$

(iii) Si t *est dense à gauche, alors* f *est* ∇*-différentiable en* t *si et seulement si*

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \text{ existe et finie.}$$

Dans ce cas,

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

(iv) Si f *est* ∇*-différentiable en* t*, alors*

$$f^{\rho}(t) = f(t) - \gamma(t) f^{\nabla}(t).$$

Démonstration. (i) Supposons que f est ∇-différentiable en t, alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de t tel que :

$$\left|(f^{\rho}(t) - f(s)) - f^{\nabla}(t)(\rho(t) - s)\right| \leq \varepsilon^* |\rho(t) - s|, \quad \text{pour tout } s \in \mathcal{V}.$$

Où ,

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{1 + 2\gamma(t) + |f^{\nabla}(t)|}$$

Par conséquent, nous avons, pour tout $s \in \mathcal{V}_t \cap]\, t - \varepsilon^*, t + \varepsilon^* [$,

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(s)| =& \left| \big(f(\rho(t) - f(s)) - f^{\nabla}(t)(\rho(t) - s)\right. \\
& - \left[\big(f(\rho(t) - f(t)) - f^{\nabla}(t)(\rho(t) - t)\right] + f^{\nabla}(t)(t - s) \,| \\
& \leq \varepsilon^* |(\rho(t) - s)| + \varepsilon^* |(\rho(t) - t)| + \left|f^{\nabla}(t)(t - s)\right| \\
& \leq \varepsilon^* \left\{\gamma(t) + |s - t| + \gamma(t) + \left|f^{\nabla}(t)\right|\right\} \\
& \leq \varepsilon^* \left\{1 + 2\gamma(t) + \left|f^{\nabla}(t)\right|\right\} \\
& \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc, f continue en t.

(ii) Si t est dense à gauche, alors $\gamma(t) = 0$, et

$$f(\rho(t)) = f(t) - \gamma(t) f^{\nabla}(t) = f(t)$$

D'autre part, sit est dispersé à gauche . Donc d'après la propriété (ii) du théorème 1.6 on a

$$\begin{aligned} f(\rho(t)) &= f(t) + \gamma(t) \cdot \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\gamma(t)} \\ &= f(t) - \gamma(t) \cdot \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\gamma(t)} \\ &= f(t) - \gamma(t) f^{\nabla}(t). \end{aligned}$$

□

Théorème 1.7. *[4, 5, 8] Si $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sont ∇-différentiables en $t \in \mathbb{T}^k$, alors*

(i) $f + g$ est ∇-différentiable en t et

$$(f+g)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t) + g^{\nabla}(t).$$

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha f$ est ∇-différentiable en t et

$$(\alpha f)^{\nabla}(t) = \alpha f^{\nabla}(t).$$

(iii) fg est ∇-différentiable en t et

$$\begin{aligned} (fg)^{\nabla}(t) &= f^{\nabla}(t) g(t) + f^{\rho}(t) g^{\nabla}(t). \\ &= f(t) g^{\nabla}(t) + f^{\nabla}(t) g^{\rho}(t). \end{aligned}$$

(iv) Si $g(t) g^{\rho}(t) \neq 0$, *alors $\frac{f}{g}$ est ∇-différentiable en t et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t) = \frac{f^{\nabla}(t) g(t) - f(t) g^{\nabla}(t)}{g(t) g^{\rho}(t)}$$

(v) Si $f(t) f^{\rho}(t) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est ∇-différentiable en t et

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\nabla}(t) = -\frac{f^{\nabla}(t)}{f(t) f^{\rho}(t)}$$

Définition 1.16. *[6] Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et $t \in (\mathbb{T}_k)_k = \mathbb{T}_{k^2}$.*
On définit la ∇-dérivée seconde de f ent par :

$$f^{\nabla\nabla} = \left(f^{\nabla}\right)^{\nabla} : \mathbb{T}_{k^2} \to \mathbb{R}$$

De la même manière, on définit la ∇-dérivée d'ordre n de f par :

$$f^{\nabla^n} : \mathbb{T}_{k^n} \to \mathbb{R}, \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Dans le théorème suivant, nous donnons une relation entre la ∇-dérivée et la Δ-dérivée .

Théorème 1.8. *[7]*

(i) Supposons $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable sur $\mathbb{T}_k$, alors f est ∇-différentiable en t et

$$f^{\nabla}(t) = f^{\Delta}(\rho(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}_k.$$

tel que $\sigma(\rho(t)) = t$ si, en plus, f^{Δ} est continue sur $\mathbb{T}^k$ alors f est différentiable en t.

(ii) Supposons $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est ∇-différentiable sur $\mathbb{T}_k$, alors f est Δ-différentiable en t et

$$f^{\Delta}(t) = f^{\nabla}(\sigma(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

tel que $\rho(\sigma(t)) = t$ si, en plus, f^{∇} est continue sur $\mathbb{T}_k$ alors f est différentiable en t.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle donnée par les théorèmes (3.3.9) et (3.3.10) . □

Théorème 1.9. *[5] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction ∇-différentiable. Alors $f \circ g$ est ∇-différentiable et on a :*

$$(f \circ g)^{\nabla}(t) = \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) - h\gamma(t)g^{\nabla}(t)\right) dh \right\} g^{\nabla}(t)$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle donnée par le théorème (3.2.5). □

Théorème 1.10. *[5] Supposons que $v : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante et $\widetilde{\mathbb{T}} := v(\mathbb{T})$ est une échelle de temps. Soit $w : \widetilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$, si $v^{\nabla}(t)$ et $w^{\tilde{\nabla}}(v(t))$ existent pour $t \in \mathbb{T}_k$, alors*

$$(w \circ v)^{\nabla}(t) = \left[\left(w^{\tilde{\nabla}} \circ v\right) v^{\nabla}\right](t), \ \textit{pour } t \in \mathbb{T}_k.$$

Example 1.9. *Soit $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ et $v(t) = 4t + 1$.*

$$\widetilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T}) = \{4n + 1 : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 5, 9, 13, \cdots\}.$$

Soit $w : \widetilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est définie par : $w(t) = t^2$. Alors

$$(w \circ v)^{\nabla}(t) = (4t + 1)^2 - [4(t - 1) + 1]^2 = 32t - 8$$

Maintenant, on calcul $v^{\nabla}(t)$ et $w^{\tilde{\nabla}}(t)$

$$v^{\nabla}(t) = 4t, \ \textit{et } w^{\tilde{\nabla}}(t) = \frac{w(t) - w(\widetilde{\rho}(t))}{t - \widetilde{\rho}} = 2t - 4$$

Par conséquent ,

$$\left(w^{\tilde{\nabla}} \circ v\right)(t) = w^{\tilde{\nabla}}(v(t)) = 2(4t + 1) - 4 = 8t - 2$$

Donc ,

$$\left[\left(w^{\tilde{\nabla}} \circ v\right) v^{\nabla}\right](t) = (8t - 2)4 = 32t - 8 = (w \circ v)^{\nabla}(t)$$

Théorème 1.11. *Soit* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est* $\Delta-$ *différentiable et si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continument différentiable, alors* $\exists c \in [t, \sigma(t)]$*, satisfaisant :*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = f'(g(c))g^{\Delta}(t)$$

Example 1.10. *Soient* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}, f(t) = t^3 + 1, g(t) = t^2$*, on a* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue,* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est delta-différentiable sur* $\mathbb{T}^k, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continument différentiable,* $\sigma(t) = t + 1$*, alors on a :*

$$g^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t$$

$$(f \circ g)^{\Delta}(1) = f'(g(c))g^{\Delta}(1) = 3g^2(c)(\sigma(1) + 1) = 9c^4$$

$$\textit{Ainsi } c \in [1, \sigma(1)] = [1, 2], \;\; \textit{aussi } (f \circ g)(t) = t^6 + 1$$

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \sigma^5(t) + t\sigma^4(t) + t^2\sigma^3(t) + t^3\sigma^2(t) + t^4\sigma(t) + t^5$$

$$(f \circ g)^{\Delta}(1) = 63 \Longrightarrow 9c^4 = 63 \Longrightarrow c^4 = \frac{63}{9} = 7 \textit{ donc } c = \sqrt[4]{7} \in [1, 2]$$

CHAPITRE 2

Intégration dans les échelles de temps

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à la théorie de l'intégral de Riemann dans les échelles de temps.

2.2 Intégration dans les échelles de temps

Afin de décrire les classes de fonctions «intégrables», nous introduisons les deux concepts suivants.[30, 31, 32, 33]

Définition 2.1. *[8] Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite régulière si sa limite à droite existe (finie) en tout point dense à droite de t et sa limite à gauche existe (finie) en tout point dense à gauche de t.*

Définition 2.2. *[8] Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de t et sa limite à gauche existe (finie) en tout point dense à gauche de t. L'ensemble des fonctions rd-continues $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sera noté par :*

$$C_{rd} = C_{rd}(T) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont différentiables et dont la dérivée est rd-continue est noté par :

$$C^1_{rd} = C^1_{rd}(T) = C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

Le théorème suivant contient quelques résultats concernant les fonctions rd-continues et régulière.

Théorème 2.1. *Supposons que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.*

(i) Si f est continue, alors f est rd-continue.

(ii) Si f est rd-continue, alors f est régulière.

(iii) L'opérateur de saut ∇ est rd-continu.

(iv) Si f est régulé ou rd-continu, alors f^{∇} l'est aussi.

