

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Zabana de Relizane  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Mathématiques



جامعة أحمد زبانة - غليزان  
Ahmed Zabana University-Relizane

**MEMOIRE**

En vue de l'obtention du diplôme de MASTER en :  
**Géométrie différentielle**

**Intitulé**

**Application de la fonction de transfert d'ordre fractionnaire  
pour calculer l'énergie de la réponse impulsionnelle**

**Présenté par :**

Mlle. Asma Benlefki

**Devant les membres de jury :**

**Présidente :** Mme. Nawal Kherbouche

Maître de conférence B (U. Relizane)

**Examinatrice :** Mme. Halima Kadari

Maître de conférence B (U. Relizane)

**Encadrante :** Mme. Aouda Lakeb

Maître assistant B (U. Relizane)

**Année universitaire : 2024/2025**

# Dédicaces

*Louange à Dieu, grâce à qui les bonnes actions sont possibles. C'est par Sa grâce que j'ai pu atteindre ce niveau de savoir et de connaissance.*

*Je dédie ce travail à :*

*À mon cher père , dont je porte le nom avec fierté*

*À ma chère mère , dont les prières sincères ont été le secret de ma réussite*

*À mes sœurs Hanifa et Sarah, mon soutien de tous les jours, qui m'ont encouragée par leurs mots et leurs prières*

*À mes cousines Bakhta, Hafssa et Fatima*

*À mon amie Hadjer et compagne de l'âme*

*À tous les membres de ma famille et à tous mes amis*

*A smaa*

# Remerciements

*Je tiens à remercier sincèrement mon encadrante Mm. A. Lakeb pour son accord à diriger ce travail, pour ses précieux conseils et sa grande patience tout au long de la préparation de ce mémoire*

*Je tiens à remercier Madame N. Kherbouche, présidente du jury, pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de présider cette soutenance.*

*Je tiens également à adresser mes sincères remerciements à Madame H. Kadari, pour avoir accepté d'évaluer ce travail et pour ses remarques*

*Un grand merci à mes parents pour leur soutien, ainsi qu'à toute ma famille et à mes amis pour leur encouragements*

*Je n'oublie pas remercier chaleureusement tous les professeurs du département de mathématiques l'université Ahmed Zabana de Relizane ainsi que toutes les personnes qui ont contribué à mon parcours académique*

*Que Dieu nous accorde à toute réussite et prospérité*

*Merci à tous*

*A smaa*

# Table des matières

<b>Abbreviations</b>	<b>iv</b>
<b>Notation</b>	<b>v</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Outils Fonctionnels</b>	<b>3</b>
1 Introduction . . . . .	3
2 Calcul fractionnaire . . . . .	3
3 Transformations intégrales . . . . .	8
4 Complément de Schur . . . . .	12
5 Conclusion . . . . .	13
<b>2 Norme <math>\mathcal{H}_2</math> Pour La Fonction du Transfert D'ordre Fractionnaire</b>	<b>14</b>
1 Introduction . . . . .	14
2 Outils de base en théorie du contrôle . . . . .	14
3 Norme $\mathcal{H}_2$ pour une fonction de transfert d'ordre fractionnaire . . . . .	20
4 Conclusion . . . . .	24
<b>3 Applications Numériques</b>	<b>25</b>
1 Introduction . . . . .	25
2 Système dynamique ordinaire . . . . .	25
3 Système dynamique d'ordre fractionnaire . . . . .	26
4 Conclusion . . . . .	26
<b>Conclusion</b>	<b>27</b>
<b>References</b>	<b>28</b>

# Liste des abréviations

<b>SISO</b>	:	Single-input, single-output
<b>MIMO</b>	:	Multiple-input, multiple-output
<b>MISO</b>	:	Multiple-input, single-output
<b>SIMO</b>	:	Single-input, multiple-output
<b>LTI</b>	:	Linéaire temps-invariant
<b>BIBO</b>	:	Bounded-input, bounded output

# Index des notations

$\mathbb{N}^*$	: Ensembles des nombres entiers naturels{1, 2, 3, ...}.
$\mathbb{R}$	: Corps des nombres réels.
$\mathbb{C}$	: Corps des nombres complexes.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	: Espace des matrices réelles de dimension $n \times m$ .
$\mathbb{R}^n$	: Espace de vecteurs à $n$ entrée réelles.
$\det(\cdot)$	: Déterminant d'une matrice.
$\Re$	: Partie réelle d'un nombre complexe.
$A^T$	: Transposée d'une matrice.
$A^{-1}$	: Inverse d'une matrice.
$A^*$	: Matrice conjuguée.
$\arg(\cdot)$	: Argument d'un nombre complexe.
$D^\alpha$	: Dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ .
$\mathcal{L}[\cdot]$	: Transformée de Laplace.
$\mathcal{M}[\cdot]$	: Transformée de Mellin.
$I_d$	: Matrice identité.
$\text{tr}(A)$	: Trace d'une matrice.
$\Gamma(x)$	: Fonction Gamma Euler.
$B(\cdot, \cdot)$	: Fonction Bêta Euler.
$\ G\ _2$	: Norme $\mathcal{H}_2$ de la fonction de transfert $G$ .

# Introduction

Dans les domaines de l'ingénierie et des sciences, les systèmes dynamiques sont un modèle mathématique utilisé pour décrire l'évolution de l'état d'un système donné au cours du temps continu ou discret. En fait, ils constituent le cadre de base utilisé pour modéliser, contrôler et analyser une grande variété de systèmes et de phénomènes [7, 25].

En outre, un système dynamique peut être décrit par une équation différentielle ordinaire ou une équation différentielle fractionnaire où la modélisation et la simulation mathématiques du système et des processus ciblés sont basées sur la description de leurs propriétés en termes de dérivation fractionnaire [11, 17, 36]. Ce type de calcul est une extension du calcul différentiel et intégral classique, puisqu'il permet d'utiliser des ordres non entiers. Cette méthode est particulièrement utile pour étudier des systèmes qui présentent des comportements à mémoire ou des phénomènes, que les modèles classiques ne peuvent pas représenter avec précision.

Dans ce contexte, les équations de ce type d'un système écrit sous la forme [19, 20]

$$\sum_{i=0}^n D^{\alpha_i} a_i y(t) = u(t),$$

ce modèle mathématique représente par une représentation d'état qui s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \end{cases}$$

où  $\mathbf{D}^\alpha$  la dérivées fractionnaire au sens de Caputo,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur colonne d'entrée,  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur colonne d'état,  $y \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur colonne de sortie,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice d'état,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est la matrice d'entrée,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  est la matrice de sortie,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$  est la matrice Transmission directe.

Cependant, il existe plusieurs autres types de représentation des systèmes dynamiques, parmi lesquels la représentation de la fonction de transfert apparaît. Dans les domaines de l'ingénierie, une fonction de transfert d'un système de contrôle est une fonction mathématique, obtenue par simple manipulation algébrique d'une équation différentielle qui illustre le système [7]. Il représente le rapport entre la sortie du système dynamique et son entrée dans le domaine de Laplace avec les conditions initiales nulles [7]

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

La théorie du contrôle est une branche plus large dans les domaines des mathématiques et de l'ingénierie, parmi sous outils, on peut trouver l'énergie de la réponse impulsionnelle, connue sous le nom de norme  $\mathcal{H}_2$ , qui joue un rôle important dans la théorie des systèmes dynamiques. La norme  $\mathcal{H}_2$  apparaît souvent dans la théorie du contrôle et

peut être utilisée pour mesurer la précision d'une approximation rationnelle d'une fonction de transfert et vice versa [1, 37, 38]. Elle est définie pour une fonction de transfert stable, causale et propre et peut être calculé par

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)G^*(j\omega) d\omega,$$

où  $G^*$  est la fonction transposée de la fonction  $G$ .

Dans ce travail, nous avons illustré l'application de la fonction de transfert d'ordre fractionnaire à l'objectif de calculer l'énergie de la réponse impulsionnelle, sous certaines conditions par une méthode approchée qui est basée sur la représentation en espace d'état, des matrices de transformation, et des transformations intégrales. Ce mémoire suit la structure suivante :

**Le premier chapitre :** est consacré à la présentation des notions de base du calcul fractionnaire, Dans ce chapitre, la première section présente les bases du calcul fractionnaire, suivi par, les transformations intégrales, notamment les transformations de Laplace et de Mellin. Enfin, quelques notions de complément de Schur sont présentées.

