الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de RELIZANE
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département : Mathématiques

MEMOIRE

En vue de l’obtention du diplôme de MASTER en :

Géométrie différentielle

Intitulé

Problèmes aux limites concernant les équations différentielles fractionnaires avec des conditions non locales

Présenté par :
Mlle : Zenati Insaf

Devant les membres de jury :

Président : Mr Abdelkader Braik	Maître de conférence (A) A U. Chlef
Encadreur : Mr Rabah Haoua	Maître de conférence (A) A U. Mostaganem
Examinateur : Mr Habib Djourdem	Maître de conférence (A) A U. Relizane

Année universitaire : 2024/2025

Dédicace

A l’aide de Dieu tout puissant, qui m’a tracé le chemin de ma vie, j’ai pu réaliser ce travail que je dédie :

A mon cher père

Pour tout ce que tu as fait pour moi pour que je sois celle que je suis aujourd’hui, Pour ton amour, tes sacrifices et tes conseils qui m’ont guidée à chaque étape de ma vie. Ton soutien indéfectible et ta confiance en moi ont été une force silencieuse mais essentielle.

A ma chère mère

Pour toute ta tendresse, amour et affection qui ont été pour moi une lumière et un appui d’une valeur inestimable.
Ton soutien, tes prières et tes sacrifices silencieux ont rendu ce mémoire possible.

A mes chères sœurs

Pour vos encouragements permanents et votre soutien moral.

A ma sœur et ma meilleure amie Amina

Pour ta présence constante, ton amour inconditionnel et ton soutien. Tu as été une source de force et d’inspiration tout au long de ce parcours. Ce mémoire t’est dédié avec toute ma gratitude et mon affection.

A mon cher frère

Pour ton appui et ton encouragement et ton soutien Ce mémoire t’est dédié avec toute mon affection et ma gratitude.

A Mr Bousbous

Pour ta patience et ton soutien indéfectible tout au long de ce parcours.
Merci d’avoir cru en moi, même quand moi je doutais.

À mon fidèle compagnon B

Dans ta présence une joie sans fin. Tu es une âme loyale, un cœur pur et un véritable membre de la famille.

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donnée la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

En second lieu, je voudrais tout d'abord remercier mon encadreur Mr. Rabah Haoua pour sa précieuse aide, ses orientations et conseils ainsi le temps qu'il m'a accordé pour mon encadrement.

Je remercie Mr Abdelkader Braik d'avoir accepté de présider le jury.

Je remercie Mr Habib Djourdem d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier à mon très cher père.

Enfin, Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribuées de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

[Introduction](#) 1
1.1 Notions préliminaires sur les espaces fonctionnels 3
1.1.1 Espace de Lebesgue: 3
1.1.2 Espace de Hilbert : 4
➢ Inégalité de Hölder : 5
1.1.3 Espaces de fonctions différentiables (les espaces $\boldsymbol{C^k}(\Omega)$) : 5
1.1.5 Espace de Hölder : 6
1.1.6 Espace de Sobolev : 7
1.2 Notions préliminaires sur le calcul fractionnaire : 8
1.2.1 Fonction Gamma : 8
1.2.2 La fonction Beta : 9
1.2.3 La fonction Mittag-Leffler : 10
1.2.4 La transformation de Laplace : 11
1.2.5 La dérivée et l'intégrale de Riemann- Liouville : 12
1.2.6 La transformation de Laplace de la dérivée de Riemann : 13
1.2.7 L'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard : 14
1.2.8 Théorème (théorème de Schaefer) : 15
1.2.9 Théorème (de Leray-Schauder pour les applications à valeur unique) : 15
2.1 Théorème de point fixe 16
2.1.1 Arzela –Ascoli : 16
2.1.2 Mazur 17
2.1.3 Applications ensemblistes 17
2.1.4 L'ensemble des sélections 18
2.3 L'existence et l'unicité qui résultent du théorème du point fixe de Banach : 20
2.4 Résultat d'existence via le théorème du point fixe de Schaefer : 21
2.5 Résultat d'existence via l'alternative non linéaire de Leray-Schauder : 26
3.1 Exemple 1 : 29
3.2 Exemple 2 : 30
Bibliographie 31

INTRODUCTION

Les équations différentielles fractionnaires sont utilisées pour modéliser des phénomènes tels que la diffusion des fluides, la propagation des ondes, la croissance de populations, les processus de filtration, l'analyse des signaux, la dynamique de marche, etc.

Les équations différentielles fractionnaires peuvent être classées selon différents critères : linéaires ou non-linéaires, a coefficients constants ou variables, a une ou plusieurs variables, etc. La résolution de ces équations peut être réalisée à l'aide de différentes méthodes, telles que la méthode de variation de la constante, la méthode de Laplace, la méthode de la transformée de Fourier, décomposition d'Adomian ou la méthode de la perturbation d'homotopie.