(v) Supposons que f soit continue . Si $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est régulière ou rd-continu, alors $f \circ g$ possède également cette propriété.

Définition 2.3. *[8] Une fonction continue $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite pre-differentiable avec (région de différentiation) D , à condition que $\mathrm{D} \subset T^K$, soit dénombrable et ne contienne aucun élément de T dispersé à droits et que f soit différentiable en chaque $t \in D$.*

Exercice 2.1. *Pour chacun des énoncés suivants, déterminer si f est régulé sur $\mathbb{T}$, si f est rd-continu sur $\mathbb{T}$ et si f est pré-différentiable.*
Si f est pré-différentiabilité, trouver sa région de différentiabilité D.

(i) La fonction f est définie sur une échelle de temps $\mathbb{T}$ et chaque point $t \in \mathbb{T}$ est isolé.

(ii) Supposons que $T = \mathbb{R}$ et

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t = 0 \\ \dfrac{1}{t} & si\ t \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \end{cases}$$

(iii) Supposons que $T = N_0 \cup \{1 - 1/n : n \in N\}$ et

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in N \\ t & si\ t \in \mathbb{T} - \{n_0\} \end{cases}$$

(iv) Supposons que $T = \mathbb{R}$ et $f(t) = |t|, t \in \mathbb{R}$.

(v) Supposons que. $T = P_{1,1}$ et

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t = 2k+1, k \in N_0 \\ t - 2k & si\ t \in [2k, 2k+1), k \in N_0 \end{cases}$$

(vi) Supposons que $T = P_{1,1}$ et

$$f(t) = k, t \in [2k, 2k+1], k \in N_0$$

Théorème 2.2. *Toute fonction régulière sur un intervalle compact est bornée.*

Démonstration. Supposons que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit non borné, c'est-à-dire que pour tout $n \in N$ il existe $t_n \in [a,b]$ avec $|f(t_n)| > n$, puisque il existe une sous-suite convergente $\{t_{nK}\}_{K \in N}$ c'est-à-dire

$$\lim_{k \to \infty} t_{n_k} = t_0 \text{ pour quelque } t_0 \in [a,b]$$

Notons que $t_0 \in \mathbb{T}$, puisque $\{t_{n_K} : K \in N\} \subset \mathbb{T}$ et $\mathbb{T}$ est fermé. D'après (1.5), t_0 ne peut être isolé, et il existe soit une sous-suite qui tend vers t_0 par le haut, soit une sous-suite qui tend vers t_0 par le bas. Dans tous les cas, la limite de $f(t)$ lorsque doit être finie par régularité, ce qui est une contradiction. □

Remarque 2.1. *Si f est régulière ou même si $f \in C_{rd}$ et $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} f(t)$ et $\min\limits_{a \leqslant t \leqslant b} f(t)$ n'existent pas nécessairement. Voir l'exercice ci-dessus (iii) pour un exemple de fonction rd-continue mais n'atteignant pas son supremum sur* $[0,1]$.

Le théorème de la valeur moyenne suivant est valable pour les fonctions pré-différentiables et sera utilisé pour démontrer les principaux théorèmes d'existence des pré-primitives et des primitives plus loin dans cette section. Sa démonstration est une application du principe d'induction.

2.3 Delta Intégration et primitives

Théorème 2.3. *[8][Existence de pré-primitives] Soit f une fonction régulière, alors il existe une fonction f qui est pré-différentialle sur la région de différenciation D telle que $F^{\Delta}(t) = f(t)$ est valable pour tout $t \in D$.*

Définition 2.4. *Supposons que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière. Toute fonction F comme dans le théorème précédent est appelée une Pré-prémitive de f, nous définissons l'intégrale indéfinié d'une fonction régulière f par*

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + c$$

où c est une constante arbitraire et F est primitive de f, on définit l'intégrale de Cauchy par

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r) \text{ pour toute } r,\ s \in \mathbb{T}$$

Une fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est appelée une primitive de f à condition $F^{\Delta}(t) = f(t)$ est valable pour tout $t \in \mathbb{T}^k$

Démonstration. soit $\varepsilon > 0$, par le théorème qui dit q'une une fonction bornée f Sur $[a, b]$ est Δ-intégrable si et seulement pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition $P = a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a, b)$ tel que

$$U(f, p) - L(f, p) < \varepsilon \tag{2.1}$$

appliquant le théorème 2.4 pour $f : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}$ avec $i = 1, 2, \cdots, n$ nous obtenons ξ_i, τ_i tel que

$$(t_i - t_{i-1})\, f(\tau_i) - f(\tau_{i-1}) \leq (t_i - t_{i-1})\, f(\xi_i)$$

Donc en déduit que :

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\, f(\tau_i) \leq f(b) - f(a) \leq \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\, f(\xi_i)$$

donc

$$L(f,p) \leq f(b) - f(a) \leq U(f,p) \tag{2.2}$$

D'ou, nous avons $L(f,p) \leq \int_a^b \Delta t \leq U(f,p)$
pour toutes les partitions P de $[a,b)$ dans les équations (2.1) et (2.2) implique que $\left|\int_a^b f(t)\Delta t - [f(b) - f(a)]\right| < \varepsilon$, car ε c'est arbitraire. □

Théorème 2.4 (théorème de la moyenne)**.** *Soit f une fonction continue sur $[a,b]_T$ et Δ-différentiable sur $[a,b]_T$, Alors il existe $\xi, \tau \in [a,b]_T$ tels que*

$$f^{\Delta}(\tau) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f^{\Delta}(\xi)$$

Corollaire 2.1. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]_T$ et Δ-différentiable sur $[a,b]_T$, si $f^{\Delta}(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b]_T$, alors f est une fonction constante sur $[a,b]_T$.*

Corollaire 2.2. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]_T$ et Δ-différentiable sur $[a,b]_T$, alors f est croissante et décroissante sur $[a,b]$ si $f^{\Delta}(t) \geq 0$ et $f^{\Delta}(t) \leq 0$ pour tout $t \in [a,b]_T$, respectivement.*

Théorème 2.5. *Toute fonction f rd-continue possède une primitive F sur $[t_0, t]_T$, qui vérifier :*

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(z)\Delta z, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}$$

Example 2.1. *si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ et $a \neq 1$ est une constante alors*

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + c$$

où c est une constante arbitraire. Notez que

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = a^t$$

si $a, b \in \mathbb{T}, a < b$. Dans ce qui suit, nous désignons $[a,b]_{\mathbb{T}} := \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}$.

Théorème 2.6. *Tout fonction continue h sur $[a,b]_T$ est Δ-intégrable.*

Théorème 2.7. *Si $h \in C_{rd}$ et $t \in \mathbb{T}^k$, alors*

$$\int_t^{\sigma(t)} h(\tau)\Delta(\tau) = \mu(t)h(t)$$

Théorème 2.8. *[8] Si $a, b, c \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C_{rd}$, alors :*

(i) $\displaystyle\int_a^b [f(t)+g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$;

(ii) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t$;

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$ *et* $\displaystyle\int_a^a f(t)\Delta t = 0$;

(iv) $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$;

(v) $\displaystyle\int_a^b [\alpha f(t)+g(t)]\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t.$

(vi) $\displaystyle\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta} g(t)\Delta t.$

(vii) Si $|f(t)| \leq g(t)$ *sur* $[a, b]$, *alors* $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t.$

(viii) si $f(t) > 0$ *pour tout* $t \in [a; b]$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$

Example 2.2. *si* $\mathbb{T} = hz \quad h > 0$ *alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} h f(kh)$$

Théorème 2.9. *Soient $a, b \in \mathbb{T}$ et $f \in C_{rd}$*

(i) Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

où l'intégrale à droite est l'intégrale usuelle de Riemann.

(ii) Si $[a, b]$ ne contient que des points isolés, alors

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \displaystyle\sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & si\ a < b \\ 0 & si\ a = b \\ \displaystyle -\sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & si\ a > b \end{cases}$$

Example 2.3. *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps :*

(i) Soit $a, b \in \mathbb{T}$, on a : $\displaystyle\int_a^b c\Delta t = c\int_a^b 1\Delta t = c(b-a).$

(ii) Calculons $\displaystyle\int_0^t s\Delta s$ *sur $\mathbb{T}$:*

— *Pour* $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ *on a :* $\displaystyle\int_0^t s\Delta s=\int_0^t sds=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^t=\frac{1}{2}t^2.$

— *Pour* $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ *on a :* $\displaystyle\int_0^t s\Delta s=\sum_{s=0}^{t-1}s=\frac{t(t-1)}{2}.$

Théorème 2.10. *Soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction continument différentiable et* $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *une fonction* Δ*-différentiable. Alors* $(f\circ g)$ *est delta-différentiable et on a la formule suivante :*

$$(f\circ g)^{\Delta}(t)=\left\{\int_0^1 f'\left(g(t)+h\mu(t)g^{\Delta}(t)\right)dh\right\}g^{\Delta}(t)$$

Example 2.4. *soit* $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ *et* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, telles que* $g(t)=t^2$*, et* $f(t)=e^t$*. Alors*

$$\begin{aligned}
f'(t)&=e^t\\
g^{\Delta}(t)&=g(t+1)-g(t)=(t+1)^2-t^2=2t+1,\ \ et\\
(f\circ g)^{\Delta}(t)&=g^{\Delta}(t)\int_0^1 f'\left(g(t)+hg^{\Delta}(t)\right)dh=g^{\Delta}(t)\int_0^1 e^{t^2+h(2t+1)}dh\\
&=(2t+1)e^{t^2}\left[\frac{e^{2t+1}}{2t+1}-\frac{1}{2t+1}\right]\\
&=e^{t^2}\left(e^{2t+1}-1\right)
\end{aligned}$$