**Le deuxième chapitre :** ce chapitre contient deux sections. La première section, présente les outils de bases de contrôle théorie, notamment les systèmes dynamiques, la fonction de transfert et la norme  $\mathcal{H}_2$ . La deuxième section est consacré à la présentation d'une méthode approchée pour calculer la norme  $\mathcal{H}_2$  pour une fonction de transfert d'ordre fractionnaire.

**le troisième chapitre :** le dernier chapitre présente deux d'exemples numériques pour montrer l'efficacité de la méthode.

# Chapitre 1

## Outils Fonctionnels

### 1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'introduire les outils nécessaires qui seront utilisés dans le reste du travail. Dans la première section, nous exposons les concepts de base du calcul fractionnaire telles que les fonctions d'Euler, les intégrales d'ordre fractionnaires et les dérivées d'ordre fractionnaires. La deuxième partie de ce chapitre, contient les définitions et quelques théorèmes et propriétés sur les deux transformations intégrales transformé de Laplace et transformé de Mellin.

### 2 Calcul fractionnaire

Depuis plus de trois siècles, le calcul fractionnaire a suscité l'intérêt de nombreux mathématiciens renommés tels que *Riemann*, *Liouville* et *Caputo* [32, 3]. Il s'agit d'une théorie portant sur les intégrales et dérivées d'ordre réel ou complexe arbitraire. Actuellement, divers domaines tels que la mécanique, l'électrotechnique, la physique et d'autres encore font usage du calcul fractionnaire [3, 19, 33, 40]. Toutefois, ces dernières années, l'application du calcul fractionnaire en biomédecine et biologie a été observée, comme le soulignent *Ionescu et al* [17]. Par ailleurs, la théorie du contrôle des systèmes dynamiques évoque l'apparition de la dérivée fractionnaire lorsque le système contrôlé et le contrôleur sont représentés par une équation différentielle fractionnaire [3]. (Nous allons donner quelques exemples dans la section consacrée au système dynamique). Il convient de noter que le calcul fractionnaire peut être considéré comme généralisation de l'intégration et de la différenciation aux valeurs non entières, grâce à l'opérateur  $\mathbf{D}_{a,t}^\alpha$ , où  $a$  et  $t$  représentent les bornes de l'opération et  $\alpha \in \mathbb{R}$  correspond à l'ordre fractionnaire et il est défini comme [3] :

$$\mathbf{D}_{a,t}^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0, \\ 1 & \alpha = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^\alpha & \alpha < 0, \end{cases}$$

Dans cette première section du chapitre 01, nous présenterons les outils les plus fréquemment utilisés dans le calcul fractionnaire.

Pour commencer, rappelons les deux fonctions les plus importantes en calcul fractionnaire : la fonction Gamma et la fonction Bêta, toutes deux introduites par le mathématicien suisse *Leonhard Euler* au 18e siècle.

## 2.1 Fonctions d'Euler

### Fonction Gamma

**Définition 1.1** [19] la fonction Gamma d'Euler, notée par  $\Gamma$  est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (1.1)$$

avec  $x \in \mathbb{C}$  et  $\text{Re}(x) > 0$ .

**Exemple 1.1** D'après la définition (1.1) et pour  $x = \frac{1}{2}$ , on trouve

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

En posant,  $y = \sqrt{t} \Rightarrow y^2 = t$  et  $dt = 2y dy$  avec  $\begin{cases} t=0 & \Rightarrow y=0, \\ t=\infty & \Rightarrow y=\infty. \end{cases}$

Ainsi,

$$\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

Grâce à l'intégrale de Gauss [13], on détermine la valeur de  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ ,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

**Propriétés 1.1** [19] La fonction Gamma possède plusieurs propriétés, dont les deux plus importantes sont les suivantes :

- La fonction Gamma est vérifié la relation récurrence :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \forall x \in \mathbb{C} \text{ tel que } \text{Re}(x) > 0 \quad (1.2)$$

- La fonction Gamma est une généralisation de la fonction factorielle, et cela signifie :

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

**Exemple 1.2** D'après l'égalité (1.2) et pour  $x = \frac{3}{2}$ , on a

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

### Fonction Bêta

**Définition 1.2** [19] La fonction Bêta est définie pour tous les nombres complexes  $a$  et  $b$  par :

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad \Re(a) > 0, \Re(b) > 0.$$

### Relation entre la fonction Bêta et la fonction Gamma

La fonction Bêta peut être définie en fonction de la fonction Gamma, et cette relation est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 1.1** [19] *Pour tous  $a, b \in \mathbb{C}$ ,*

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \Re(a) > 0, \Re(b) > 0.$$

**Remarque 1.1** [19] *La fonction Bêta est symétrique :*

$$B(a, b) = B(b, a).$$

## 2.2 Intégrale d'ordre fractionnaire

L'intégrale fractionnaire est l'un des outils fondamental du calcul fractionnaire. Dans cette partie, nous présenterons. Il existe plus d'une définition d'une intégrale fractionnaire, y compris celle proposée par Riemann-Liouville et l'autre selon Weyl [29]. Dans ce qui suit, nous décrirons celle développées par *Bernard Riemann* et *Joseph Liouville*, appelées intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

**Définition 1.3** [20, 32] *Soit  $f \in L_1[a, b]$ .*

– *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  est définie par :*

$$\mathbf{D}_{a^+, t}^{-\alpha} = \mathbf{I}_{a^+, t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau, t > a,$$

– *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  est définie par :*

$$\mathbf{D}_{t, b^-}^{-\alpha} = \mathbf{I}_{t, b^-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha+1}} d\tau, t < b,$$

Passons au calcul de l'intégrale fractionnaire Riemann-Liouville d'une des fonctions élémentaire comme illustré dans l'exemple suivant.

**Exemple 1.3** *Soit la fonction  $t \mapsto t^\mu$ , avec  $t > 0, \mu > -1$  et  $\alpha < 0$ .*

$$\mathbf{I}_{0, t}^{\alpha} t^\mu = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha-1} \tau^\mu d\tau. \quad (1.3)$$

*Pour évaluer l'intégrale (1.3), on passe par le changement de variable.*

$$\text{On pose } \tau = ty \Rightarrow d\tau = t dy, \text{ et } \begin{cases} \tau = 0 & \Rightarrow y = 0, \\ \tau = t & \Rightarrow y = 1. \end{cases}$$

Alors l'intégrale (1.3) devient :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{0,t}^{\alpha} t^{\mu} &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 (t-ty)^{-\alpha-1} (ty)^{\mu} t dy, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 t^{-\alpha-1} (1-y)^{-\alpha-1} t^{\mu} y^{\mu} t dy, \\
 &= \frac{t^{-\alpha+\mu}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{-\alpha-1} y^{\mu} dy, \\
 &= \frac{t^{-\alpha+\mu}}{\Gamma(-\alpha)} \mathbf{B}(-\alpha, \mu+1), \\
 &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(-\alpha+\mu+1)} t^{-\alpha+\mu}.
 \end{aligned}$$

En particulier, si  $\mu = 0$ , l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante  $K$  d'ordre  $\alpha < 0$  est :

$$\mathbf{I}_{0,t}^{\alpha} K = \frac{K}{\Gamma(-\alpha+1)} t^{-\alpha}.$$

Comme on le sait, l'intégration est l'inverse de la dérivation. Dans le cadre du calcul fractionnaire, il existe diverses définitions de la dérivée fractionnaire. Les définitions les plus couramment utilisées sont la définition de Riemann-Liouville et celle de Caputo. Nous allons présenter dans la suite, les deux définitions et la relation entre eux.

### 2.3 Dérivées d'ordre fractionnaires

Commençons par la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, cette dernière a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées fractionnaires et intégrales et de ses applications en mathématiques pures.

#### Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

**Définition 1.4** [20, 32, 34] Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , et  $n-1 \leq \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  de la fonction continue  $f$  est définie par :

$${}_{\text{RL}}\mathbf{D}_{0,t}^{\alpha} f(t) = \left( \frac{d^n}{dt^n} \circ \mathbf{I}_{0,t}^{n-\alpha} f \right) (t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0 \quad (1.4)$$

**Remarque 1.2** D'après la définition (1.4)

– Pour  $\alpha = 0$ , on trouve

$${}_{\text{RL}}\mathbf{D}_{0,t}^0 f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{d^0}{dt^0} f(t) = f(t).$$

– Pour  $\alpha = 1$ , on obtient

$${}_{\text{RL}}\mathbf{D}_{0,t}^1 f(t) = \frac{1}{\Gamma(2)} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t).$$

**Exemple 1.4** On considère la fonction constante  $f(t) = K$ ,  $K \in \mathbb{R}^*$ . Utilisons (1.4) pour calculer la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction constante d'ordre  $\alpha$ , avec  $n - 1 \leq \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} {}_{\text{RL}}\mathbf{D}_{0,t}^{\alpha}K &= \frac{1}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} K d\tau, \quad t > 0, \\ &= \frac{K}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} t^{n-\alpha}. \end{aligned}$$

En dérivant  $n$  fois la fonction  $t \mapsto t^{n-\alpha}$ , on obtient,

$${}_{\text{RL}}\mathbf{D}_{0,t}^{\alpha}K = \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}.$$

En générale, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  n'est pas nulle, et c'est l'un des inconvénients du dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, pour remédier à cet inconvénient, Caputo a proposé une nouvelle définition au 20ème siècle[4].