Ce mémoire consiste à étudier l’existence et l’unicité des solutions pour l’équation différentielle fractionnaire de type Hadamard, avec des conditions non locales .Notre approche est basé sur la théorie du point fixe de Banach, le théorème de Schafer et l’alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Ce mémoire est composé de 3 chapitres. Il est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à des notions –préliminaires concernant notations et définitions, les espaces fonctionnels (espace de Hilbert, espace de

Sobolev, espace de Hölder …), les fonctions spéciales, la transformation de Laplace, la dérivée et l'intégrale de Riemann-Liouville, l'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Le deuxième chapitre est consacré à l'existence et l'unicité pour les équations différentielles fractionnaires avec la dérivée de Hadamard.

Notre approche est basée sur les théories du point fixe de Banach, Schafer, et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Le troisième chapitre est consacré à des exemples illustrant l'applicabilité des conditions imposées.

Chapitre 1

Dans ce chapitre nous allons donner quelques notions de base sur le calcul fractionnaire et sur les espaces fonctionnels.

1.1 Notions préliminaires sur les espaces fonctionnels

1.1.1 Espace de Lebesgue:

1.1.1.1 Définition :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ a frontière régulière et p ≥ 1 on définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable et } \left(\int_\Omega |f|^{\mathrm{p}}\, \mathrm{dx} \right)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} < \infty \right\}$$

On le muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^{\mathrm{p}}\, \mathrm{dx} \right)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \ , \ \ \mathrm{p} \ \geq 1$$

- Quand p = 2, cette norme provient du produit scalaire :

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx$$

- Quand p =+∞ on a :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : |f(x)| \leq C \ , \forall x \ \in \Omega\}$$

1.1.1.2 Définition :

Si on note $d\theta$ la mesure superficielle sur Γ induite par la mesure de Lebesgue dx, on définit $L^p(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$ comme l'ensemble des applications $f : \Gamma \to \mathbb{R}$

telles que $|f|^p$ soit intégrable sur Γ . C'est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |f(\sigma)|^{\mathrm{p}}\, \mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{\mathrm{p}}}$$

Qui est réflexif si $1 < p < \infty$.

1.1.1.3 Convergence dominée de Lebesgue:

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable. On suppose qu'il existe $f \in L^1(\Omega)$, telle que pour tout $n \geq 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0 \;,\; \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega} f_n dx = \int_{\Omega} f dx \;, \forall x \in \Omega$$

1.1.2 Espace de Hilbert :

1.1.2.1 Définition :

Soit H un espace vectoriel.Un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive. Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle u, v\rangle| \leq \langle u, u\rangle^{1/2} \langle v, v\rangle^{1/2} \quad \forall\, u\,, v \;\in H$$

Rappelons aussi que $\|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2}$ est une norme.

1.1.2.2 Définition :

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire$\langle u, v\rangle$, et qui est complet pour la norme $\langle u, u\rangle^{1/2}$.

1.1.2.3 Exemple fondamental :

L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle \quad = \int_{\Omega} u(x)v(x)\,dx$$

est un espace de Hilbert.

- **Inégalité de Hölder :**

Soient $\in L^p(\Omega)$, et $g \in L^{p'}(\Omega)$ ou p' est l'exposant conjugué de p, i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On a $f.g \in L^1(\Omega)$ et $\int |fg| \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$.

1.1.3 Espaces de fonctions différentiables (les espaces $C^k(\Omega)$) :

1.1.3.1 Définition :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désignera $C^0(\Omega)$ (resp $C^1(\Omega)$) l'espace des fonctions continues (resp continument différentiable), Ω a valeur complexe puis, pour $\in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, on pose :

$$\boldsymbol{C^k(\Omega) = \left\{u \in C^{k-1}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial xi}, i = 1, \dots, n\right\}}$$

C'est l'espace des fonctions k fois continument différentiable sur Ω a valeur dans $\mathbb{C}$. On notera :

$$\mathbf{C}^{\infty}(\Omega) = \bigcap_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}} \mathbb{C}^{\mathbf{k}}(\Omega)$$

L'espace des fonctions indéfiniment différentiable sur Ω. Pour designer les dérivées partielles d'ordre supérieur a 1.

1.1.4 Espace de fonctions tests:

1.1.4.1 Définition :

L'espace des fonctions tests est un espace des fonctions $\mathbb{C}^{\infty}$, a support compact Inclus dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{n}$ est noté (Ω) .

1.1.5 Espace de Hölder :

Soit $\alpha \in (0,1)$

- L'espace de Hölder $\mathbf{C}^{\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}}(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues, muni de la norme :

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega}|u(x)| + \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$$

- L'espace de Hölder $\mathbf{C}^{\mathbf{2},\boldsymbol{\alpha}}(\Omega)$ est l'espace des fonctions de classe C^{2}, dont Du et $D^{2}u$ appartiennent à $\mathbf{C}^{\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}}(\Omega)$. On munit $\mathbf{C}^{\mathbf{2},\boldsymbol{\alpha}}(\Omega)$ de la norme définie par :

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \|u\|_{C^{2}(\Omega)} + \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}\in\Omega} \frac{|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\boldsymbol{\alpha}}}$$

Ou Du et $D^{2}u$ désignent respectivement la dérivée d'ordre 1 et la dérivée d'ordre 2 de u.