Puisque ($f\circ g$) est défini sur $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, on peut déduire que

$$(f\circ g)^{\Delta}(t)=(f\circ g)(t+1)-(f\circ g)(t)=e^{(t+1)^2}-e^{t^2}=e^{t^2}\left(e^{2t+1}-1\right)$$

2.4 Δ-Intégration par partie

Proposition 2.1. *Soient* f *et* g *deux fonctions pré- différentiable sur* $[a,b]_T$*, on a :*

$$\int_a^b f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)\Delta t=[(fg)(t)]_{t=a}^{t=b}-\int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$$
$$\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t=[(fg)(t)]_{t=a}^{t=b}-\int_a^b f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t)\Delta t$$

Démonstration. D'après les propriétés de la dérivée on a

$$(fg)^{\Delta}(t)=f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g(t)$$

d'où

$$f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)=(fg)^{\Delta}(t)-f^{\Delta}(t)g(t), \tag{2.3}$$

intégrons les deux membres de l'égalité (2.3) entre a et b, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t&=\int_a^b (fg)^{\Delta}(t)\Delta t-\int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t\\
&=[(fg)(t)]_{t=a}^{t=b}-\int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t
\end{aligned}$$

□

Définition 2.5. *Soit $p : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}, p$ est dite régressive si elle vérifie :*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0$$

Remarque 2.2. *Pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, l'ensemble des fonctions régressives et rd-continues est noté par $\Re$.*

Définition 2.6. *L'ensemble de toutes les fonctions régressives positives est définie par :*

$$\Re^+ = \left\{p \in \Re : 1 + \mu(t)p(t) > 0, \ \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k\right\} \tag{2.4}$$

Définition 2.7. *Pour $h > 0$, on définit la transformation cylindrique :*
$\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$, *par :*

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h}\log(1 + zh)$$

où log est le logarithtme principale,

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_h - \left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} : \mathrm{In}(z) \leq \frac{\pi}{h}\right\}, \\ \mathbb{C}_h - \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{1}{h}\right\}. \end{aligned}$$

Pour $h = 0$, on définit : $\xi_0(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$

Théorème 2.11. *On suppose que $p \in \Re$ et $t_0 \in \mathbb{T}$ un point fixe, alors le problème à valeur initiale*

$$y^\Delta(t) = p(t)y(t), y\left(t_0\right) = 1, \tag{2.5}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{T}$, donnée par

$$y(t) = e_p\left(t, t_0\right),$$

avec

$$e_p\left(t, t_0\right) = \exp\left(\int_{t_0}^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right).$$

Remarque 2.3. *Il est clair que*

$$e_p\left(\sigma(t), t_0\right) = (1 + \mu(t)p(t))e_p\left(t, t_0\right) \tag{2.6}$$

Remarque 2.4. *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la fonction exponentielle est donnée par :*

$$e_p\left(t, t_0\right) = \exp\left(\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau\right)$$

où $t, t_0 \in \mathbb{R}$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Remarque 2.5. *Pour $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, la fonction exponentielle est donnée par :*

$$e_p(t,t_0)=\prod_{\tau=t_0}^{\tau=t}[1+p(\tau)]$$

où $t,t_0\in\mathbb{Z}, t_0<t$ et, $p:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ est une fonction vérifie

$$p(t)\neq -1 \text{ pour tout } t\in\mathbb{Z}.$$

Théorème 2.12. *Soit $a\in\mathbb{T}^k, b\in\mathbb{T}$ et $L:\mathbb{T}\times\mathbb{T}^k\to\mathbb{R}$ est continue en (t,t), pour $t\in\mathbb{T}^k$, $t>a$ et $\Sigma^\Lambda(t,.)$est $rd-$continue dans$\{a,\sigma(t)\}$, on suppose que pour tout $\varepsilon>0,\exists U$, un voisinage de t indépendant de $\tau\in[a,\sigma(t)]$ tel que :*

$$\left|L(\sigma(t),\tau)-L(s,\tau)-L^\Delta(t,\tau)(\sigma(t)-s)\right|\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|,\quad\forall s\in U.$$

Où f^Δ s'appele la dérivée de f par rapport à la $1^{ière}$ variable, alors on a :

$$g(t)=\int_a^a L(t,\tau)\Delta\tau\Rightarrow g^\Delta(t)=\int_a^b L^\Delta(t,\tau)\Delta\tau+L(\sigma(t),\tau),$$

et

$$h(t)=\int_t^t L(t,\tau)\Delta\tau\Rightarrow h^\Delta(t)=\int_t^b L^\Delta(t,\tau)\Delta\tau-L(\sigma(t),\tau).$$

Démonstration. On a

$$g(t)=\int_a^t L(t,\tau)\Delta\tau,\quad g^\Delta(t)=\frac{g(\sigma(t))-g(t)}{\mu(t)},$$

ce qui donne

$$g^\Delta(t)=\frac{1}{\mu(t)}\int_a^{\sigma(\hat{\imath})}L(\sigma(t),\tau)\Delta\tau-\frac{1}{\mu(t)}\int_a^{\imath}L(t,\tau)\Delta\tau \tag{2.7}$$

D'autre part, on a :

$$L^\Delta(t,\tau)=\frac{L(\sigma(t),\tau)-L(t,\tau)}{\mu(t)},$$

d'où

$$L(\sigma(t),\tau)=\mu(t)L^\Delta(t,\tau)+L(t,\tau) \tag{2.8}$$

Remplaçons (2.8) dans l'équation (2.7), on obtient

$$\begin{aligned}
g^\Delta(t)&=\int_a^{\sigma(t)}\left(L(t,\tau)+\frac{L(t,\tau)}{\mu(t)}\right)\Delta\tau-\frac{1}{\mu(t)}\int_a^\tau L(t,\tau)\Delta\tau\\
&=\int_a^{\sigma(t)}L(t,\tau)\Delta\tau+\int_a^{\sigma(t)}\frac{L(t,\tau)}{\mu(t)}\Delta\tau+\int_t^a\frac{L(t,\tau)}{\mu(t)}\Delta\tau\\
&=\int_a^t L^\Delta(t,\tau)\Delta\tau+\int_a^{\sigma(t)}L^\Delta(t,\tau)+\frac{1}{\mu(t)}\int_t^{\sigma(t)}L(t,\tau)\Delta\tau
\end{aligned}$$

et comme

$$\int_t^{\sigma(t)} L(\tau)\Delta\tau = \mu(t)L(t)$$

donc, on a

$$g^{\Delta}(t) = \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau + \mu(t)L^{\Delta}(t,t) + L(t,t)$$

ainsi

$$g^{\Delta}(t) = \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau + L(\sigma(t),\tau) \tag{2.9}$$

$\square$

2.5 Nabla Intégration et primitive

Théorème 2.13. *[9, 10] chaque fonction ld-continues a une primitive nabla. En particulier, si $t_0 \in \mathbb{T}$, alors F défini par*

$$F(t) := \int_{t_0}^t f(\tau)\nabla\tau \text{ pour } t \in \mathbb{T}$$

est une primitive nabla de f.

Théorème 2.14. *Si $a, b, c \in \mathbb{T}, \lambda \in C_{rd}$, et f, g alors,*

(i) $\displaystyle\int_a^b [f(t) + g(t)]\nabla t = \int_a^b f(t)\nabla t + \int_a^b g(t)\nabla t$;

(ii) $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(t)\nabla t = \lambda \int_a^b f(t)\nabla t$;

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(t)\nabla t = -\int_b^a f(t)\nabla t$;

(iv) $\displaystyle\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^c f(t)\nabla t + \int_c^b f(t)\nabla t$;

(v) $\displaystyle\int_a^a f(t)\nabla t = 0$;

(vi) Si $f(t) > 0$ pour tout $t \in [a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\nabla t \geq 0$.

Example 2.5. *Example 1.39. Si $a, b \in \mathbb{T}, a < b$, et $f \in \mathcal{C}_{rd}$.*

(i) Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^b f(t)dt$, où le dernier intégral est l'intégrale de Riemman usuelle.

(ii) Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ pour certains $h > 0$, alors

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \sum_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}} hf(kh).$$

CHAPITRE 3

Applications

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va voir l'application de la dérivabilité et l'intégrabilité dans les échelles de temps sur le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta = f(t, u^\sigma), & t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) - a_0 u^\Delta(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) u(s) \Delta s, \\ u(\sigma^2(b)) - a_1 u^\Delta(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s) u(s) \Delta s, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $[a, b]_T$ est un intervalle d'une échelle de temps T, $f : [a, b]_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $g_i : [a, \sigma^2(b)]_T \to \mathbb{R}_+$ $(i = 0, 1)$, sont des fonctions continues et a_0 et a_1 sont deux nombres réels positifs.

3.2 Résultats Préliminaires

Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta = -\widehat{h}(t, u^\sigma), & t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) - a_2 u^\Delta(a) = c, \\ u(\sigma^2(b)) + a_3 u^\Delta(\sigma(b)) = d, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $\hat{h} : [a, b]_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement croissante dans sa deuxieme variable, a_2 et a_3 sont des nombres réels positifs, c et d sont des nombres réels.