Dans l'utilisation de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo pour la résolution des équations différentielles, il n'est pas nécessaire de spécifier les conditions initiales d'ordre fractionnaire car elles ont la même forme que les équations différentielles en ordre complet. Pour ces raisons, la définition de Caputo décrite ci-dessous sera utilisée tout au long de ce mémoire.

### Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

**Définition 1.5** [20, 32, 34] La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre  $\alpha$ , tel que  $n - 1 \leq \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  de la fonction  $f$  continue est donnée par :

$${}_C\mathbf{D}_{0,t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad (1.5)$$

avec,  $f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$ .

**Remarque 1.3** La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo d'ordre  $\alpha$  est nulle.

### Relation entre la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Dans les conditions initiales homogènes, les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo sont équivalents, et cela signifie que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo peut être exprimée en fonction de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville [32], comme décrit ci-dessous :

$${}_{\text{RL}}\mathbf{D}_{0,t}^{\alpha}f(t) = {}_C\mathbf{D}_{0,t}^{\alpha}f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0).$$

### 3 Transformations intégrales

La transformation intégrale est un outil mathématique qui est utilisé dans divers domaines tels que la physique, l'ingénierie et le traitement de signal pour simplifier des problèmes complexes [6, 35]. De plus, la transformation intégrale est une opération linéaire qui transforme une fonction d'une variable en une autre variable via l'intégrale suivante [10, 6, 21] :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}[f(t)](s) &= F(s), \\ &= \int_a^b f(t)K(t, s)dt,\end{aligned}$$

où  $K(t, s)$  est appelé le noyau de la transformation.

Il existe plusieurs types de transformées, elles sont définies par le choix de différents noyaux  $K(s, t)$  et les différentes valeurs de  $a$  et  $b$ , par exemple si l'on considère  $K(s, t) = e^{-st}$  et  $a = 0, b = \infty$ , on obtien alors la transformée de Laplace [10]. Si en revanche  $K(s, t) = t^{s-1}$  et  $a = 0, b = \infty$ , on se retrouve dans le cas de la transformée de Mellin [10].

Dans cette deuxième partie du chapitre, nous allons présenter deux transformations utiles pour notre travail, notamment celles de Laplace et de Mellin.

#### 3.1 Transformation de Laplace

La transformée de Laplace est une technique mathématique qui a été introduite par *Peirre-Simon Laplace* en 1812 et notée par  $\mathcal{L}(\cdot)$ . Elle est une transformation intégrale qui transforme une fonction du domaine temporel en une fonction du domaine fréquentiel complexe, selon la définition suivante.

**Définition 1.6** [6] *Soit  $f$  est une fonction causale. La transformée de Laplace de la fonction  $f$  de la variable  $t$  est la fonction  $F$  de la variable  $s$  donner par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) &= F(s), \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt.\end{aligned}\tag{1.6}$$

#### Continuité par morceaux

**Définition 1.7** [6] *Une fonction causale est dite continue par morceaux sur un intervalle  $\alpha \leq t \leq \beta$  dans  $\mathbb{R}_+$ , si est seulement si elle est continue en tout point de  $[\alpha, \beta]$  sauf en un nombre fini de points.*

#### Fonctions d'ordre exponentiel

**Définition 1.8** [6] *La fonction  $f$  est dite d'ordre exponentiel d'ordre  $a$ , s'il existe une constante  $M > 0$ , tel que pour un certain  $T \leq 0$  on a,*

$$|f(t)| \leq M e^{at}, \quad t \leq T$$

**Exemple 1.5** *Puisque  $|t^2| < e^{3t}$ ,  $t < 0$ , alors, il existe la constante  $M = 1$  et donc la fonction  $t \mapsto t^2$  est d'ordre exponentiel 3.*

### Condition suffisante d'existence de la transformée de Laplace

**Theorem 1.1** [6] Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  et elle est d'ordre exponentiel d'ordre  $a$ , alors la transformée de Laplace  $\mathcal{L}[f(t)]$  existe pour tout  $\Re(s) > a$ .

**Exemple 1.6** La transformée de Laplace de la fonction  $f(t) = 1, t > 0$  est donnée par

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt, \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} dt, \\ &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

**Exemple 1.7** La transformée de Laplace de la fonction  $f(t) = t^a, a \in \mathbb{R}$  et  $a > -1$  est

$$\mathcal{L}\{t^a\} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

Dans la suite, nous présenterons quelques propriétés de base de la transformée de Laplace. On considère les deux fonctions causales  $f$  et  $g$  sur  $\mathbb{R}_+$ , et on suppose que  $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$  et  $\mathcal{L}[g(t)](s) = G(s)$  [6, 19, 33].

### Propriétés

#### P. 1. Propriété de linéarité

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)](s) = \alpha F(s) + \beta G(s), \quad (1.7)$$

avec,  $\alpha$  et  $\beta$  deux constantes réelles ou complexes.

#### P. 2. Propriété de convolution

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s)\mathcal{L}[g(t)](s), \quad (1.8)$$

tel que  $*$  désigne le produit de convolution défini par

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

#### P. 3. Transformée de Laplace d'une intégrale

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](s) = \frac{F(s)}{s}.$$

#### P. 4. Transformée de Laplace d'une dérivée

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0), \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \end{aligned}$$

**P.5. Intégrale de la transformée de Laplace**

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty F(s) ds.$$

**P.6. Dérivée de la transformée de Laplace**

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad n \in \mathbb{N}.$$

**P.7. Transformée de Laplace d'une intégrale d'ordre fractionnaire**

$$\mathcal{L}[\mathcal{I}^\alpha f(t)](s) = \frac{F(s)}{s^\alpha}.$$

**P.8. Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo**

$$\mathcal{L}[_C D_{0,t}^\alpha f(t)](s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^N s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0^+), \quad n-1 \leq \alpha n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

L'application de la transformée de Laplace à divers problèmes physiques, électriques, etc. nécessite l'utilisation de la transformée inverse.

**Transformation de Laplace inverse**

**Définition 1.9** [6, 32] Soit  $f$  une fonction de la variable  $t$  et  $F$  sa transformée de Laplace, alors  $f$  est dite transformée de Laplace inverse de la fonction  $F$  qui notée par  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$  est définie comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)](s) &= f(t), \\ &= \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad c = \Re(s) > c_0. \end{aligned}$$

avec  $c_0$  se situe dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (1.6).

**Exemple 1.8** Trouvons  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{s^2 + 2s + 17}\right\}$

Nous procédons comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{5s}{s^2 + 2s + 17} &= \frac{5s}{(s+1)^2 + 16}, \\ &= 5 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 16} - \frac{5}{4} \times \frac{4}{(s+1)^2 + 16}. \end{aligned}$$

Rappelant que  $\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$  [21], tel que  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$  et on sait que,

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2} [10].$$

Alors, on obtient

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{s^2 + 2s + 17}\right\} = 5e^{-t} \cos(4t) - \frac{5}{4} e^{-t} \sin(4t).$$

### Transformation de Mellin

La transformée de Mellin est une transformation intégrale qui a été introduite par le mathématicien finlandais *Robert Hjalmar Mellin*. La première mention de la transformée de Mellin a été trouvée dans un mémoire de *Riemann* où il l'a utilisée pour étudier la célèbre fonction Zêta [9]. La transformée de Mellin est utilisée dans divers problèmes mathématiques pures et appliquées, en particulier dans la théorie des équations différentielles et intégrales, et théorie des séries de Dirichlet.

**Définition 1.10** [33, 16] *Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ . La transformée de Mellin  $F$  de la fonction  $f$  notée  $\mathcal{M}\{f(t)\}(s)$ , est définie par l'intégrale suivante :*

$$F(s) = \mathcal{M}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx, \quad (1.9)$$

avec  $s \in \mathbb{C}$ . L'intégrale (1.9) converge pour des valeurs de  $s$  qui se trouvent à l'intérieur d'une bande définie par deux parallèles à l'axe des imaginaire, i.e.,  $\mu_1 < \Re(s) < \mu_2$ .