1.1.6 Espace de Sobolev :

1.1.6.1 Définition :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, un multi-indice de longueur $|\alpha|$

- On appelle espace de fonctions test sur Ω noté $D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$, l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact sur Ω.
- On dit qu'une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ localement intégrable sur Ω est α-ième dérivable au sens de distributions, si pour toute fonction $\emptyset \in D(\Omega)$:

$$\int_\Omega (D^\alpha u)\emptyset dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(D^\alpha \phi)dx$$

On note alors $v_\alpha = D^\alpha u$ la α-ième dèrivée au sens des distributions de u.

1.1.6.2 Définition :

Soient $p \geq 1, m \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$$

1.1.6.3 Remarque :

- ✓ Pour $m = 0$, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.
- ✓ Pour $m = 1$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$\exists g_1, g_2 \ldots\ldots g_n \in L^p(\Omega)$$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{\mathrm{u} \in L^p(\Omega) / \int_\Omega u \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx = -\int g_i \varphi dx\right\}$$

$$pour\ toute\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\ et\ tout\ i\ = 1 \ldots, n$$

- ✓ Pour $p = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ est particulièrement noté par $H^m(\Omega)$, on lappelle parfois espace de Sobolev d'ordre m.

1.2 Notions préliminaires sur le calcul fractionnaire :

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler. Elle prolonge la fonction factorielle aux nombres réels et aux nombres complexes.

1.2.1 Fonction Gamma :

1.2.1.1 Définition :

Elle est définie par :

$$\Gamma(\mathcal{Z}) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\mathcal{Z}-1}\, dt \ , \text{ Pour } \quad R(\mathcal{Z}) > 0$$

1.2.1.2 Propriétés :

- Une propriété importante de la fonction de Gamma $\Gamma(\mathcal{Z})$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(\mathcal{Z}+1) = \mathcal{Z}\Gamma(\mathcal{Z})$$

En effet :

$$\Gamma(\mathcal{Z}+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\mathcal{Z}-1+1}\, dt = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\mathcal{Z}}\, dt$$

$$= [-t^{\mathcal{Z}} e^{-t}]_0^\infty + \mathcal{Z}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{\mathcal{Z}-1}\, dt = \mathcal{Z}\Gamma(\mathcal{Z})$$

1.2.1.3 Remarque :

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \;\; \Gamma(n+1) = n!$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ On peut démontrer :

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots = n!$

1.2.1.4 Exemple :

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 4.3.2.1\Gamma(1) = 4!$$

- La dérivée de la fonction Gamma sur R_+^* est :

$$\Gamma'(\mathcal{Z}) = \Gamma(\mathcal{Z}).\Psi(\mathcal{Z})$$

$\Psi(\mathcal{Z})$ est appelée la fonction digamma, et elle est la dérivée logarithmique de Gamma et elle est définit comme :

$$\Psi(\mathcal{Z}) = \frac{d}{d\mathcal{Z}} \ln \Gamma(\mathcal{Z}) = \frac{\Gamma'(\mathcal{Z})}{\Gamma(\mathcal{Z})}$$

Elle est définie pour tout $\mathcal{Z} \in \mathbb{C} \setminus \{o, -1, -2, \ldots\}$.

1.2.2 La fonction Beta :

1.2.2.1 Définition :

La fonction Beta est définie par :

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

1.2.2.2 Propriétés :

1. $\beta(p,q) = \beta(q,p)$.
2. $\beta(p,q) = \beta(p+1,q) + \beta(p,q+1)$.
3. $\beta(p,q+1) = \frac{q}{p}\beta(p+1,q) = \frac{q}{p+q}\beta(p,q)$.
4. La dérivée de la fonction Beta est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial p}\beta(p,q) = \beta(p,q)\left(\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} - \frac{\Gamma'(p+q)}{\Gamma(p+q)}\right)$$

1.2.3 La fonction Mittag-Leffler :

1.2.3.1 Définition :

La fonction de Mittag-Leffler est définie par :

$$E_\alpha(\mathcal{Z}) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{Z}^{\mathrm{k}}}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

Avec $\alpha > 0$, et $\mathcal{Z} \in ₵$.

La fonction généralisée de Mittag-Leffler est donnée par :

$$E_{\alpha,\beta}(\mathcal{Z}) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{Z}^{\mathrm{k}}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

Avec $\alpha > 0$, et $\beta > 0$.