Lemme 3.1. *(Principe de comparaison faible).*
Soitent u_1, u_2 tels que $u_i \in D$ pour $i = 1, 2$, et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta \widehat{h}(t, u_1^\sigma) & \leq -(\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta + \widehat{h}(t, u_2^\sigma), \ t \in [a, b]_T\,, \\ u_1(a) - a_2 u_1^\Delta(a) & \leq u_2(a) - a_2 u_2^\Delta(a), \\ u_1(\sigma^2(b)) + a_3 u_1^\Delta(\sigma(b)) & \leq u_2(\sigma^2(b)) + a_3 u_2^\Delta(\sigma(b)). \end{cases} \tag{3.3}$$

Alors $u_1(t) \leq u_2(t)$, pour tout $t \in [a, \sigma^2(b)]_T$.

Preuve : Supposons qu'il existe $t_0 \in [a, \sigma^2(b)]_T$ tel que :

$$w(t_0) := u_2(t_0) - u_1(t_0) = \min\left\{w(t) : a \leq t \leq \sigma^2(b)\right\} < 0,$$

et $w(t) > w(t_0)$ pour tout $t \in [t_0, \sigma^2(b)]_T$.

Nous distinguons les cas suivants

Cas 1.

(i) Si $t_0 = a$ et $a = \sigma(a)$, nous obtenons la contradiction

$$0 > u_2(a) - u_1(a) \geq a_2(u_2^\Delta(a) - u_1^\Delta(a)) = 0.$$

(ii) Si $t_0 = a$ et $a < \sigma(a)$, nous distinguons deux sous-cas :

— Si $w^\Delta(t_0) > 0$, alors par 3.3 nous avons $w(a) > 0$, ce qui contredit la definition det_0.

— Si $w^\Delta(t_0) \leq 0$ alors $w(a) \geq w(\sigma(a))$, mais cela contredit la definition de t_0.

Cas 2.

(i) Si $t_0 = \sigma^2(b)$ et $\sigma^2(b) > \sigma(b)$, nous obtenons la contradiction

$$0 > u_2(\sigma^2(b)) - u_1(\sigma^2(b)) \geq -a_3(u_2^\Delta(\sigma(b)) - u_1^\Delta(\sigma(b))) = 0.$$

(ii) Si $t_0 = \sigma^2(b)$ et $\sigma^2(b) > \sigma(b)$ nous distinguons deux sous-cas :

— Si $w^\Delta(\sigma(b)) > 0$, alors nous avons w($\sigma^2(b)$)> w($\sigma(b)$), mais cela contredit definition de t_0.

— Si $(w^\Delta\sigma(b) \leq 0)$, alors par 3.3 nous avons $w(\sigma^2(b) > 0)$, ce qui contredit la definition de t_0.

Cas 3.

Si, $t_0 \in [a, \sigma^2(b)]_T$ nous distinguons quatre sous-cas.

Sous-cas 1 : $\varrho(t_0) = t_0 = \sigma(t_0)$.

(i) Si $w^\Delta(t_0) > 0$, alors $\lim\limits_{t \to t_0} w^\Delta(t) = w^\Delta(t_0)$ .Cela implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que $w^\Delta(t) > 0$ sur $(t_0 - \delta, t_0]$. Alors w est croissant sur ($t_0 - \delta, t_0]$.Mais cela contredit la definition de t_0 .

(ii) Si, $w^{\Delta}(t) < 0$ alors $\lim_{t \to t_0} w^{\Delta}(t) = w^{\Delta}(t_0) < 0$ Cela implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que, $w^{\Delta}(t) < 0$ sur $[t_0,\ t_0 +\ \delta)$, ce qui signifie que w est décroissant sur $[t_0, t_0\ +\ \delta)$. Mais cela contredit la definition de t_0.

(iii) Si, $w^{\Delta}(t_0) = 0$, alors $u_1^{\Delta}(t_0) = u_2^{\Delta}(t_0)$ et donc $\varphi_p(u_1^{\Delta}(t_0)) = \varphi_p(u_2^{\Delta}(t_0))$. Puisque φ_p est strictement croissante, nous obtenons :

$$-\varphi_p\big(u_2^{\Delta}\big)^{\Delta}(t_0) + \varphi_p(u_1^{\Delta})^{\Delta}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{-\varphi_p(u_2^{\Delta}(t)) + \varphi_p(u_1^{\Delta}(t))}{t - t_0} \leq 0.$$

mais sur ce point, nous avons :

$$-\varphi_p(u_2^{\Delta})^{\Delta}(t_0) + \widehat{h}(t_0, u_2^{\sigma}) + \varphi_p(u_1^{\Delta})^{\Delta}(t_0) - \widehat{h}(t_0, u_1^{\sigma}) \geq 0.$$

Cela signifie que :

$$-\varphi_p\big(u_2^{\Delta}\big)^{\Delta}(t_0) + \varphi_p(u_1^{\Delta})^{\Delta}(t_0) \geq \widehat{h}(t_0, u_1^{\sigma}) - \widehat{h}(t_0, u_2^{\sigma}).$$

Puisque $u_2(t_0) < u_1(t_0)$ et que la fonction h est strictement croissante dans sa deuxieme variable, on obtient :

$$-\varphi_p\big(u_2^{\Delta}\big)^{\Delta}(t_0) + \varphi_p(u_1^{\Delta})^{\Delta}(t_0) > 0,$$

ce qui est une contradiction.

Sous-cas 2 : $\rho(t_0) = t_0 < \sigma(t_0)$.

(i) Si $w^{\Delta}(t_0) > 0$, alors $\lim_{t \to t_0^+} w^{\Delta}(t) = w^{\Delta}(t_0)$. Ceci implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que, $w^{\Delta}(t) > 0$ sur $(t_0 -\ \delta,\ t_0]$, ce qui signifie que w est strictement croissante sur $(t_0 -\ \delta,\ t_0]$. Mais cela contredit la definition de t_0.

(ii) Si $w^{\Delta}(t_0) \leq 0$, alors on a $w^{\sigma}(t_0) \leq w(t_0)$. Mais cela contredit la definition de t_0.

Sous-cas 3 : $\rho(t_0) < t_0 = \sigma(t_0)$.

(i) Si, $w^{\Delta}(t_0 < 0)$, alors $\lim_{t \to t_0^+} w^{\Delta}(t) = w^{\Delta}(t_0)$. Ceci implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que $w^{\Delta}(t) < 0$ *sur* $[t_0, t_0 + \delta)$, ce qui signifie que w est strictement décroissante sur $[t_0, t_0 + \delta)$. Mais cela contredit la définition de t_0.

(ii) Si $w^{\Delta}(t_0) \geq 0$, alors nous avons :

$$u_1^{\Delta}(t_0) \leq u_2^{\Delta}(t_0),$$

ce qui implique que :

$$\varphi_p(u_1^{\Delta}(t_0)) \leq \varphi_p(u_2^{\Delta}(t_0)).$$

D'autre part, nous avons :

$$w^{\Delta}(\rho(t_0)) = \frac{w(t_0) - w(\rho(t_0))}{t_0 - \rho(t_0)} < 0,$$

ce qui signifie que :

$$u_2^{\Delta}(\rho(t_0)) < u_1^{\Delta}(\rho(t_0)).$$

Cela implique que :

$$\varphi_p(u_2^{\Delta}(\rho(t_0))) < \varphi_p(u_1^{\Delta}(\rho(t_0))).$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) &= \frac{\varphi_p(u_1^{\Delta}(t_0)) - \varphi_p(u_1^{\Delta}(\rho(t_0)))}{t_0 - \rho(t_0)} \\ &< \frac{\varphi_p(u_2^{\Delta}(t_0)) - \varphi_p(u_2^{\Delta}(\rho(t_0)))}{t_0 - \rho(t_0)} \\ &= (\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)).\end{aligned}$$

Cela signifie que :

$$\left(\varphi_p(u_1^{\Delta})\right)^{\Delta}(\rho(t_0)) < \left(\varphi_p(u_2^{\Delta})\right)^{\Delta}(\rho(t_0)).$$

Comme la fonction du est strictement croissante dans sa deuxieme variable, nous obtenons :

$$-(\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) + \widehat{h}(\rho(t_0), u_2(t_0)) < -(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) + \widehat{h}(\rho(t_0), u_1(t_0)),$$

ce qui contredit 3.3.

Sous-cas 4 : $\rho(t_0) < t_0 < \sigma(t_0)$.

(i) Si $w^{\Delta}(t_0) \leq 0$, alors $w^{\sigma}(t_0) \leq w(t_0)$. Ce qui contredit la definition de t_0.

(ii) Si $w^{\Delta}(t_0) > 0$, alors nous avons :

$$u_1^{\Delta}(t_0) < u_2^{\Delta}(t_0),$$

ce qui implique que :

$$\varphi_p(u_1^{\Delta}(t_0)) < \varphi_p(u_2^{\Delta}(t_0)).$$

D'autre part, nous avons :

$$w^{\Delta}(\rho(t_0)) = \frac{w(t_0) - w(\rho(t_0))}{t_0 - \rho(t_0)} < 0,$$

ce qui signifie que :

$$u_2^{\Delta}(\rho(t_0)) < u_1^{\Delta}(\rho(t_0)).$$

Cela implique que :

$$\varphi_p(u_2^\Delta(\rho(t_0))) < \varphi_p(u_1^\Delta(\rho(t_0))).$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}(\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta(\rho(t_0)) &= \frac{\varphi_p(u_1^\Delta(t_0)) - \varphi_p(u_1^\Delta(\rho(t_0)))}{t_0 - \rho(t_0)} \\ &< \frac{\varphi_p(u_2^\Delta(t_0)) - \varphi_p(u_2^\Delta(\rho(t_0)))}{t_0 - \rho(t_0)} \\ &= (\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta(\rho(t_0)).\end{aligned}$$

Ce qui signifie que

$$(\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta(\rho(t_0)) < (\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta(\rho(t_0)).$$

Comme la fonction est strictement croissante dans sa deuxieme variable, nous obtenons

$$-(\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta(\rho(t_0)) + \widehat{h}(\rho(t_0), u_1(t_0)) > -(\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta(\rho(t_0)) + \widehat{h}(\rho(t_0), u_2(t_0)).$$

Cela contredit 3.3.