**Theorem 1.2** [33] *Si la fonction  $f$  est continue par morceaux sur tout intervalle fermé  $[a, b] \cup \mathbb{R}^+$  alors la transformée de Mellin  $\mathcal{M}\{f(t)\}(s)$  existe et*

$$\int_0^1 |f(x)| x^{\mu_1-1} dx < \infty, \quad \int_1^{\infty} |f(x)| x^{\mu_2-1} dx < \infty.$$

**Exemple 1.9** *La transformée de Mellin de la fonction  $x \mapsto e^{-ax}$ ,  $a > 0$  est*

$$\mathcal{M}[(f(x))](s) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} x^{s-1} dx. \quad (1.10)$$

En passant par le changement de variable, tel que, on suppose que  $ax = t$ , alors l'intégrale (1.10) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[(f(t))](s) &= \frac{1}{a^s} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \\ &= a^{-s} \Gamma(s). \end{aligned}$$

où  $\Gamma$  est la fonction de Gamma.

$$\mathcal{M}[(f(t))] = \lambda^{-s} \Gamma(s).$$

**Exemple 1.10** *Soit la fonction*

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

La transformée de Mellin de la fonction  $f$  est calculée comme suit

$$\mathcal{M}[f(x)](s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{dx}{(1+x)^n}, \quad (1.11)$$

Effectuons le changement de variable  $x = \frac{t}{1-t}$ , on a alors  $dx = \frac{1}{(1-t)^2} dt$ . Ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f(t)](s) &= \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{n-s-1} dt, \\ &= \frac{\Gamma(s) \Gamma(n-s)}{\Gamma(n)}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

avec  $0 < \Re(s) < n$ .

D'après [10], l'expression (1.12) devint

$$\mathcal{M}\left[\frac{1}{(1+x)^n}\right](s) = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \binom{s-1}{n-1}$$

### Transformation inverse de Mellin

**Définition 1.11** [33] La transformée de Mellin inverse de la fonction  $F$ , notée  $\mathcal{M}^{-\infty}[F]$ , est définie par

$$\mathcal{M}^{-1}[F(s)](x) = f(x) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\mu-j\infty}^{\mu+j\infty} x^{-s} F(s) ds, \quad \mu_1 < \mu < \mu_2.$$

## 4 Complément de Schur

Cette section présente quelques détails du complément de Schur, qui est important en algèbre linéaire et théorie des matrices.

**Définition 1.12** [43] Soit  $M$  une matrice bloc de dimension  $(p+q) \times (p+q)$

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

où les blocs  $A, B, C$  et  $D$  sont des matrices de dimensions respectives  $p \times p, p \times q, q \times p$  et  $q \times q$ , avec  $\det(A) \neq 0$ . Le complément de Schur du bloc  $A$  de la matrice  $M$  est constitué par la matrice de dimension  $p \times p$

$$(M/A) = D - CA^{-1}B. \quad (1.14)$$

**Corollaire 1.1** [43] Le déterminant de la matrice  $M$  peut être calculé comme un produit du déterminant de la matrice  $A$  et du déterminant du complément de Schur  $(M/A)$

$$\det(M) = \det(A) \times \det(M/A)$$

**Theorem 1.3** [43] Soit  $M, A$  et  $E$  des matrices carrées non singulières, tel que

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$

Alors,  $A/E$  est sous-matrice non singulière de la matrice  $M/E$  et

$$M/A = (M/E) / (A/E).$$

### 4.1 Application du complément de Schur à la résolution système d'équations linéaire

Soit le système d'équations linéaire

$$\begin{cases} Ax + By = a, \\ Cx + Dy = b, \end{cases} \quad (1.15)$$

où  $x, a \in \mathbb{R}^p$ ,  $y, b \in \mathbb{R}^q$ , et  $A, B, C, D$  sont des matrices blocs de dimensions  $p \times p, p \times q, q \times p$  et  $q \times q$  respectivement, avec la matrice  $A$  est inversible.

En multipliant la première équation par  $CA^{-1}$ , puis en la soustrayant de la seconde, on trouve

$$y = (D - CA^{-1}B)^{-1} (b - CA^{-1}a)$$

En remplaçant la valeur de  $y$  dans la première équation, on obtient

$$x = A^{-1} \left( a - B(D - CA^{-1}B)^{-1} (b - CA^{-1}a) \right)$$

## 5 Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en lumière les outils les plus importants utilisés dans ce mémoire. Quelques concepts du calcul fractionnaire qui fournit un excellent instrument pour la modélisation et la description des propriétés de divers matériaux ont été présentés dans la première partie du chapitre. Dans la deuxième partie du chapitre, nous avons introduit deux transformations intégrales les plus importants pour notre travail qui sont la transformée de Laplace et la transformée de Mellin. Nous avons conclu ce chapitre en définissant et en présentant certaines propriétés du complément de Schur.

La fonction de transfert va être utilisé dans le cadre de ce mémoire pour calculer l'énergie de la réponse impulsionnelle d'un système fractionnaire. Cette utilisation est illustré dans le chapitre suivant.

# Chapitre 2

## Norme $\mathcal{H}_2$ Pour La Fonction du Transfert D'ordre Fractionnaire

### 1 Introduction

Différentes méthodes ont été proposées pour évaluer la norme  $\mathcal{H}_2$  pour la fonction de transfert d'ordre fractionnaire [1, 22, 27, 38], à travers ce deuxième chapitre, nous allons présenter la méthode proposée par *Lakeb et al.* Ce chapitre est divisé en deux sections. La première section introduit les fondamentaux des outils de base de la théorie du contrôle, tandis que la seconde se focalise sur la méthode proposée par *Lakeb et al* pour calculer la norme  $\mathcal{H}_2$ .

### 2 Outils de base en théorie du contrôle

L'objectif de cette partie est de rappeler quelques outils de base en théorie du contrôle. Nous commencerons par présenter les systèmes dynamiques, et en particulier, les systèmes dynamiques fractionnaires. Ensuite, nous présenterons la fonction de transfert, qui est utile pour l'étude de systèmes dynamiques LTI. Enfin, des détails sur l'énergie de la norme  $\mathcal{H}_2$ , également connue sous le nom l'énergie de la réponse impulsionnelle.

#### 2.1 Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un modèle mathématique, qui utilisé pour la modélisation, le contrôle et l'analyse d'une grande variété de système et de phénomènes [26]. Les systèmes dynamiques sont utilisés principalement dans l'étude du processus temporel, ils sont présenté sous forme de schéma suivant



FIGURE 2.1 – Système dynamique

Les systèmes dynamiques sont généralement décrits par des équations aux dérivés partielles ou des équations différentielles [23].

**Exemple 2.1** [1] *Considérons un oscillateur amorti forcé qui présenté par l'équation différentielle du seconde d'ordre*

$$\ddot{y}(t) + 2m\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = K\omega_0^2 u(t). \quad (2.1)$$

où  $\omega_0$  est la pulsation propre de l'oscillateur,  $m$  est le coefficient d'amortissement,  $K$  est un coefficient de la force,  $\ddot{y}$  représente l'accélération de l'oscillateur,  $\dot{y}$  représente l'amortissement et  $y$  représente la position de l'oscillateur.

Dans un contexte général, le concept de systèmes dynamiques inclut une loi de l'évolution de l'état dans le temps et un ensemble de ses états possibles, cet ensemble est connu sous le nom d'espace d'état du système [39], ses coordonnées sont des variables d'état.

### Représentation d'état d'un système dynamique LTI continue

**Définition 2.1** [12, 24] *La représentation d'état d'un système dynamique continue est un modèle mathématique qui donnée par*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^q$  est un vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  est un vecteur de sortie,  $A(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est une matrice d'état,  $B(t) \in \mathbb{R}^{m \times q}$  est une matrice de commande,  $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$  est une matrice d'observation et  $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times q}$  est une matrice de transmission directe, la première équation est connue sous le nom d'équation d'état, tandis que la deuxième est appelée l'équation de sortie ou d'observation.

**Remarque 2.1** *Le système (2.2) est un système MIMO pour multiples-entrées, multiples-sorties, si  $p = q = 1$ , alors, le système (2.2) devient un système SISO à mono-entrée, mono-sortie. Si le système (2.2) a une seule entrée et multiple sorties, alors, il est appelé SIMO. Le système (2.2) est MISO, s'il a un multiple entrées et une seule sortie.*

**Remarque 2.2** *Si  $A, B, C$  et  $D$  sont des matrices constantes, alors, le système (2.2) est appelé un système dynamique LTI (Linéaire invariant dans le temps) continu.*

Comme mentionné précédemment, un système dynamique continu peut être présenté par une équation différentielle ou en présentation d'état. L'exemple suivant montrera comment nous passons d'une équation différentielle à une représentation d'état.