1.2.3.2 Exemple :

$$E_1(\mathcal{Z}) = E_{1,1}(\mathcal{Z}) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{Z}^{\mathrm{k}}}{\Gamma(k+1)} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{Z}^{\mathrm{k}}}{k!} = \mathrm{e}^{\mathcal{Z}}$$

$$E_2(\mathcal{Z}) = E_{2,1}(\mathcal{Z}) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{Z}^{\mathrm{k}}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{Z}^{\mathrm{k}}}{2k!} = \cosh\sqrt{\mathcal{Z}}$$

1.2.4 La transformation de Laplace :

- Soit $F(s)$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, est définie par :

$$F(s) = L\big(f(t)\big) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

- $f(t)$ est la fonction originale qui peut etre obtenue par la transformée inversée de $F(s)$ de Laplace:

$$f(t) = L^{-1}F(s) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-st}F(s)ds \;\; avec \;\; c \; = Re(s) > 0$$

- La transformée de Laplace du produit de convolution deux fonctions f et g s'écrit sous la forme: $L(f(t) * g(t), s) = F(s)G(s)$.

a) La transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier est :

$$L[f^n(t)](s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k\,(0)$$

$$= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{n-k-1} f^k\,(0)$$

b) La transformée de Laplace de la fonction t^{n-1} est :

$$L[t^{p-1}](s) = \Gamma(p)s^{-p}$$

1.2.5 La dérivée et l'intégrale de Riemann- Liouville :

1.2.5.1 Définition (dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville) :

La dérivée d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville pour une fonction donnée $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (\frac{d}{dt})^n \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds$$

Ici $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ est la partie entière de α. Si $\alpha \in]0,1[$ alors :

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds$$

1.2.5.2 Exemple :

Calculons $D^{\alpha} t^{\lambda}$ pour $\lambda > -1$, nous trouverons :

$$D^{\alpha} t^{\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha} \quad , \alpha > 0, \lambda > -1 >$$

On particulier si $\lambda = 0$ alors :

$$D^{\alpha} t^{\lambda} = D^{\alpha} 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

1.2.5.3 Définition (intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville) :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on appelle l'intégrale de Riemann-Liouville de f:

$$(I_a^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\alpha} (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

1.2.5.4 Proposition (formule de semi-groupe) :

Soit $f \in C^0([a,b])$, pour α, β complexes tels que $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$

on a :

$$I_a^\alpha \left(I_a^\beta f\right) = I_a^{\alpha+\beta} f$$

Pour $Re(\alpha) > 1$, on a $\frac{d}{dt} I_a^\alpha f = I_a^{\alpha-1} f$.

Et pour $Re(\alpha) > 0$, on a $\lim_{\alpha \to 0} (I_a^\alpha f)(t) = f(t)$.

1.2.6 La transformation de Laplace de la dérivée de Riemann :

L'intégrale de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire comme le produit de

Convolution des fonctions $g(t)$ et $f(t)$:

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau = \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(t)$$

La transformée de Laplace de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ est donnée par :

$$G(s) = L\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de convolution, on obtient

la transformée de Laplace de l'intégrale aux sens de Riemann-Liouville :

$$L\left\{{}^{RL}D_t^\alpha f(t)\right\} = L\left\{{}^{GL}D_t^\alpha f(t)\right\} = s^{-\alpha} F(s)$$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée aux sens de Riemann-

Liouville de la fonction $f(t)$, posons $D^\alpha = g^n(t)$

Ce qui entraine :

$$g(t) = I^{(n-\alpha)}f(t)\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{n-\tau-1}f(\tau)d\tau\,, n-1 < \alpha < n$$

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier

conduit à:

$${}_0D_t^\alpha f(t) = s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \;\; ou \;\; G(s) = s^{(n-\alpha)}F(s)$$

A partir de la définition de la dérivée de Riemann-Liouville, il vient que :

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} D_t^{-(n-\alpha)} f(t) = {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t)$$

Ou ${}_\alpha D_t^\alpha f(t)$ est la dérivée d'ordre α, qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$${}_\alpha D_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_\alpha^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau\right)$$

1.2.7 L'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard :

1.2.7.1 Définition :

L'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre r pour une fonction

$h: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est définie par :

$${}^H I^r h(t) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1} \frac{h(s)}{s} ds\,, r > 0$$

À condition que l'intégrale existe.

1.2.7.2 Définition (dérivée fractionnaire de Hadamard) :

Pour une fonction h donnée sur l'intervalle$[1, +\infty[$, la dérivée fractionnaire de Hadamard de h est définie par :

$$^{H}D^{r}h(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{1}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-r-1}\frac{h(s)}{s}ds\,, n-1 < r < n$$

Ici $n = [r] + 1$, et $[r]$ désigne la partie entière inférieure de r et,

$\log(.) = \log_{e}(.)$.

1.2.8 Théorème (théorème de Schaefer) :

Soit X un espace de Banach, et $N: X \to X$ un opérateur complètement continu, si l'ensemble :

$$E(N) = \{x \in X: x = \lambda Nx. Pour. \lambda \in [0,1]\}$$

est fermé, alors N à des points fixes.

1.2.9 Théorème (alternative non linéaire de Leray-Schauder pour les applications à valeur unique) :

Soit E un espace de Banach, C un sous-ensemble fermé et convexe de E, U un sous-ensemble ouvert de C, et $0 \in U$ supposons que $N: U \to C$ soit une application continue et compacte (c'est à dire que, $N(U)$ soit un sous-ensemble relativement compact de C), alors :

Soit : N a un point fixe dans U.

Ou Il existe un $x \in \partial U$ et un $\lambda \in [0,1]$, pour lesquels $x = \lambda N(x)$.

Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de solutions pour l'équation différentielle fractionnaire de type Hadamard, satisfaisant une condition limite de Dirichlet et une condition limite non locale donnée par :

$$^{H}D^{r}y(t) = f\big(t, y(t)\big)\; pour\ t \in J := [1, T], 1 < r < 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y(1) = 0\,, y(T) = g(y)\ \ldots\ldots\ldots..(2)$$

Tel que :

$^{H}D^{r}$ désigne la dérivée fractionnaire de type Hadamard d'ordre r.

$f(t, y): J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

2.1 Théorème de point fixe

2.1.1 Arzela –Ascoli :

Soit A un sous ensemble de $C(J, E)$, A est relativement compact dans $C(J, E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

- L'ensemble A est borné c'est à dire :

$$\exists\, k > 0 : \|f(x)\| \le k\,, \forall\, x \in J\ et\ \forall\, f \in A$$

- L'ensemble A est équicontinu c'est à dire :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : |t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \le \varepsilon$$
$$pour\ tout\ t_1\,, t_2 \in J\ et\ tout\ f \in A$$

- Pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

2.1.2 Mazur

2.1.2.1 Théorème :

Soit $\{X_n\}$ une suite faiblement convergente vers X dans un espace de Banach E. Alors, il existe une suite de combinaisons convexes d'éléments de $\{X_n\}$ qui converge fortement vers X.

2.1.3 Applications ensemblistes

Soient X et Y des espaces métriques.

- A une application ensembliste (également appelée application multivaluée) $F: X \rightarrow Y$ est une application qui associe à tout $x \in X$ un sous-ensemble $F(x)$ appartenant à Y.
- Le graphe de F est le sous-ensemble du produit $X \times Y$ défini par :

$$Graph(F) := \{(x, y) \in X \times Y | y \in F(x)\}$$

- Une application multivaluée $F: X \rightarrow P(X)$ est convexe (fermée) si $F(X)$ est convexe (fermée) pour tout $x \in X$.

- F a un point fixe s'il existe $x \in X$ tel que $x \in F(x)$.

2.1.4 L'ensemble des sélections

2.1.4.1 Définition

Soient X et Y des ensembles non vides et $F: X \to P(Y)$, alors :

1) L'opérateur univoque $f: X \to Y$ est appelé une sélection de F si et seulement si $f(x) \in F(x)$, pour tout $x \in X$.
2) L'ensemble des sélections de F est défini par :

$$S_{F,y} = \{V \in L^1(J, \mathbb{R}): V(t) \in F\big(t, y(t)\big)\, presque\ partout\ t \in J\}$$

2.2 Principaux résultats :

2.2.1 Définition

Une fonction $y \in C^1([1,T], R)$ est dite solution de (1) et (2), si y satisfait l'équation ${}^{H}D^{r}y(t) = f(t, y(t))$ sur J et les conditions (2).

Pour l'existence de solutions au problème 1-2, nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant :

2.2.2 Lemme :

Soit $h: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1} h(s)ds$$
$$+ \frac{(\log t)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}} \left[g(y) - \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1} h(s)ds\right] \dots \dots (3)$$

Si et seulement si y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire :

$$^{H}D^{r}y(t) = h(t)\ pour\ t \in J = [1, J]\ , 1 < r < 2 \ldots \ldots (4)$$

$$y(1) = 0, y(T) = g(y) \ldots \ldots . . (5)$$

2.2.3 Preuve :

En appliquant l'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre r aux deux cotés de (4) nous avons :

$$y(t) = C_1(\log t)^{r-1} + C_2(\log t)^{r-2} + {}^{H}I^{r}h(t) \ldots \ldots . . (6)$$

$$De\ y(1) = 0\ on\ a\ C_2 = 0\ et\ de\ y(t) = g(y)$$

$$C_1 = \frac{1}{(\log T)^{r-1}}\left[g(y) - {}^{H}I^{r}h(T)\right]$$

Nous obtenons donc l'équation (3).

Il convient de noter que le problème (1) et (2) à une solution, si et seulement si l'operateur :

$$(Ny)(t) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1} f(s, y(s))\frac{ds}{s}$$
$$+ \frac{(\log t)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}}\left[g(y) - \frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1} f(s, y(s))\frac{ds}{s}\right] \ldots \ldots (7)$$

a des points fixes dans $C(J, \mathbb{R})$.

Dans les sous-sections suivantes, nous démontrons l'existence, ainsi que les résultats d'existence et d'unicité, pour le problème aux limites 1 et 2 en utilisant divers théorèmes de point fixe.

2.3 L'existence et l'unicité qui résultent du théorème du point fixe de Banach :

2.3.1 Théorème :

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées.

- Il existe une constante $k > 0$, telle que :

$$|f(t,u) - f(t,u^*)| \leq k|u - u^*|\; pour\; t \in J et\; u, u^* \in \mathbb{R}$$

- Il existe une constante $k^* > 0$, telle que :

$$|g(u) - g(u^*)| \leq k^*|u - u^*|\; pour\; chaque\; u, u^* \in \mathbb{R}$$

Si

$$\left[\frac{2k(\log T)^r}{\Gamma(r+1)} + k^*\right] < 1$$

Alors le problème (1)-(2) a une solution unique sur$[1, T]$.