Remarque 3.1. *La preuve du lemme 1 est une generalisation de celle du lemme 3.4 dans [11].*

Définition 3.1. *Nous disons que $\alpha \in D$ est une sous-solution de 3.2 si*

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\alpha^\Delta))^\Delta \leq -\widehat{h}(t, \alpha^\sigma), \ t \in [a, b]_T\,, \\ \alpha(a) - a_2\alpha^\Delta(a) \leq c, \\ \alpha(\sigma^2(b)) - d_2\alpha^\Delta(\sigma(b)) \leq d. \end{cases}$$

Définition 3.2. *: Nous disons que $\beta \in D$ est une sur-solution de 3.2 si*

$$\begin{aligned} -(\varphi_P(\beta^\Delta))^\Delta \geq -\hat{h}(t, \beta^\sigma), \ t \in [a, b]_T, \\ \beta(a) - a_2\beta^\Delta(a) \geq c, \\ \beta(\sigma^2(b)) - b_2\beta^\Delta(\sigma(b)) \geq d. \end{aligned}$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.1. *Supposons que α et β sont des sous et sur-solutions du problème 3.2 telles que $\alpha(t) \leq \beta(t)$, pour tout $t \in [a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}$. Alors le problème 3.2 a une solution unique $u \in D$ telle que :*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \ \textit{pour tout}\ t \in [a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Démonstration. En utilisant une preuve similaire à celle du Théorème dans [11], nous pouvons prouver que ce problème (2) admet au moins une solution et par le lemme 1, il s'ensuit que ce problème admet une solution unique. □

3.3 Résultat principal

Nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -(\varphi_P(u^\Delta))^\Delta = f(t, u^\sigma), \ t \in [a, b]_\mathbb{T}, \\ u(a) - a_0 u^\Delta(a) = \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)u(s)\,\Delta s, \\ u(\sigma^2(b)) - a_1 u^\Delta(\sigma(b)) = \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)u(s)\,\Delta s, \end{cases} \tag{3.4}$$

où $f : [a, b]_\mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue,
$g_i : [a, \sigma^2(b)]_\mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions continues $(i = 0, 1)$ et a_0 et a_1 sont deux nombres réels positifs.

Définition 3.3. *Nous disons que $u \in D$ est une solution de 3.4 si elle satisfait 3.4.*

Définition 3.4. *Nous disons que $\underline{u} \in D$ est une solution inférieure de 3.4 si :*

$$\begin{cases} -(\varphi_P(\underline{u}^\Delta))^\Delta & \leq f(t, \underline{u}^\sigma), \ t \in [a, b]_\mathbb{T}, \\ u(a) - a_0 \underline{u}^\Delta(a) & \leq \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\underline{u}(s)\,\Delta s, \\ \underline{u}(\sigma^2(b)) - a_1 \underline{u}^\Delta(\sigma(b)) & \leq \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\underline{u}(s)\,\Delta s. \end{cases}$$

Définition 3.5. *Nous disons que $\overline{u} \in D$ est une solution supérieure de 3.4 si*

$$\begin{cases} -(\varphi_P(\overline{u}^\Delta))^\Delta \geq f(t, \overline{u}^\sigma), \ t \in [a, b]_\mathbb{T}, \\ \overline{u}(a) - a_0 \overline{u}^\Delta(a) \geq \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}(s)\,\Delta s, \\ \overline{u}(\sigma^2(b)) - a_1 \overline{u}^\Delta(\sigma(b)) \geq \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}(s)\,\Delta s. \end{cases}$$

Sur la non-linéarité f, nous imposerons la condition suivante :
(H) *Il existe une fonction continue $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante telle que : $s \mapsto f(t, s) + h(s)$ est croissante pour tout $t \in [a, b]_T$*
Le principal résultat de ce travail est le théorème suivant.

Théorème 3.2. *Supposons que l'hypothèse (H) soit satisfaite et que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ soient une sous-solution et sur-solution respectivement pour le problème 3.4 et telle que $\underline{u} \leq \overline{u}$ dans $[a, \sigma^2(b)]_\mathbb{T}$.*

Alors le problème 3.4 a une solution minimale u_* *et une solution maximale* u^* *telle que pour chaque solution* u *de 3.4 avec* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *dans* $[a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}$*, nous avons :*

$$u_* \leq u \leq u^* \quad dans\ [a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}$$

Pour la preuve de ce théorème, nous avons besoin d'un lemme préliminaire. Soit $\underline{w}, \overline{w} \in D$ *tel que* $u \leq w \leq \overline{w} \leq \overline{u}$ *dans* $[a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}$*, et nous considérons les problèmes suivants :*

$$\begin{cases} -(\varphi_P(u^{\Delta}))^{\Delta} + h(u^{\sigma}) = f(t, \overline{w}^{\sigma}) + h(\overline{w}^{\sigma}),\ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) - a_0 u^{\Delta}(a) = \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{w}(s)\,\Delta s, \\ u(\sigma^2(b)) + a_1 u^{\Delta}(\sigma(b)) = \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{w}(s)\,\Delta s. \end{cases} \tag{3.5}$$

Et

$$\begin{cases} -(\varphi_P(u^{\Delta}))^{\Delta} + h(u^{\sigma}) = f(t, \underline{w}^{\sigma}) + h(\underline{w}^{\sigma}),\ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) - a_0 u^{\Delta}(a) = \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\underline{w}(s)\Delta s, \\ u(\sigma^2(b)) + a_1 u^{\Delta}(\sigma(b)) = \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\underline{w}(s)\Delta s. \end{cases} \tag{3.6}$$

Lemme 3.2. *Soit* $\underline{w}$ *et* $\overline{w}$ *une solution inférieure et supérieure respectivement pour le problème 3.4 et supposons que* (H) *est satisfait. Alors il existe une solution unique* u *et de 3.5 et 3.6 tel que :*

$$\underline{u} \leq \underline{w} \leq u \leq\ \leq \overline{w} \leq \overline{u} \quad dans\ [a, \sigma^2(b)]_r.$$

Démonstration. La preuve sera donnée en plusieurs étapes : □

Étape 1 : $\underline{w}$ est la solution inférieure de 3.5. Soit $t \in [a, b]_r$, nous avons :

$$\begin{aligned} -(\varphi_p(\underline{w}^{\Delta}))^{\Delta} + h(\underline{w}^{\sigma}) &\leq f(t, \underline{w}^{\sigma}) + h(\underline{w}^{\sigma}), \\ &\leq f(t, \overline{w}^{\sigma}) + h(\overline{w}^{\sigma}). \end{aligned}$$

Cela signifie que :

$$\forall t \in [a, b]_r, \quad -(\varphi_p(\underline{w}^{\Delta}))^{\Delta} + h(\underline{w}^{\sigma}) \leq f(t, \overline{w}) + h(\overline{w}). \tag{3.7}$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} \underline{w}(a) - a_0 \underline{w}^{\Delta}(a) &\leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\underline{w}(s)\Delta s, \\ &\leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{w}(s)\Delta s. \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\underline{w}(a) - a_0 \underline{w}^{\Delta}(a) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{w}(s)\Delta s. \tag{3.8}$$

De même, nous avons :

$$\underline{w}(\sigma^2(b)) + a_1\underline{w}^{\Delta}(\sigma(b)) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{w}(s)\Delta s. \tag{3.9}$$

Alors par 3.7, 3.8 et 3.9, il s'ensuit que w est une solution inférieure de 3.5.

Étape 2 : $\overline{w}$ est la solution supérieure de 3.5. Soit $t \in [a,b]_r$, nous avons :

$$\begin{aligned} -(\varphi_p(\overline{w}^{\Delta}))^{\Delta} + h(\overline{w}^{\sigma}) &\geq f(t,\overline{w}^{\sigma}) + h(\overline{w}^{\sigma}), \\ &\geq f(t,\overline{w}^{\sigma}) + h(\overline{w}^{\sigma}). \end{aligned}$$

Cela signifie que :

$$\forall t \in [a,b]_r, \quad -(\varphi_p(\overline{w}^{\Delta}))^{\Delta} + h(\overline{w}^{\sigma}) \geq f(t,\overline{w}^{\sigma}) + h(\overline{w}^{\sigma}). \tag{3.10}$$

Nous avons également :

$$\overline{w}(a) - a_0\overline{w}^{\Delta}(a) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{w}(s)\Delta s. \tag{3.11}$$

De même, nous avons :

$$\underline{w}(\sigma^2(b)) + a_1\underline{w}^{\Delta}(\sigma(b)) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{w}(s)\Delta s. \tag{3.12}$$

Alors par 3.10,3.11 et 3.12, il s'ensuit que w est une solution supérieure de 3.5.