**Exemple 2.2** *Dans l'exemple d'un oscillateur amorti forcé. Afin de passer d'une équation différentielle à la représentation d'état, nous introduisons les deux variables  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  tel que*

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t), \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

*Au moyen de deux composantes  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ , l'équation (2.1), devient*

$$\ddot{x}_2(t) + 2m\omega_0\dot{x}_2(t) + \omega_0^2x_1(t) = K\omega_0^2u(t). \quad (2.4)$$

*La deuxième équation de (2.3) et l'équation (2.4) forment un système de deux équations différentielles du premier ordre, équivalent à l'équation différentielle (2.1) du second ordre*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -2m\omega_0x_2(t) - \omega_0^2x_1(t) + K\omega_0^2u(t). \end{cases} \quad (2.5)$$

Le système d'équation (2.5) peut être écrit sous la forme matricielle

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (2.6)$$

où les deux composantes  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont des variables d'état, l'équation (2.6) est appelé l'équation d'état, avec,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2m\omega_0 \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ K\omega_0^2 \end{bmatrix}.$$

Il est nécessaire de suivre l'évolution de l'oscillateur amorti forcé. Cela se fait à travers l'équation d'observation (équation de sortie) que nous extrayons de la première équation de (2.3) :

$$y(t) = Cx(t),$$

avec,

$$C = [1 \quad 0].$$

**Définition 2.2** [31] Un système dynamique est causal si la sortie  $y(t)$  à l'instant  $t_0$  ne dépend que des valeurs de son entrée pour  $t \leq t_0$ .

**Définition 2.3** [31] Un système dynamique est strictement propre si la matrice de transmission directe est nulle.

Ces dernières années, le comportement de systèmes réels dans divers domaines de la science et de l'ingénierie, y compris la biologie, la viscosité élastique, l'électrochimie et bien d'autre, a été modélisé par des équations différentielles fractionnaire [15, 30, 38].

## 2.2 Système dynamique LTI d'ordre fractionnaire

Les équations suivantes décrivent la représentation d'état d'un système dynamique LTI d'ordre fractionnaire à temps continu [18]

$$\begin{cases} {}_C\mathbf{D}_{0,t}^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $x \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur de commande ou vecteur d'entrée,  $y \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur de sortie,  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est la matrice d'état,  $B \in \mathbb{R}^{m \times q}$  est la matrice de commande,  $C \in \mathbb{R}^{p \times m}$  est la matrice d'observation et  $D \in \mathbb{R}^{p \times q}$  est la matrice de transmission directe, avec,  ${}_C\mathbf{D}_{0,t}^\alpha$  est la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de Caputo, tel que  $n - 1 \leq \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exemple 2.3** [15] Gomez et al ont présenté un système fractionnaire pour une électrode polarisable décrite par un circuit électrique

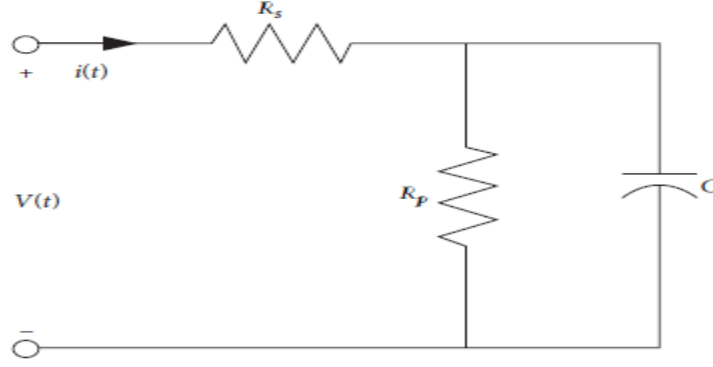


FIGURE 2.2 – Equivalent electrical circuit for the polarizable electrode model.

avec,  $v$  est la tension,  $i$  est le courant,  $R_s$  est la résistance en série,  $R_p$  est la résistance en parallèle et  $C$  est la capacité d'un condensateur.

D'après les deux lois Kirchhoff, la loi des mailles et la loi des nœuds, la tension  $v$  et le courant  $i$  sont données par deux relations

$$\begin{cases} v(t) = R_s i(t) + v_C(t), \\ i(t) = i_R(t) + i_C(t), \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $v_C$  est la tension aux bornes du condensateur.

En substituant les deux relations

La relation entre le courant aux bornes de la résistance (série ou parallèle) et la tension aux bornes du condensateur est donnée par les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} i_R(t) &= \frac{v_C(t)}{R_p}, \\ i_C(t) &= C \frac{dv_C}{dt}, \end{aligned}$$

où  $\frac{d}{dt}$  représente l'opérateur de dérivation par rapport au temps.

En substituant les deux relations dans le système (2.8), nous obtenons

$$\begin{cases} v(t) = R_s i(t) + v_C(t), \\ i(t) = \frac{v_C(t)}{R_p} + C \frac{dv_C}{dt}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Gomez et al ont introduits un paramètre auxiliaire pour passer de la dérivée classique à la dérivée fractionnaire

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{\mu^{1-\alpha}} \mathbf{D}^\alpha, \quad n-1 \leq \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors, le système (2.9), devient

$$\begin{cases} v(t) = R_s i(t) + v_C(t), \\ i(t) = \frac{v_C(t)}{R_p} + \frac{C}{\mu^{1-\alpha}} \mathbf{D}^\alpha v_C(t). \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{D}^\alpha v_C(t) = -\frac{\mu^{1-\alpha}}{CR_p} v_C(t) + \frac{\mu^{1-\alpha}}{C} i(t), \\ v(t) = v_C(t) + R_s i(t). \end{cases}$$

**Définition 2.4** [19] *Le système dynamique (2.7) est dit régulière si et seulement si*

$$\det(s^\alpha \mathbf{I}_d - A) \neq 0, \quad s \in \mathbb{C}.$$

En théorie du contrôle, les systèmes dynamiques peuvent être décrits et représentés de différentes manières. Parmi eux, on trouve l'équation différentielle et la représentation d'état comme indiqué précédemment. Une autre façon consiste à représenter par une fonction de transfert, qui sera expliquée et détaillée dans la partie qui suit.

### 2.3 Fonction de transfert

La fonction de transfert est une relation entre l'entrée et la sortie d'un système dynamique linéaire. En mathématiques, la fonction de transfert est une fonction de variable complexe, qui est le rapport de transformation de Laplace de sortie et d'entrée. La forme générale de la fonction de transfert est écrite sous la forme suivante [2]

$$G(s) = K \frac{H(s)}{s^\alpha (1 + a_1 s + \dots + a_n s^n)},$$

où  $K$  est le gain,  $\alpha$  est la classe du système, et  $H(0) = 1$ .

#### Fonction de transfert d'une équation différentielle

Considérons l'équation différentielle d'ordre  $n$

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u. \quad (2.10)$$

avec,  $u$  est l'entrée,  $y$  est la sortie et  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

Nous appliquons la transformée de Laplace à l'équation (2.10), on trouve

$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \dots + a_n Y(s) = b_0 s^m U(s) + b_1 s^{m-1} U(s) + \dots + b_m U(s), \quad s \in \mathbb{C}.$$

D'après la définition de la fonction de transfert, qui noté  $G$ , nous obtenons sa formule

$$\begin{aligned} G(s) &= Y(s)U(s), \\ &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \end{aligned}$$

**Exemple 2.4** *Nous revenons à l'équation différentielle d'un oscillateur amorti forcé. La fonction de transfert  $G$  de l'équation différentielle (2.1) est donnée par*

$$G(s) = \frac{K w_0^2}{s^2 + 2m w_0 s + w_0}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

#### Fonction de transfert d'une représentation d'état

Soit le système fractionnaire régulier LTI continu

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{cases} \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{D}^\alpha$  est la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo, et  $n - 1 \leq \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

La transformée de Laplace appliquée au système (2.11) donne

$$s^\alpha X(s) = AX(s) + BU(s), \quad (2.12)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s). \quad (2.13)$$

où  $s \in \mathbb{C}$ . L'équation (2.12) est équivalente à :

$$X(s) = (s^\alpha \mathbf{I}_n - A)^{-1} BU(s). \quad (2.14)$$

En remplaçant l'équation (2.14) dans l'équation (2.13), on obtient

$$Y(s) = C \left( (s^\alpha \mathbf{I}_n - A)^{-1} B + D \right) U(s).$$

La fonction de transfert  $G$  du système peut être déduite en se basant sur cette dernière équation

$$G(s) = C \left( (s^\alpha \mathbf{I}_n - A)^{-1} B + D \right).$$

**Exemple 2.5** *La représentation d'état d'un électrode polarisable [15]*

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha v_C(t) = -\frac{\mu^{1-\alpha}}{CR_p} v_C(t) + \frac{\mu^{1-\alpha}}{C} i(t), \\ v(t) = v_C(t) + R_s i(t). \end{cases} \quad (2.15)$$