2.3.2 Preuve :

Transformez le problème (1)-(2) en un problème de point fixe, ou l'opérateur N est défini comme dans (7).

En appliquant le principe de contraction de Banach, nous allons montrer que N est une contraction, soient , $y \in C([1,T],\mathbb{R})$, alors pour chaque $t \in J$, nous avons :

$$|(Nx)(t)-(Ny)(t)|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|\frac{ds}{s}$$

$$+\frac{(\log t)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}}\Big[|g(x)-g(y)|$$

$$+\frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^T\left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\Big]$$

$$\leq \frac{2}{\Gamma(r)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|\frac{ds}{s}$$

$$+|g(x)-g(y)|$$

$$\leq\left[\frac{2k(\log T)^r}{\Gamma(r+1)}+k^*\right]\|x-y\|_\infty$$

Ainsi

$$\|N(y_n)-N(y)\|_\infty\leq\left[\frac{2k(\log T)^r}{\Gamma(r+1)}+k^*\right]\|x-y\|_\infty$$

On en déduit que N a un point fixe qui est une solution unique du problème.

2.4 Résultat d'existence via le théorème du point fixe de Schaefer :

2.4.1 Théorème :

Supposons que :

- La fonction $f : [1, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.
- Il existe une constante $M > 0$, telle que :

$$|f(t, u)| \leq M \; pour \; t \in J \; et \; chaque \; u \in \mathbb{R}$$

- Il existe une constante $M^* > 0$, telle que :

$$|g(u)| \leq M^* \; pour \; chaque \; u \in \mathbb{R}$$

Alors le problème (1)-(2) a au moins une solution sur$[1, T]$.

2.4.2 Preuve :

Nous utiliserons le théorème du point fixe de Schaefer pour prouver que N défini par (7) a un point fixe. La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

- **Étape 1 :** $\boldsymbol{N}$ est continue.

Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \to y$ dans $(J, \mathbb{R})$, alors pour chaque $t \in J$:

$$|(Ny_n)(t)-(Ny)(t)|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1} \left|f\big(s,y_n(s)\big)-f\big(s,y(s)\big)\right|\frac{ds}{s}$$

$$+\frac{(\log t)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}}\Bigg[|g(y_n)-g(y)|$$

$$+\frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^T \left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1} \left|f\big(s,y_n(s)\big)-f\big(s,y(s)\big)\right|\frac{ds}{s}\Bigg]$$

$$\leq \frac{2}{\Gamma(r)}\int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1}$$

$$\times \sup_{s\in[1,T]}\left|f\big(s,y_n(s)\big)-f\big(s,y(s)\big)\right|\frac{ds}{s}$$

$$+\sup|g(y_n)-g(y)|$$

$$\leq \frac{2(\log T)^r}{\Gamma(r+1)}\|f(.,y_n(.)-f(.,y(.))\|_\infty$$

$$+\|g(y_n)-g(y)\|_\infty$$

Et puisque f et g sont continues nous avons :

$$\|N(y_n)-N(y)\|_\infty \to 0 \;\; n\to\infty$$

- **Étape 2 :** N Transforme des ensembles bornés en ensembles bornés dans $C([1,T],\mathbb{R})$. en effet, il suffit de montrer que pour tout $\mu^*>0$, il existe une constante positive l telle que, pour tout $y\in B_{\mu^*}=\{y\in C([1,T],\mathbb{R}):\|y\|_\infty\leq\mu^*\}$ on a $\|N(y)\|_\infty<l$ donc :

$$|N(y)(t)| \leq |g(y)| + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^T \left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1} |f(s, y(s)| \frac{ds}{s}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1} |f(s, y(s)| \frac{ds}{s}$$

$$\leq M^* + 2M \frac{(\log T)^r}{\Gamma(r+1)}$$

Ainsi

$$\|N(y)\|_\infty \leq M^* + 2M \frac{(\log T)^r}{\Gamma(r+1)} := l$$

- **Étape 3**

N Transforme des ensembles bornés en ensembles équicontinus de $C([1,T],\mathbb{R})$. Et soit $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2\ et\ B_{\mu^*}$ un ensemble lié de $C([1,T],\mathbb{R})$ à l'étape.