Par les Étapes 1 et 2 et puisque la fonction $(t,u) \to f(t,u) + h(u)$ est continue et strictement croissante, par le Théorème 8 il en découle l'existence d'une solution unique u de 3.5 telle que $\underline{w} \leq u \leq \overline{w}$ dans $[a,\sigma^2(b)]_r$.

De même, nous pouvons prouver que le problème 3.6 admet une solution unique telle que

$$\underline{w} \leq \hat{u} \leq \bar{w} \text{ dans } [a,\sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}$$

et en utilisant une preuve similaire à celle du **Lemme 3.1**, nous avons $\tilde{u} \leq \hat{u}$ dans $[a,\sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}$

Preuve du Théorème 3.2

La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Nous prenons $\underline{u_0} = \underline{u}$, $\bar{u}_0 = \bar{u}$ et définissons les suites $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} (-\varphi_p(\underline{u}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta} + h(\underline{u}_{n+1}^{\sigma}) = f(t,\underline{u}_n^{\sigma}) + h(u_n^{\sigma}), \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ \underline{u}_{n+1}(a) - a_0\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(a) = \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\underline{u}_n(s)\Delta s, \\ \underline{u}_{n+1}(\sigma^2(b)) + a_1\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b)) = \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\underline{u}_{n+1}(s)\Delta s, \end{cases} \tag{3.13}$$

Et

$$\begin{cases} (-\varphi_p(\bar{u}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta} + h(\bar{u}_{n+1}^{\sigma}) = f(t, \bar{u}_n^{\sigma}) + h(\bar{u}_n^{\sigma}), \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ \bar{u}_{n+1}(a) - a_0 \bar{u}_{n+1}^{\Delta}(a) = \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(x)\bar{u}_n(s)\Delta s, \\ \bar{u}_{n+1}(\sigma^2(b)) + a_1 \bar{u}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b)) = \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\bar{u}_n(s)\Delta s, \end{cases} \tag{3.14}$$

Étape 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \bar{u}_{n+1} \leq \bar{u}_n \leq \bar{u} \text{ dans } [a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}$$

i) Pour $n = 0$, on a :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}_1^{\Delta}))^{\Delta} + h(\underline{u}_1^{\sigma}) = f(t, \underline{u}^{\sigma}) + h(\underline{u}^{\sigma}), \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ \underline{u}_1(a) - a_0 \underline{u}_1^{\Delta}(a) = \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\underline{u}(s)\Delta s, \\ \underline{u}_1(\sigma^2(b)) + a_1 \underline{u}_1^{\Delta}(\sigma(b)) = \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(x)\underline{u}(s)\Delta s, \end{cases} \tag{3.15}$$

Et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\bar{u}_1^{\Delta}))^{\Delta} + h(\bar{u}_1^{\sigma}) = f(t, \bar{u}^{\sigma}) + h(\bar{u}^{\sigma}), \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ \bar{u}_1(a) - a_0 \bar{u}_1^{\Delta}(a) = \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\bar{u}(s)\Delta s, \\ \bar{u}_1(\sigma^2(b)) + a_1 \bar{u}_1^{\Delta}(\sigma(b)) = \displaystyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\bar{u}(s)\Delta s. \end{cases} \tag{3.16}$$

Puisque $\underline{u}$ et $\bar{u}$ sont des sous-solutions et sur-solutions du problème 3.5, alors par le lemme 4.1, il s'ensuit que

$$\underline{u} \leq \underline{u}_0 \leq \underline{u}_1 \leq \bar{u}_0 \leq \bar{u} \text{ dans } [a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}$$

ii) Supposons que, pour un nombre fixe de $n > 1$, nous ayons :

$$\underline{u} \leq \underline{u}_{n-1} \leq \underline{u}_n \leq \bar{u}_n \leq \bar{u}_{n-1} \leq \bar{u}, \quad \text{dans } [a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}},$$

$$\underline{u} \leq \underline{u}_{n-1} \leq \underline{u}_n \leq \bar{u}_n \leq \bar{u}_{n-1} \leq \bar{u} \text{ dans } [a, \sigma^2(b)]_T$$

et nous montrons que :

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \bar{u}_{n+1} \leq \bar{u}_n \leq \bar{u} \text{ dans } [a, \sigma^2(b)]_T$$

Si $t \in [a,b]_{\mathbb{T}},\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, on a :

$$-(\varphi_p(\bar{u}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta} + h(\bar{u}_{n+1}^{\sigma}) = f(t, \bar{u}_{n-1}^{\sigma}) + h(\bar{u}_{n-1}^{\sigma}). \tag{3.17}$$

Puisque $\bar{u}_{n+1} \leq \bar{u}_n$ et en utilisant l'hypothèse (H), nous obtenons :

$$f(t, \overline{u}_{n-1}^{w}) + h(\overline{u}_{n-1}^{w}) \geq f(t, \overline{u}_{n}^{w}) + h(\overline{u}_{n}^{w}). \tag{3.18}$$

Par 3.17 et3.18, il s'ensuit que :

$$\forall t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \quad -(\varphi_p(\overline{u}_n^{\Delta}))^{\Delta} \geq f(t, \overline{u}_n^{w}). \tag{3.19}$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}\overline{u}_n(a) - a_0\overline{u}_n^{\Delta}(a) &= \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}_{n-1}(s)\Delta s \\ &\geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}_n(s)\Delta s.\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\overline{u}_n(a) - a_0\overline{u}_n^{\Delta}(a) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}_n(s)\Delta s, \tag{3.20}$$

et

$$\begin{aligned}\overline{u}_n(\sigma^2(b)) + a_1\overline{u}_n^{\Delta}(\sigma(b)) &= \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}_{n-1}(s)\Delta s \\ &\geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}_n(s)\Delta s.\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\overline{u}_n(\sigma^2(b)) + a_1\overline{u}_n^{\Delta}(\sigma(b)) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}_n(s)\Delta s. \tag{3.21}$$

Alors par 3.19,3.20 et 3.21, il s'ensuit que un est une solution supérieure de 3.4.

De même, nous pouvons prouver que $\underline{u}_n$ est une solution inférieure de 3.4.

Alors, par le **lemme 4.1**, il existe une solution unique $\underline{u}_{n+1}$ et $\overline{u}_{n+1}$ de 3.13 et 3.14 telles que :

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq u_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u} \quad \text{dans } [a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Par conséquent, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underline{u} \leq \underline{u}_n \leq u_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u} \quad \text{dans } [a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Étape 2 : il existe une constante positive C_1, indépendante de $n \in \mathbb{N}$, telle que :

$$\left\|\overline{u}_n^{\Delta}\right\|_0 \leq C_1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$.

Puisque $\underline{u}_n$ est continue sur $[a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}$ et $\underline{u}_n^{\Delta}$ est continue sur $[a, \sigma^2(b))_{\mathbb{T}}$, alors par le 1.6, il existe $\xi(n), \tau_n \in [a, \sigma^2(b))$ tels que :

$$\overline{u}_n^{\Delta}(\tau_n) \leq \frac{\overline{u}_n(\sigma^2(b)) - \overline{u}_n(a)}{\sigma^2(b) - a} \leq \overline{u}_n^{\Delta}(\xi_n).$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t) &= \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{t} (f(\tau, \overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) + h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) - h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)))\Delta\tau \\
&\leq \varphi_p\left(\frac{\overline{u}_n(\sigma^2(b)) - \overline{u}_n(a)}{\sigma^2(b) - a}\right) + \int_{\tau_n}^{t} (f(\tau, \overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) + h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) - h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)))\Delta\tau \\
&\leq \frac{1}{(\sigma^2(b) - a)^{p-1}} \varphi_p\big(\overline{u}\left(\sigma^2(b)\right) - \underline{u}(a)\big) + K,
\end{aligned}$$

où

$$K = (M_1(f) + 2M_2(h))\,(\sigma(b) - a),$$

avec

$$M_1(f) := \max\left\{f(t, u) : t \in [a, b]_T,\ \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\right\},$$

et

$$M_2(h) := \max\left\{|h(u)| : \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\right\}$$

.

Ensuite, si nous mettons :

$$\widetilde{C_1} := \frac{1}{(\sigma^2(b) - a)^{p-1}} \varphi_p\big(\overline{u}\left(\sigma^2(b)\right) - \underline{u}(a)\big) + (M_1(f) + 2M_2(h))\,(\sigma(b) - a),$$

nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a, \sigma(b)]_T,\ \ \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t) \leq \widetilde{C_1}.$$

implique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a, \sigma(b)]_T,\ \ \overline{u}_{n+1}^{\Delta}(t) \leq \widetilde{C_1}^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{3.22}$$

De même, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_T\,, \;\; \varphi_p(\underline{u}_{n+1}^{\Delta})(t) \geq \widetilde{C_2}, \tag{3.23}$$

où :

$$\widetilde{C_2} := \frac{1}{(\sigma^2(b)-a)^{p-1}} \varphi_p\left(\underline{u}\left(\sigma^2(b)\right) - \overline{u}\,(a)\right) + \left(m_1(f) + 2m_2(h)\right)(\sigma(b)-a)\,,$$

avec :

$$m_1(f) := \min\left\{f(t,u) : t \in [a,b]_T\,,\; \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\right\},$$

Et :

$$m_2(h) := \min\left\{|h(u)| : \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\right\}.$$

Ensuite, par 3.23, nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_T\,, \;\; \overline{u}_{n+1}^{\Delta}\,(t) \geq \left|\widetilde{C_2}\right|^{\frac{2-p}{p-1}} \widetilde{C_2}. \tag{3.24}$$

Maintenant, si nous mettons :

$$C_1 := \max\left(\widetilde{C}_1^{\frac{1}{p-1}}, \left|\widetilde{C_2}\right|^{\frac{1}{p-1}}, \max_{t\in[a,\sigma(b)]_T}\left|\overline{u}^{\Delta}\,(t)\right|\right),$$

alors par 3.22 et 3.24, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_T\,, \quad \max_{t\in[a,\sigma(b)]_T}\left|\overline{u}_n^{\Delta}\,(t)\right| \leq C_1.$$

Étape 3 : Il existe une constante positive C_3, indépendante de $n \in \mathbb{N}$, telle que :

$$\left|\underline{u}_n^{\Delta}\right|_0 \leq C_3,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La preuve est similaire à celle de l'étape 2. Elle est donc omise.