La fonction de transfert associée au système (2.15) est donnée par

$$G(s) = R_s + \frac{\mu^{1-\alpha} R_p}{\mu^{1-\alpha} + R_p C s^\alpha}.$$

**Définition 2.5** [3] *Une fonction de transfert est dite commensurable si les exposants de la variable complexe  $s$  dans le numérateur et le dénominateur sont des multiples entiers d'un même nombre.*

**Theorem 2.1** [3, 28] *Une fonction de transfert commensurable d'ordre fractionnaire*

$$G(s) = \frac{Y(s^\alpha)}{U(s^\alpha)} \text{ est BIBO stable si}$$

$$0 < \alpha < 2,$$

et pour tout  $s \in \mathbb{C}$  telle que  $|\arg(s)| > \alpha \frac{\pi}{2}$

La norme  $\mathcal{H}_2$ , également connue sous le nom de l'énergie de la réponse impulsionnelle joue un rôle important dans le domaine des systèmes dynamiques et contrôle. Elle peut être utilisée pour mesurer la précision de l'approximation rationnelle d'une fonction de transfert d'ordre fractionnaire. Dans ce qui suit, nous donnerons les définitions de la norme  $\mathcal{H}_2$  des fonctions de transfert.

## 2.4 Norme $\mathcal{H}_2$ d'une fonction de transfert

**Définition 2.6** [38] La norme  $\mathcal{H}_2$  de la fonction de transfert  $G$  à multiple-entrée, multiple-sortie, notée  $\|G\|_{\mathcal{H}_2}$ , est donnée par

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)G^*(j\omega) d\omega,$$

**Définition 2.7** [38] La norme  $\mathcal{H}_2$  de la fonction de transfert  $G$  à mono-entrée, mono-sortie, est donnée par

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega,$$

**Remarque 2.3** [38] Pour  $G(-j\omega) = G(j\omega)$ , nous obtenons

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} G(j\omega)G^*(j\omega) d\omega,$$

## 3 Norme $\mathcal{H}_2$ pour une fonction de transfert d'ordre fractionnaire

Dans cette section, nous présenterons une méthode approcher pour calculer la norme  $\mathcal{H}_2$  pour une fonction de transfert d'ordre fractionnaire [22]. Cependant, nous allons commencer par rappeler quelques préliminaires.

### 3.1 Préliminaires

Considérons le système dynamique LTI d'ordre fractionnaire régulière, continue et propre

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) = ax(t) + bu(t), \\ y(t) = cx(t), \end{cases} \quad (2.16)$$

où  $x, u, y \in \mathbb{R}^*$  sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie et  $a \in \mathbb{R}_-^*$  and  $b, c \in \mathbb{R}^*$  avec les conditions initiales sont nulles, et  $\mathbf{D}^\alpha$ , tel que  $n - 1 \leq \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , est la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de Caputo[5]

$$\mathbf{D}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma[n - \alpha]} \int_0^t \frac{x^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad x^{(n)}(\tau) = \frac{d^n x(\tau)}{d\tau^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

En appliquant la transformée de Laplace au système (2.16), nous obtenons la fonction de transfert  $G$  d'ordre fractionnaire est écrite comme

$$\forall s \in \mathbb{C} : Y(s) = c(s^\alpha - a)^{-1} b U(s).$$

Cependant,

$$\forall s \in \mathbb{C} : Y(s) = G(s) U(s),$$

alors, la fonction de transfert d'ordre fractionnaire associée au système (2.16) est donnée par

$$\forall s \in \mathbb{C} : G(s) = c(s^\alpha - a)^{-1} b.$$

La fonction de transfert  $G$  est le complément de Schur de la matrice  $S_G(s)$  comme suit

$$S_G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} s - a & b \\ \hline -c & 0 \end{array} \right].$$

La fonction de transfert  $G$  est propre, donc son conjugué transposé est :

$$G^*(s) = b(-s - a)^{-1}c,$$

et elle est le complément de Schur de la matrice  $S_{G^*}(s)$

$$S_{G^*}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} -s - a & c \\ \hline -b & 0 \end{array} \right].$$

En utilisant une manipulation algébrique simple sur les deux matrices  $S_G$  et  $S_{G^*}$ , nous trouvons

$$S_\phi(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & -s - a & c \\ s - a & -b^2 & 0 \\ \hline -c & 0 & 0 \end{array} \right].$$

La matrice  $S_\phi$  est également connue sous le nom de matrice parahermitienne où sa fonction de transfert parahermitienne correspondante est

$$\phi(s) = c(s - a)^{-1}b^2(-s - a)^{-1}c. \quad (2.17)$$

La méthode approchée pour calculer la norme  $\mathcal{H}_2$  pour une fonction de transfert d'ordre fractionnaire qui est basée sur la représentation d'état d'un système dynamique fractionnaire, les matrices de transformation parahermitien et dérivée fractionnaire est présentée par le théorème suivant.

**Theorem 2.2** [22] *La norme  $\mathcal{H}_2$  d'une fonction de transfert d'ordre fractionnaire associée représentation en espace d'état  $\{a, b, c, \alpha\}$ , où  $a \in \mathbb{R}_-$ ,  $b, c \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ , avec,  $\alpha \neq 1$  et  $(s^\alpha - a) \neq 0$ ,  $s \in \mathbb{C}$  est*

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = -\frac{b^2 c^2 (-a)^{\frac{1}{\alpha}-2} \cot(\alpha \frac{\pi}{2})}{\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})}.$$

**Preuve.**

Considérons le système dynamique fractionnaire LTI continu, régulier et propre

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) = ax(t) + bu(t), \\ y(t) = cx(t), \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $x, u, y \in \mathbb{R}^*$  sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie et  $a \in \mathbb{R}_-$  et  $b, c \in \mathbb{R}^*$  avec une condition initiale nulle, et  $\mathbf{D}^\alpha$ , où  $n - 1 \leq \alpha < n$ , pour certains  $n \in \mathbb{N}^*$ , dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo. En appliquant la transformée de Laplace, alors, le système (2.18) devient, pour  $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} s^\alpha X(s) = aX(s) + bU(s), \\ Y(s) = cX(s), \end{cases} \quad (2.19)$$

De la première équation du système (2.19), nous concluons ce qui suit

$$X(s) = (s^\alpha - a)^{-1} bU(s),$$

En remplaçant cette dernière équation dans l'équation du sortie du système (2.19), nous trouvons

$$Y(s) = c(s^\alpha - a)^{-1} bU(s).$$

Alors, la fonction du transfert associée au système (2.18) est donnée par

$$\forall s \in \mathbb{C} : G(s) = c(s^\alpha - a)^{-1} b. \quad (2.20)$$

L'objectif principal de ce travail est présenté une approche alternative pour calculer la norme  $\mathcal{H}_2$  pour la fonction de transfert d'ordre fractionnaire (2.20), qui définit par [38]

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)G^*(j\omega) d\omega,$$

et comme la norme  $\mathcal{H}_2$  est défini dans le domaine fréquentiel, alors la fonction de transfert (2.20) se transforme à

$$\forall s \in \mathbb{C} : G(\tilde{\omega}) = c(j^\alpha \tilde{\omega} - a)^{-1} b. \quad (2.21)$$

où  $s = j\omega$ ,  $\tilde{\omega} = \omega^\alpha$ , avec  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$  et  $j^2 = -1$ , et la fonction  $G^*$  est la fonction transposée conjuguée de la fonction de transfert (2.21)

$$G^*(\tilde{\omega}) = b(\bar{j}^\alpha \tilde{\omega} - a)^{-1} c.$$

Nous définissons la fonction  $\phi$  qui est le produit entre les deux fonctions  $G$  et  $G^*$