- Et soit $y \in B_{\mu^*}$, alors :

$$|N(y)(t_2) - N(y)(t_1)| \leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^{t_1} \left[\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{r-1} - \left(\log\frac{t_1}{s}\right)^{r-1}\right]$$

$$\times |f(s, y(s)| \frac{ds}{s}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^{t_2} \left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{r-1} |f(s, y(s)| \frac{ds}{s}$$

$$+\frac{(\log t_2)^{r-1}-(\log t_1)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}}\left(|g(y)|+\frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1}|f(s,y(s)|\frac{ds}{s}\right)$$

$$\leq\frac{M}{\Gamma(r)}\int_1^{t_1}\left[\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{r-1}-\left(\log\frac{t_1}{s}\right)^{r-1}\right]\frac{ds}{s}$$

$$+\frac{M}{\Gamma(r)}\int_1^{t_2}\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{r-1}|f(s,y(s)|\frac{ds}{s}$$

$$+\frac{(\log t_2)^{r-1}-(\log t_1)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}}\times\left(M^*+\frac{M}{\Gamma(r)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1}\frac{ds}{s}\right)$$

$$\leq\frac{M}{\Gamma(r+1)}[(\log t_2)^r-(\log t_1)^r]$$

$$+\frac{(\log t_2)^{r-1}-(\log t_1)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}}\left(M^*+\frac{M}{\Gamma(r+1)}(\log T)^r\right)$$

Lorsque $t_1\to t_2$, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.

En conséquence de l'étape 1 à l'étape 3, ainsi que du théorème d'Arzela-Ascoli, nous pouvons conclure que N est continue et complètement continue.

- **Étape 4 :** Bornes a priori

Il reste à montrer que l'ensemble :

$$\epsilon=\{y\in C(J,\mathbb{R}): y=\lambda N(y)\ pour\ 0<\lambda<1\}$$

est borné, maintenant :

$$y(t)=\lambda\left[\frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1}|f(s,y(s)|\frac{ds}{s}\right.$$

$$+\frac{(\log t)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}}\left(g(y)-\frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1} f(s,y(s))\frac{ds}{s}\right)\Bigg]$$

Pour$\lambda \in [0,1]$, soit y tel que pour tout $t \in [1,T]$:

$$|N(y)(t)| \leq 2\frac{M}{\Gamma(r)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1}\frac{ds}{s}+M^*$$

$$\leq 2\frac{M}{\Gamma(r+1)}(\log T)^r+M^*$$

Alors

$$\|N(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\Gamma(r+1)}(\log T)^r+M^* := R$$

Ceci montre que l'ensemble ϵ est borné .En conséquence du théorème du point fixe de Schaefer, nous en déduisons que N a un point fixe qui est une solution du problème (1)-(2).

2.5 Résultat d'existence via l'alternative non linéaire de Leray-Schauder :

2.5.1 Théorème :

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées.

- Il existe $\emptyset_f \in L^1(J,\mathbb{R}_+)$ et ψ: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ continues et décroissantes telles que :

$$|f(t,u)| \leq \phi_f(t)\psi(|u|)\ pour\ t \in J\ et\ tout\ u \in \mathbb{R}$$

- Il existe $\psi^*: [0,\infty) \to [0,\infty)$ continues et décroissantes telles que :

$$|g(u)| \leq \psi^*(|u|)\ pour\ \ tout\ u \in \mathbb{R}$$

- Il existe un nombre $M^1 > 0$, tel que :

$$\frac{M^1}{2\psi(M^1)I^\alpha\phi_f(T) + \psi^*(M')} > 1$$

Donc le problème (1)-(2) a au moins une solution sur $[1,T]$.

2.5.2 Preuve :

Nous utiliserons l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour prouver que N tel que défini par (7) a un point fixe. Comme le montre le théorème 3.2, nous voyons que l'opérateur N est continu, uniformément borné et équicontinu, et donc par le théorème d'Arzela-Ascoli, N est complètement continu.

Pour $\lambda \in [0,1]$, soit y pour tout $t \in [1,T]$:

$$|y(t)| \leq \frac{2}{\Gamma(r)}\int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1} \phi_f(s)\psi(|y|)\frac{ds}{s} + \psi^*(|y|)$$

$$\leq 2\psi\|(y)\|_\infty I^\alpha\phi_f(T) + \psi^*\|(y)\|_\infty$$

Ainsi

$$\frac{\|(y)\|_\infty}{2\psi\|(y)\|_\infty I^\alpha \phi_f(T) + \psi^*\|(y)\|_\infty} \leq 1$$

Alors il existe M^* tel que $\|(y)\|_\infty \neq M^*$.

Soit :

$$B_{M^*} = \{y \in C([1,T],\mathbb{R}) : \|(y)\|_\infty < M^*\}$$

L'opérateur N est continu et complètement continu. Du choix de B_{M^*}, il n'existe pas de $y \in \partial B_{M^*}$ tel que $y = \lambda N(y)$, pour un certain $\lambda \in (0,1)$. Comme conséquence de l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder, on en déduit que N a un point fixe $y \in B_{M^*}$, qui est une solution du problème.

Chapitre 3

Dans ce chapitre, nous présentons quelques exemples pour illustrer nos résultats.