Étape 4 : La suite $\left(\overline{u}_n^{\Delta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $t, s \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ tels que $t < s$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\left|\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t)\right| \leq \left(M_1(f) + 2M_2(h)\right)|s-t|\,.$$

Si l'on place $K_1 = M_1(f) + 2M_2(h)$, on a :

$$\left|\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t)\right| \leq K_1\,|s-t|\,.$$

Si nous choisissons $|s-t| < \dfrac{\varepsilon}{K_1+1}$, on obtient :

$$\left|\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t)\right| < \varepsilon.$$

Par conséquent, la suite $\left(\varphi_p\left(\overline{u}_{n+1}^{\Delta}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$.
Puisque l'application φ_p^{-1} est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\left|\overline{u}_n^{\Delta}(s) - \overline{u}_n^{\Delta}(t)\right| = \left|\varphi_p^{-1}(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s)) - \varphi_p^{-1}(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t))\right|,$$

que la suite $\left(\overline{u}_n^{\Delta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$. La preuve de l'étape 4 est complète.
Étape 5 : La suite $\left(\underline{u}_n^{\Delta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$.
La preuve est similaire à celle de l'étape 4. Elle est donc omise.
Étape 6 : La suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution maximale de 3.4
Par les étapes 1, 2 et 4, nous avons que $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $C^1([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}})$ et $\underline{u}_n^{\Delta}$ équicontinue sur $[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$. Alors par le théorème d'Ascoli-Arzelà, il existe une sous-suite $\overline{u}_{n_j}$ de $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^1([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}})$.
Laisser :

$$u := \lim_{n_j\to+\infty} \overline{u}_{n_j}.$$

Alors

$$u^{\Delta} = \lim_{n_j\to+\infty} \overline{u}_{n_j}^{\Delta}.$$

Mais en vertu de l'étape 1, la suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée inférieurement, alors la limite ponctuelle de cette suite existe et elle est notée u. Nous avons donc $\overline{u} = u$, et, de plus, toute la suite converge dans $C^1([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}})$ vers u.
Si $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, on a :

$$-\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t) = \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(a) + \int_a^t \big(f(\tau,\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) + h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) - h(\overline{u}_{n+1}^{\sigma}(\tau))\big)\Delta\tau.$$

Maintenant, lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\big(f(\tau,\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) + h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) - h(\overline{u}_{n+1}^{\sigma}(\tau))\big) \to f(\tau,u_*^{\sigma}(\tau)).$$

Nous avons également :

$$\exists K_2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \tau \in [a,b]_{\mathbb{T}}, |f(\tau,\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) + h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) - h(\overline{u}_{n+1}^{\sigma}(\tau))| \leq K_2.$$

Par conséquent, par le théorème 5, on a

$$-\varphi_p(u^\Delta)(t) = \varphi_p(u^\Delta)(a) + \int_a^t f(\tau, u_*^\sigma(\tau))\Delta\tau.$$

On obtient donc :

$$\forall t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, -\big(\varphi_p(u^\Delta)\big)^\Delta = f(t, u_*^\sigma). \tag{3.25}$$

De plus, par le théorème 5, nous avons :

$$u_*(a) - a_0 u_*^\Delta(a) = \int_a^b g_1(s) u_*(s)\Delta s, \tag{3.26}$$

et :

$$u_*(\sigma^2(b)) + a_1 u_*^\Delta(\sigma^2(b)) \leq \int_a^b g_2(s) u_*(s)\Delta s. \tag{3.27}$$

Alors par 3.25,3.26 et 3.27, il s'ensuit que u_* est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_*^\Delta))^\Delta = f(t, u_*^\sigma), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u_*(a) - a_0 u_*^\Delta(a) = \displaystyle\int_a^b g_1(s) u_*(s)\Delta s, \\ u_*(\sigma^2(b)) + a_1 u_*^\Delta(\sigma^2(b)) \leq \displaystyle\int_a^b g_2(s) u_*(s)\Delta s. \end{cases} \tag{3.28}$$

Nous prouvons maintenant que si u est une autre solution de 3.4 telle que : $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ dans $[a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}$.

puis $u \leq u_*$ dans $[a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}$. Puisque u est une solution inférieure de (5), alors par l'étape 1, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u \leq \overline{u}_n.$$

Avec $n \to +\infty$, on obtient :

$$u \leq \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n = u_*.$$

Ce qui signifie que u_* est une solution maximale du problème 3.4.

Étape 7 : La suite $\big(\underline{u}_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution minimale u_* du problème (5). La preuve est similaire à celle de l'étape 6, et est donc omise.

La preuve de notre résultat est complète.

3.4 Exemple

Nous appliquons le résultat précédent au problème suivant :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta = \lambda_1 (u^\sigma)^{k_1} - (u^\sigma)^{k_2} + M \quad \text{dans } [0,10]_{\mathbb{T}}, \\ u(0) = 0, \\ u(\sigma^2(10)) = \displaystyle\int_0^{\sigma^2(10)} g_1(s)u(s)\Delta s, \end{cases} \tag{3.29}$$

où $k_1 > 0$, $k_2 > k_1$, λ_1 et M sont des paramètres réels positifs, $g_1(s) = ks$, où k est un paramètre réel positif.

Cas 1 : Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = \lambda_1 u^{k_1} - u^{k_2} + M \quad \text{dans } [0,10], \\ u(0) = 0, \\ u(10) = \displaystyle\int_0^{10} g_1(s)u(s)ds. \end{cases} \tag{3.30}$$

Théorème 3.3. *Supposons que $0 < k \leq \frac{1}{50}$, alors le problème 3.30 admet une solution maximale u_* et une solution minimale u^*.*

Démonstration. On pose $(\underline{u}, \overline{u}) = (\Phi_1, \Phi_2)$, où $\Phi_1(t) = 0$ pour tout $t \in [0,10]$ et $\Phi_2(t) = L$ pour tout $t \in [0,10]$.

Tout d'abord, il est facile de vérifier que Φ_1 est une solution inférieure de 3.30 . Maintenant, Φ_2 est une solution supérieure de 3.30 si nous avons :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\Phi_2'))'(t) \geq \lambda_1 \Phi_2^{k_1}(t) - \Phi_2^{k_2}(t) + M \quad \text{dans } [0,10], \\ \Phi_2(0) = L \geq 0, \\ \Phi_2(10) = L \geq \displaystyle\int_0^{10} g_1(s)\Phi_2(s)ds. \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} 0 \geq \lambda_1 L^{k_1} - L^{k_2} + M \text{ dans } [0,10], \\ \Phi_2(0) = L \geq 0, \\ \Phi_2(10) = L \geq 50kL. \end{cases}$$

Puisque $k_2 > k_1$, alors si nous choisissons L suffisamment grand et $k \leq \frac{1}{50}$, nous obtenons que Φ_2 est une solution supérieure de 3.30 et par conséquent par le Théorème 9, il s'ensuit que le problème 3.30 admet une solution maximale u_* et une solution minimale u^*.

Cas 2 : Si $\mathbb{T}=\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta}(t)=\lambda_1 u^{k_1}(t+1)-u^{k_2}(t+1)+M \text{ dans } [0,10]_{\mathbb{N}}, \\ u(0)=0, \\ u(12)=\displaystyle\int_0^{12} g_1(s)u(s)\Delta s. \end{cases} \tag{3.31}$$

□

Théorème 3.4. *Supposons que $M>3$ et $\dfrac{12e^{-12}}{\sum_{i=0}^{11} i^2e^{-i}} \leq k \leq \dfrac{1}{60}$, alors le problème 3.31 admet une solution minimale u_* et une solution maximale u^*.*

Démonstration. On pose $(\underline{u},\overline{u})=(\Phi_3,\Phi_4)$, où $\Phi_3(t)=te^{-t}$ pour tout $t\in[0,12]_{\mathbb{N}}$ et $\Phi_4(t)=L$ pour tout $t\in[0,12]_{\mathbb{N}}$.