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{\omega}) &= G(\tilde{\omega})G^*(\tilde{\omega}), \\ &= c(j^\alpha \tilde{\omega} - a)^{-1} b^2 (\bar{j}^\alpha \tilde{\omega} - a)^{-1} c, \end{aligned}$$

qui est aussi le complément de Schur de la matrice  $S_\phi$

$$S_\phi(\tilde{\omega}) = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & \bar{j}^\alpha \tilde{\omega} - a & c \\ \hline j^\alpha \tilde{\omega} - a & -b^2 & 0 \\ -c & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Il est bien connu que la matrice parahérmitienne peut être transformée sous des transformations de matrices de rangées et de colonnes qui laissent la réalisation d'état-espace du système  $\{a, b, c, \alpha\}$  invariant [14, 39]. Par conséquent, la matrice  $S_\phi(\tilde{\omega})$  peut être transformé à la matrice suivante

$$S_{\tilde{\phi}}(\tilde{\omega}) = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & \bar{j}^\alpha \tilde{\omega} - a & c \\ \hline j^\alpha \tilde{\omega} - a & f & pc \\ -c & -cp & 0 \end{array} \right],$$

où

$$f = (j^\alpha \tilde{\omega} - a)p + p(\bar{j}^\alpha \tilde{\omega} - a) - b^2,$$

avec,  $p$  est la solution de l'équation  $f = 0$ , qui est donnée par

$$\begin{aligned} p &= \frac{b^2}{(j^\alpha + \bar{j}^\alpha) \tilde{\omega} - 2a}, \\ &= \frac{b^2}{2 \left( \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \tilde{\omega} - a \right)}. \end{aligned}$$

Alors, la matrice  $S_{\tilde{\phi}}(\tilde{\omega})$  devient

$$S_{\tilde{\phi}}(\tilde{\omega}) = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & \bar{j}^\alpha \tilde{\omega} - a & c \\ \hline j^\alpha \tilde{\omega} - a & 0 & \frac{cb^2}{2 \left( \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \tilde{\omega} - a \right)} \\ -c & -\frac{cb^2}{2 \left( \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \tilde{\omega} - a \right)} & 0 \end{array} \right].$$

Dans ce cas, le complément de Schur de  $S_{\tilde{\Phi}}$  peut être écrit comme

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\omega}) = \begin{pmatrix} c & cp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (j^\alpha \tilde{\omega} - a)^{-1} \\ (\tilde{j}^\alpha \tilde{\omega} - a)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ pc \end{pmatrix},$$

selon certains calculs, la formule de la fonction  $\tilde{\Phi}$  est rédigé sous la forme suivante

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\omega}) = c^2 p \left( \frac{1}{\tilde{j}^\alpha - a} + \frac{1}{j^\alpha - a} \right).$$

D'après quelques simplifications, nous trouvons l'expression de la fonction  $\tilde{\Phi}$

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\omega}) = -\frac{c^2 b^2}{2 j a \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left[ \frac{1}{\tilde{\omega} - a e^{-\frac{\alpha\pi}{2}j}} - \frac{1}{\tilde{\omega} - a e^{\frac{\alpha\pi}{2}j}} \right].$$

Ainsi, la  $\mathcal{H}_2$ - norme de la fonction de transfert  $G$  est

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)G^*(j\omega) d\omega, \\ &= \frac{1}{\alpha\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1} \tilde{\Phi}(\tilde{\omega}) d\tilde{\omega}, \\ &= -\frac{c^2 b^2}{2\pi j a \alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left[ \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{\tilde{\omega} - a e^{-\frac{\alpha\pi}{2}j}} \right) \tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1} d\tilde{\omega} - \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{\tilde{\omega} - a e^{\frac{\alpha\pi}{2}j}} \right) \tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1} d\tilde{\omega} \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pour  $\frac{1}{2} < \alpha < 2$  avec  $\alpha \neq 1$ , nous utiliserons la transformée de Mellin [8], qui ont été présentées dans le premier chapitre, alors, la  $\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2$  est égal à

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= -\frac{c^2 b^2}{2\pi j a \alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left[ \left( \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} (-a)^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\alpha\right)j} \right) - \left( \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} (-a)^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\alpha\right)j} \right) \right], \\ &= -\frac{c^2 b^2}{2\pi j a \alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left( \frac{2j\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} (-a)^{\frac{1}{\alpha}-1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right), \\ &= -\frac{b^2 c^2 (-a)^{\frac{1}{\alpha}-2} \cot\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}. \end{aligned}$$

Le théorème (2.2) est prouvé. ■

L'expression (2.22) peut être facilement calculé pour  $\alpha = 1$ , et, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= -\frac{c^2 b^2}{2j\pi a} \left[ \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{\tilde{\omega} - a e^{-\frac{\pi}{2}j}} - \frac{1}{\tilde{\omega} - a e^{\frac{\pi}{2}j}} \right) d\tilde{\omega} \right], \\ &= -\frac{c^2 b^2}{2j\pi a} \left[ \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left( \int_0^\tau \left( \frac{1}{\tilde{\omega} - a e^{-\frac{\pi}{2}j}} - \frac{1}{\tilde{\omega} - a e^{\frac{\pi}{2}j}} \right) d\tilde{\omega} \right) \right], \\ &= -\frac{c^2 b^2}{2j\pi a} \left[ \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left( \ln \left| \frac{\tilde{\omega} - a e^{-\frac{\pi}{2}j}}{\tilde{\omega} - a e^{\frac{\pi}{2}j}} \right| \right) \right], \\ &= -\frac{c^2 b^2}{2a}. \end{aligned}$$

En outre, la même technique peut être appliquée à toute fonction de transfert représentée par un système linéaire différentiel régulier écrit dans un espace d'état comme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $x \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie et  $A \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{q \times m}$ , et  $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$  avec une condition initiale nulle.

Dans ce cas, la  $\mathcal{H}_2$ -norme de la fonction de transfert  $G(s) = C(sI_d - A)^{-1}B$ , avec la réalisation généralisée de l'espace d'état  $\{A, B, C\}$  et  $\det(sI - A) \neq 0$ , et pour  $s \in \mathbb{C}$ , est

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \text{tr}(CPC^T).$$

La matrice  $P$  est la solution de l'équation de Lyapounov

$$AP + PA^T + BB^T = 0,$$

où,  $A^T$ ,  $B^T$  et  $C^T$  sont respectivement la transposition des matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

## 4 Conclusion

Ce chapitre est traité une méthode approche pour le calcul de la norme  $\mathcal{H}_2$  de la fonction de transfert d'ordre fractionnaire basés sur la dérivée fractionnaire au sens de Caputo pour  $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ . La méthode consiste à utiliser la réalisation de l'espace d'état et la matrice parahermitienne et elle est basée sur l'utilisation de matrices de transformation satisfaisant certaines conditions. Pour montrer l'efficacité de la méthode présentée, nous avons proposé des exemples numériques, comme indiqué dans le troisième chapitre.

# Chapitre 3

## Applications Numériques

### 1 Introduction

Ce chapitre est consacré l'application numérique sur les systèmes ordinaire et les systèmes d'ordre fractionnaire pour calculer la norme  $\mathcal{H}_2$  en utilisant les méthodes présentée dans le deuxième chapitre.

### 2 Système dynamique ordinaire

Considérons la représentation d'état d'un oscillateur amorti forcé

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ w_0^2 & -2mw_0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ kw_0^2 \end{pmatrix}$  et  $C = (1 \ 0)$ ,

sa fonction de transfert donnée par :

$$G(s) = \frac{kw_0^2}{s^2 + 2smw_0 + w_0^2}$$

La norme  $\mathcal{H}_2$  de la fonction de transfert G est donnée par

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \text{tr}(CPC^T),$$

avec, la matrice P est la solution de l'équation de Lyapunov

$$AP + PA^T + BB^T = 0,$$

tel que,  $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$  Alors,

$$AP + PA^T + BB^T = \begin{pmatrix} P_{21} + P_{12} & P_{22}w_0^2 - 2mw_0P_{12} \\ -w_0P_{11} - 2mw_0P_{21} + P + P_{22} & -w_0^2P_{12} - w_0^2P_{21} - 4mw_0P_{22} + k^2w_0^4 \end{pmatrix}$$

En résolvant les équations, on obtient

$$P = \begin{pmatrix} \frac{k^2 w_0}{4m} & 0 \\ 0 & \frac{k^2 w_0^3}{4m} \end{pmatrix}$$

D'après quelque manipulation algébrique, nous trouvons

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= CPC^T \\ &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{k^2 w_0}{4m} & 0 \\ 0 & \frac{k^2 w_0^3}{4m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{k^2 w_0}{4m}. \end{aligned}$$

### 3 Système dynamique d'ordre fractionnaire

soit le système dynamique d'ordre fractionnaire :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) &= -x(t) + u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

En appliquant la transformation de Laplace, nous obtenons la fonction de transfert associée au système (3.2)

$$G(s) = (s^\alpha + 1)^{-1}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 2 \quad s \in \mathbb{C}.$$

La norme  $\mathcal{H}_2$  du Système dynamique fractionnaire (3.2) satisfait les conditions du théorème (2.1) est donnée par la formule suivante :

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \cot\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} < \alpha < 2 \text{ et } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

### 4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons examiné l'application numérique qui montre la performances de la méthode présentée. Nous avons évalué la norme  $\mathcal{H}_2$  pour un système dynamique ordinaire et un système dynamique d'ordre fractionnaire.