3.1 Exemple 1 :

Nous considérons le problème aux limites de l'équation différentielle fractionnaire

$$^{H}D^{\frac{3}{2}}y(t) = \frac{1}{t^2+8}\sin y \; pour \; t \in [1,e] \;\; et \; y \in \mathbb{R}_+ \ldots\ldots\ldots (8)$$

$$y(1) = 0\,, y(T) = \sum_{i=1}^{n} c_i y(t_i) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Ou $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1 \; et \; c_i\,, i = 1, \ldots, n$ sont des constantes positives avec :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i < \frac{1}{9}$$

Ici

$$r = \frac{3}{2}\,, T \; = e$$

Donc :

$$|f(t,y)| = \left|\frac{1}{t^2+8}\sin y\right| \leq \frac{1}{9}$$

Et nous avons :

$$|g(y)| \leq \frac{1}{9}$$

Choisissons $M = \frac{1}{9}$ et $M^* = \frac{1}{9}$, nous avons :

$$\|N(y)\|_\infty \leq 2\frac{M}{\Gamma(r+1)}(\log T)^r + M^* \leq 2\frac{1/9}{\Gamma(3/2+1)} + \frac{1}{9} = \frac{8+3\sqrt{\pi}}{27\sqrt{\pi}}$$

Et donc N est borné, alors d'après le théorème 3.2, le problème (8)-(9) a une solution sur$[1, e]$.

3.2 Exemple 2 :

On considère le problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire :

$${}^H D^{\frac{3}{2}} y(t) = (\log t)^2 \frac{y^2}{8|y|+1} \; pour \; t \; \in [1, e] et \; y \in \mathbb{R}_+ \ldots\ldots\ldots (10)$$

$$y(1) = 0\,, y(T) = \sum_{i=1}^{n} c_i y(t_i) \ldots\ldots..(11)$$

Ou $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1 \; et \; c_i\,, i = 1, \ldots\ldots.., n$ sont des constantes positives avec :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i < \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$$

Ici

$$r = \frac{3}{2}\ , T\ = e$$

Et

$$|f(t,y)| = (\log t)^2 \frac{y^2}{8|y|+1}$$

Et

$$|g(y)| = \sum_{i=1}^{n} c_i y(t_i)$$

Donc :

$$|f(t,y)| = \left|(\log t)^2 \frac{y^2}{8|y|+1}\right| \leq (\log t)^2 \frac{1}{8}|y|$$

Nous avons aussi :

$$|g(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} c_i\, |x| \leq \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}|x|$$

Choisissons

$$\psi(|y|) = \frac{1}{8}|y|\ , \phi_f(t) = (\log t)^2 et\ I^{\frac{3}{2}}\phi_f(e) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$$

Nous avons :

$$\frac{M}{2\psi(M)I^{\alpha}\phi_f(e)+\psi^*(M)}=\frac{1}{\frac{\Gamma(3)}{4\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}+\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}>1$$

Est satisfaite, alors d'après le théorème 3.3, le problème (10)-(11) a une solution sur $[1,e]$.

3 Bibliographie

1. **H.Brezis.** *analyse fonctionnelle ,théorie et application .* s.l. : Masson , 1967.

2. —. *analyse fonctionnelle ,théorie et application .* s.l. : Masson , 1967.

3. —. *analyse fonctionnelle , théorie et application .* s.l. : Masson , 1967.

4. —. *analyse fonctionnelle ,théorie et application .* s.l. : Masson , 1967.

5. —. *annalyse fonctionnelle , théorie et application .* s.l. : Masson, 1967.

6. —. *annalyse fonctionnelle , théorie et application .* s.l. : Masson , 1967.

7. —. *annalyse fonctionnelle , théorie et application .* s.l. : Masson , 1967.

8. **J.L.Lions.** *quelques méthodes de résolution des prblèmes aux limittes non-linéaires .* Paris : Dunod, 1969.

9. **H.Brezis.** *annalyse fonctionnelle , théorie et application .* s.l. : Masson, 1967.

10. **Zahira, Ali.** *calcul fractionnaire .* Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Ain-Témouchent : s.n., 2020.

11. **Aicha, Reguieg Somia & Zaoui.** *Integration factionaries au sens de Riamann-Liouville d'ordre variable .* université Ibn Khaldoun Tiaret : s.n., 2022.

12. **Mohamed, BOUNOUIGA.** *Etude de quelques équations différentielles liés au calcul fractionnaire conformable.* Université Mohamed Boudiaf de M'sila : s.n., 2022/2023.

13. **Khaoula, Bettayeb.** *Dérivée Fractionnaire Conformable introduction et applications .* Université Kasdi Merbah Ouargla : s.n., 2024.

14. **Wafaa Benhamida and Samira Hamani.** *A Boundary Value Problem for Fractional Differential equations with Hadamard derivative and non local conditions .* université de Mostaganem laboratoire des mathématiques appliqués et pures : s.n., 2016.

15. **Ziani Nadjia, Senouci Ouahiba ,Abbes Nacera ,Djaid Sanna.** *introduction au calcul fractionnaire .* Universite IBn Khaldoun – Tiaret – : s.n., 2018/2019.

16. **Boualam, Fatiha.** *calcul fractionnaire et l'ondelette CAS (cosin and sin).* université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem : s.n., 2013.

17. **Yacine, Arioua.** *introduction au calcul fractionnaire et application .* université Mohamed Boudiaf Msila : s.n., 2021/2022.

18. **Meriem, Abed.** *étude de quelques problème paraboliques et applications .* université Ahmed Draia Adrar : s.n., 2017-2018.