Premièrement, Φ_3 est une solution inférieure du problème 3.31, si nous avons :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\Phi_3^{\Delta}))^{\Delta}(t)\leq\lambda_1\Phi_3^{k_1}(t+1)-\Phi_3^{k_2}(t+1)+M \\ \Phi_3(0)\leq 0, \\ \Phi_3(12)\leq\displaystyle\int_0^{12} g_1(s)\Phi_3(s)\Delta s. \end{cases} \quad \text{dans } [0,10]_{\mathbb{N}}.$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\Phi_3^{\Delta}))^{\Delta}(t)\leq\lambda_1(t+1)^{k_1}e^{-k_1(t+1)}-(t+1)^{k_2}e^{-k_2(t+1)}+M \\ \Phi_3(0)=0\leq 0, \\ \Phi_3(12)=12e^{-12}\leq k\displaystyle\sum_{i=0}^{11} i^2e^{-i}, \end{cases} \quad \text{dans } [0,10]_{\mathbb{N}}.$$

où :

$$\left(\varphi_p(\Phi_3^{\Delta})\right)^{\Delta}(t)=\varphi_p\left(\Phi_3(t+2)-\Phi_3(t+1)\right)-\varphi_p\left(\Phi_3(t+1)-\Phi_3(t)\right).$$

Depuis :

$$-(\varphi_p(\Phi_3^{\Delta}))^{\Delta}(t)-\lambda_1(t+1)^{k_1}e^{-k_1t}+(t+1)^{k_2}e^{-k_2t}<3, \quad \text{pour tout } t\in[0,10]_{\mathbb{N}}.$$

Si nous choisissons $M>3$ et $k\geq\dfrac{12e^{-12}}{\sum_{i=0}^{11} i^2e^{-i}}$, on obtient que Φ_3 est une solution inférieure du problème 3.31.

De même, Φ_2 est une solution supérieure de 3.31,si nous avons :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\Phi_2^{\Delta}))^{\Delta}(t)\geq\lambda_1\Phi_2^{k_1}(t+1)-\Phi_2^{k_2}(t+1)+M \quad \text{dans } [0,10]_{\mathbb{N}}, \\ \Phi_4(0)\geq 0, \\ \Phi_2(0)\leq 0\Phi_2(12)\geq\displaystyle\int_0^{12} g_1(s)\Phi_3(s)\Delta s. \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} 0 \geq \lambda_1 L^{k_1} - L^{k_2} + M & \text{dans } [0,10]_{\mathbb{N}}, \\ \Phi_2(0) = L \geq 0, \\ \Phi_2(12) = L \geq kL \sum\limits_{i=0}^{11} i = 66kL. \end{cases}$$

Puisque $k_2 > k_1$, alors si nous choisissons L suffisamment grand et $k \leq \frac{1}{66}$, nous obtenons que Φ_4 est une solution supérieure de 3.31 et par conséquent, par le Théorème 9, il s'ensuit que le problème 3.31 admet une solution maximale u_* et une solution minimale u^*.

$\square$

Conclusion

Dans ce mémoire, intitulée Échelles de temps, nous avons abordé trois chapitres. Le premier chapitre traitait de la théorie des échelles temporelles en termes de différenciation et présentait des concepts de base tels que delta et Nabla. Quant au deuxième chapitre, il s'intitulait Intégration dans les échelles temporelles, où nous avons présenté les définitions de l'intégration des delta et Nabla et les règles qui leur sont associées. Le troisième chapitre était une application qui prouve ce que nous avons discuté dans les deux chapitres précédents, et ainsi nous avons ouvert la voie pour les recherches futures et les efforts dans ce domaine

Bibliographie

[1] A. Cabada, Existence results for ϕ-Laplacian boundary value problems on time scales, Adv. Difference Equ. 2006, Article ID 21819, Pages 1-11.

[2] S. Hilger, Analysis on measure chains–a unified approach to continuous and discrete calculus, Results Math. 18 (1990), 18-56

[3] D. F. Zhao and Xue-Xiao You , Nabla local fractional derivative on time scales , (2016).

[4] D. R. Anderson , L. Erbe , Nabla dynamic equations on time scales. Panamer.Math.J. 13(2003), no.1,1-47.

[5] M. Bohner and A. C. Peterson , Dynamic equations on time scales. An introduction with applications, Birkhäuser Boston. Inc., Boston, MA, 2001.

[6]] M. Bohner, S. G. Georgiev , Multivariable dynamic calculus on time scales - Springer international publishing (2016).

[7] R. Agarwal , D. O'Regan, S. Saker , Dynamic inequalities on time scales - Springer international publishing (2014).

[8] R. P. Agarwal and M. Bohner, Basic calculus on time scales and some of its applications, Results Math. 35 (1999), no. 1-2, 3–22.

[9] M. Bohner and A. Peterson, Dynamic equations on time scales, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.

[10] M. Bohner and A. Peterson, Advances in dynamic equations on time scales, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.

[11] R. Agarwal and E. Akin-Bohner, A generalized upper and lower method for singular boundary value problems for quasilinear dynamic equations, Adv. Stud. Contemp. Math. 15 (2007), 213-228.

[12] E. Akin-Bohner, Boundary value problems for a differential equation on a measure chain, Panam. Math. J., 10 (2000), 17-30.

[13] D. Anderson ; R. Avery and J. Henderson, Existence of solutions for a one dimensional p-Laplacian on time-scales, J. Difference Equ. Appl. 10 (2004), 889–896.

[14] F. V. Atkinson, Discrete and Continuous Boundary Problems, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 8, Academic Press, New York, 1964.

[15] E. Cetin and F. Serap Topal, Existence results for solutions of integral boundary value problems on time scales, Abstr. Appl. Anal. 2013, Article ID 708734, 7 pages.

[16] M. Derhab, Existence of minimal and maximal solutions for a quasilinear elliptic equation with integral boundary value conditions, Electronic J. Qual. Theory Differ. Equ. 6 (2011), 1-18.

[17] M. Frigon and H. Gilbert, Boundary value problems for systems of second-order dynamic equations on time scales with $\Delta - Carathodory$ functions, Abstr. Appl. Anal. 2010, Article ID 234015, 26 pages.

[18] F. Geng and D. Zhu, Multiple results of p-Laplacian dynamic equations on time scales, Appl. Math. Comput. 193 (2007), 311-320.

[19] S. Gulsan Topal, Second-order periodic boundary value problems on time scales, Comput. Appl. Math. 48 (2004), 637-648.

[20] Z. He, Double positive solutions of three-point boundary value problems for p-Laplacian dynamic equations on time scales, J. Comput. Appl. Math. 182 (2005), 304-315.

[21] N. I. Ionkin, Solution of a boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, Differ. Equ. 13 (1977), 294-304.

[22] B. Kayamk¸calan, Monotone iterative method for dynamic systems on time scales, Dynam. Systems Appl. 2 (1993), 213-220.

[23] B. Kayamk¸calan, V. Lakshmikantham and S. Sivasundaram, Dynamic Systems on Measure Chains, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

[24] V. Lakshmikantham, Monotone flows and fixed points for dynamic systems on time scales in a Banach space, Appl. Anal. 56 (1995), 175-184.

[25] Y. Li and J. Shu, Solvability of boundary value problems with Riemann-Stieltjes - integral conditions for second-order dynamic equations on time scales at resonance, Adv. Difference Equ. 1 (2011), 18 pages.

[26] E. J. Mapes and M. F. Schumaker, Framework models of ion permeation through membrane channels and the generalized King-Altman method. Bull. Math. Biol. 68 (2006), 1429-1460.

[27] Y. Sang and H. Su, Several existence theorems of nonlinear m-point boundary value problem for p-Laplacian dynamic equations on time scales, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), 1012-1026.

[28] P. Stehl´ık, On monotone iterative method for BVP on time scales, Adv. Difference Equ. 1 (2005), 81-92.

[29] *C. C. Tisdell, P. Dr´abek and J. Henderson*, Multiple solutions to dynamic equations on time scales, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 11 (2004), 25-42.

[30] *G. Aslim, G. Sh. Guscinov, Weak semirings, ω-semirings, and measures*, Bull. Allahabad Math. Soc. **14** (1999) 1–20.

[31] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[32] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1950.

[33] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover, New York, 1975.

Abstract

this research focuses On examining time scale theory, an integrating mathematical framework that facilitatly the consistent analysis of dynamical systems, whether Continuous, discrete, or mixed this memory present the basic principles of this theory, including delta and nabla derivatives and their associated integrals.

the fundamental characteristics of these operators are analyzed and applied in the study of selected dynamical equations. in the practical chapter, a specific excemple demonstrates the use of theoretical tools to solve mathematical models.

Keywords : time scales, delta derivature nable derivature, integration

Résumé

ce travail de recherche se focalise sur l'examen de la théorie des échelles de temps, une stucture mathématique integratrice qui facilite. l'analyse cohérente des systèmes dynamiques, qu'ils soient continues , discrets on mixtes.

Ce document expose les principes de base de cette théorie comperis les dérivées delta et mabla ainsi que leurs intégrales. associées On analyse et applique les caractéristique fondamentales de ces opérateurs dans l'étude de certaines equations dynamiques.

Dans le chapitre pratique, un exemple spécifique démontre l'usage des outils théoriques pour résoudre des modèles mathématiques

Mots clés : échelle de temps, integration dalta , dérivée

ملخص

يركز هذا البحث على دراسة نظرية مقياس الزمن و بنية رياضية تكاملية تسهل التحليل المتماسك للأنظمة الديناميكية، سواء كانت مستمرة أو منفصلة أو مختلطة تتناول هذه المذكرة المبادئ الأساسية لهذه النظرية . بما في ذلك مشتقات دلتا ونابلا والتكاملات المرتبطة بها .يتم تحليل الخصائص الأساسية لهذه المشغلات تطبيقها في دراسة بعض المعادلات الديناميكية. وفي القسم العملي يوضح مثال محدد استخدام النظرية لحل النماذج الرياضية.

الكلمات المفتاحية: المقاييس الزمنية - مشتقة دلتا مشتقة نابلا ، التكامل .