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté l'application de la fonction de transfert d'ordre fractionnaire dans le but de calculer l'énergie de la réponse impulsionnelle.

Nous avons introduites les outils du calcul fractionnaire, notamment les fonctions d'Euler, les transformations intégrales de Mellin et de Laplace, et le complément de Schur. Ensuite, nous avons rappelé les systèmes dynamiques, les fonction de transfert d'ordre fractionnaire et la norme  $\mathcal{H}_2$ , et la présentation de la méthode approchée pour calculer la norme  $\mathcal{H}_2$  pour une fonction de transfert d'ordre fractionnaire a été ensuite considéré.

L'efficacité de la méthode présentée a été examiné à travers des exemples numériques.

# Bibliographie

- [1] **Aström. K. J.** (1970), *Introduction to stochastic control theory*, Academic press, New York. [2](#), [14](#)
- [2] **Boreman. G. D.** (2001), *Modulation transfer function in optical and electro-optical systems*, The Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers. [18](#)
- [3] **Caponetto. R., Dongola. G., Fortuna. L., and Petras. I.** (2010), *Fractional Order Systems : Modeling and Control Applications*, World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, 72, World Scientific, Singapore. [3](#), [19](#)
- [4] **Caputo. M.** (1967), *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II*, Geophysical Journal International, **13**(5), 529–539. [7](#)
- [5] **Caputo. M.** (1969), *Elasticità e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna. [20](#)
- [6] **Debnath. L., and Bhatta. D.** (2007), *Integral transforms and their applications*, Chapman and Hall/CRC. [8](#), [9](#), [10](#)
- [7] **DeLarminat. P.** (2007), *Analysis and Control of Linear Systems*, Control Systems, Robotics and Manufacturing Series. ISTE Ltd, London, 2007. [1](#)
- [8] **Doetsch. G.** (1950), *Handbuch der Laplace-Transformation*, Birkhäuser, Basel. [23](#)
- [9] **Edwards. H. M.** (1974), *Riemann's Zeta function*, Academic press, New York and London. [11](#)
- [10] **Erdélyi. A., Oberhettinger. F., and Tricomi. F. G.** (1954), *Tables of Integral transforms I*, McGraw-Hill Book Company, New York. [8](#), [10](#), [11](#)
- [11] **Fadiga. I., Farges. C., Sabatier. J., and Moze. M.** (2011), *On computation of  $\mathcal{H}_\infty$ -norm for commensurate fractional order systems*, 50<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Orlando, FL, USA, 8231–8236. [1](#)
- [12] **Galkowski. K.** (2001), *State-space realizations of linear 2-D systems with extensions to the general  $nD(n>2)$  case*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 263. [15](#)
- [13] **Gallay. T.** (2009) *Théorie de la mesure et de l'intégration*, Université Joseph Fourier, Grenoble. [4](#)
- [14] **Genin. Y., Hachez. Y., Nesterov. Y., Stefan. R., Van Dooren. P., and Xu. S.** (2002), *Positivity and linear matrix inequalities*, Eur. J. Control, **8**(3), 275–298. [22](#)
- [15] **Gómez-Aguilar. J. F., Escalante-Martinez. J. E., Calderón-Ramón. C., Morales-Mendoza. I. J., Benavidez-Cruz. M., et Gonzalez-Lee. M.** (2016) *Equivalent circuits applied in electrochemical impedance spectroscopy and fractional derivatives with and without singular kernel*, Advances in Mathematical Physics. [16](#), [19](#)
- [16] **Graf. U.** (2010), *Introduction to Hyperfunctions and their integral transforms : An applied and computational approach*, Springer Science and Business Media. [11](#)
- [17] **Ionescu. C., Lopes. A., Copot. D., Machado. J. A. T., and Bates. J. H. T.** (2017), *The role of fractional calculus in modelling biological phenomena*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **51**, 141–159. [1](#), [3](#)

- [18] **Kaczorek. T.** (2011), *Selected problems of fractional systems theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. [16](#)
- [19] **Kaczorek. T., and Rogowski. K.** (2015), *Fractional linear systems and electrical circuits*, Studies in Systems, Decision and Control, 13, Springer International Publishing, Switzerland. [1](#), [3](#), [4](#), [5](#), [9](#), [18](#)
- [20] **Kilbas. A. A., Srivastava. H. M., and Trujillo. J. J.**(2006), *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, **204** of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amsterdam. [1](#), [5](#), [6](#), [7](#)
- [21] **Kuhfitting. P. K. F.**(1978), *Introduction to the Laplace transform*, Springer Science and Business Media, New York. [8](#), [10](#)
- [22] **Lakeb. A., Kaiserli. Z., and Bouagada. D.** (2023) *Computing the  $\mathcal{H}_2$ -norm of a fractional order system using the state-space linear model*, Kragujevac Journal of Mathematics, **47**(4), 531-538. [14](#), [20](#), [21](#)
- [23] **Layek. G. C** (2015), *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*, Springer, India. [14](#)
- [24] **Levine. W. S.** (1996), *The control handbook*, Jaico Publishing House. [15](#)
- [25] **Ljung. L., and Glad. T.** (1994), *Modeling of Dynamic Systems*, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs. New Jersey. [1](#)
- [26] **Luenberger. D. G.** (1979), *Introduction to dynamic systems : Theory, Models, and Applications*, John Wiley and Sons, Inc. [14](#)
- [27] **Malti. R., Aoun. M., Levron. F., and Oustaloup. A.** (2011), *Analytical computation of the  $\mathcal{H}_2$ -norm of fractional commensurate transfer functions*, Automatica, **47**, 2425–2432. [14](#)
- [28] **Matignon. D.** (1998), *Stability properties for generalized fractional differential systems*, ESAIM Proceedings Fractional Differential Systems, Models Methods and Applications, 145–158. [19](#)
- [29] **Miller. K. S., and Ross. B.** (1993), *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons Inc., New York. [5](#)
- [30] **Monje. C. A., Chen. Y. Q., Vinagre. B. M., Xue. D., and Feliu. V** (2010), *Fractional-order Systems and Controls : Fundamentals and Applications*, Advances in Industrial Control, Springer-Verlag, London. [16](#)
- [31] **Najim. K.** (2006), *Control of Continuous Linear Systems*, ISTE Ltd. [16](#)
- [32] **Petráš. I** (2011), *Fractional-Order Nonlinear Systems*, Nonlinear Physical Science, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg. [3](#), [5](#), [6](#), [7](#), [10](#)
- [33] **Podlubny. I.** (1999), *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego. [3](#), [9](#), [11](#), [12](#)
- [34] **Samko. S. G., Kilbas. A. A., and Marichev. O. I.** (1993), *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publisher, Amsterdam, the Netherlands. [6](#), [7](#)
- [35] **Schiff. J. L.** (1999), *The Laplace transform : Theory and Applications*, Springer-Verlag New York, Inc. [8](#)
- [36] **Torvik. P. J., and Bagley. R. L.** (1984), *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials*, Journal of applied mechanics, **51**(2), 294–298. [1](#)
- [37] **Toscano. R.** (2013), *Structured Controllers for Uncertain Systems : A Stochastic Optimization Approach*, Advances in Industrial Control, Springer-Verlag, London. [2](#)

- [38] **Valério. D., and da Costa. J. S.** (2013), *An introduction to Fractional Control*, The Institution of Engineering and Technology, London, United Kingdom. [2](#), [14](#), [16](#), [20](#), [22](#)
- [39] **Vergheze. G., Van Dooren. P., and Kailath. T.** (1979), *Properties of the system matrix of a generalized state-space system*, *Internat. J. Control*, **30**(2) (1979), 235–243. [15](#), [22](#)
- [40] **Wang. J. C.** (1987), *Realizations of generalized Warburg impedance with RC ladder networks and transmission lines*, *Journal of The Electrochemical Society*, **134**, 1915-1920. [3](#)
- [41] **Yosida. K.** (1980), *Functional Analysis*, Sixth Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- [42] **Zadeh. L. A., and Desoer. C. A.** (1963), *Linear system theory : The state space approach*, The McGraw-Hill Book Company, Inc.
- [43] **Zhang. F.** (2005), *The Schur complement and its applications*, Springer Science and Business Media. [12](#)

